



INDIAN AGRICULTURAL  
RESEARCH INSTITUTE, NEW DELHI

GIP NLK-H-3 I.A.R.L.-10-3-55-15,000.





臺北帝國大學理農學部紀要

第十四卷 第一號

昭和拾年八月

---

MEMOIRS  
OF THE  
FACULTY OF SCIENCE  
AND  
AGRICULTURE

TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

VOL. XIV. No. 1-4 & 7

August, 1935

---

HIROSHI NAKAMURA

On the Two Species of the Thresher Shark from Formosan Waters

---

PUBLISHED

BY THE

TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

FORMOSA, JAPAN



## **PUBLICATION COMMITTEE**

Professor **Bunichirô AOKI**, Dean of the Faculty (*ex officio*)

Professor **Ichirô HAYASAKA**

Professor **Takashi MATSUMOTO**

Professor **Kichimatsu MATSUNO**

Professor **Tokuichi SHIRAKI**

Professor **Tyôzaburô TANAKA**

---

The MEMOIRS OF THE FACULTY OF SCIENCE AND AGRICULTURE, Taihoku Imperial University, are published occasionally by the University, which exchanges them with the publications of other learned bodies and institutions throughout the world. Separate series will be sent to individual research institutions, and complete series to the central libraries of universities and larger institutions. Copies of the Memoirs may also be obtained from MARUZEN COMPANY LTD., Tôkyô, Japan, and THE TAIWAN NICHU-NICHU SHIMPÔ-SHA, Taihoku, Formosa, Japan.

All communications regarding the Memoirs should be addressed to the Dean of the Faculty of Science and Agriculture, Taihoku Imperial University, Taihoku, Formosa, Japan.

臺北帝國大學理農學部紀要

第十四卷

昭和十年—昭和十二年

MEMOIRS  
OF THE  
FACULTY OF SCIENCE  
AND  
AGRICULTURE  
TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

---

Volume XIV.

---

1935 - 1937

TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY  
FORMOSA, JAPAN



# CONTENTS

---

	<i>Page.</i>
HARADA, Isokiti:—Zur Acanthocephalenfauna von Japan. ... ..	7
HARADA, Isokiti:—Limnologische Studien auf dem „Sango-Tan“, einem tropischen See von Formosa, unter besonderer Berücksichtigung der Vertikalverteilung des Zooplanktons. ... ..	143
HARADA, Isokiti:—Ergänzung zu den Limnologischen Studien auf dem „Sango-Tan“. ... ..	217
HIRASAKA, Kyôsuke:—On the Pigmy Sperm-Whale, <i>Kogia breviceps</i> (BLAINVILLE). ... ..	117
KAWAGUTI, Sirô:—On the Respiration of Branchiura Sowerbyi. ... ..	91
NAKAMURA, Hirochi:—On the Two Species of the Thresher Shark from Formosan Waters. ... ..	1
SHIRAKI, Tokuchi:—Orthoptera of the Japanese Empire (Part IV) Phasmidae. ... ..	23



# ON THE TWO SPECIES OF THE THRESHER SHARK FROM FORMOSAN WATERS.

(With Plates I-III.)

Hiroshi NAKAMURA.

(Accepted for publication, August 10, 1934)

Up to the present, only one species of the shark of the family Alopiidæ, is known:—*Alopias vulpes* (GMELIN).

I have recently met with two different forms of the Thresher or Fox Shark in the fish market at Suô.<sup>1)</sup>

The most remarkable differences in these two are, the size of the eye, the structure of the caudal fin, and its proportion to the body.

Fishermen of that district distinguish these two forms precisely.

Combining the reports of the fishermen, there seems to be some difference in their habits,—the large-eyed species inhabits deeper water or near the sea-bottom, while the smaller-eyed species lives near the surface. When taken aboard, the former often holds mud in its mouth, which is never the case with the latter, even if two fish of the different species were caught on the same line. Both of them habitually swim downward when hooked. Economically the latter are of higher value.

The specimens I obtained this March (1934) were perfect and fortunately foeta were found in each case. A litter contained two embryos,—which the fishermen say is usually the case.

On comparing the embryos, which had already absorbed their yolk-sacks I found remarkable differences which intensified the characteristics of the adults.

I conclude that the Alopiidæ are represented in the Pacific by two distinct species, although they were identified with the *Alopias vulpes* as the cosmopolitan form.

The question then arises,—Which of these two can be identified with the original species? This is a difficult problem as the description of the

<sup>1)</sup> A town on the eastern coast of Formosa (24° 36' N; 121° 52' E.), being the base of pelagic and long-line fisheries for shark and sailfish.

existing species<sup>2)</sup> is inadequate for comparison with either of my present species.

I therefore propose two different species as new representatives of Alopiidæ in the Pacific:—against the original Atlantic species.—*Alopias vulpes*.

Dr. D. S. JORDAN<sup>3)</sup> has already noted this point in one of his papers, in which he also approved of further investigation.

According to their habits I will call them,

*Alopias pelagicus* n. sp. for the species with small eyes, and living in the upper layer of the sea.

*Alopias profundus* n. sp. for the other species with large eyes, and dwelling on the sea-bottom.

The diagnoses and measurements are:—

*Alopias profundus* (fig. 1, Pl. I.)

Body cylindrical, plump anteriorly, and gradually passing into the caudal fin. Length of body (from tip of snout to pit at root of caudal fin) slightly longer than  $\frac{1}{2}$  of the total length. Head (from tip of snout to the last gill creft) nearly  $3\frac{1}{2}$  in length of body: snout  $3\frac{1}{2}$  in head. Teeth moderate, triangular, flat, with smooth edges, in single row in function on both jaws. Gill crefts moderate, five on each side, the last two above pectoral fin. Eyes rather large, in shape of reversed calabash; lateral and transverse diameter of eye 11, and  $7\frac{1}{2}$  in head correspondingly; the lateral diameter nearly  $1\frac{1}{2}$  in the transverse diameter, no nictitating membrane. Spiracles minute. Nostril nearer to the mouth than to the tip of snout. First dorsal rather large, its height is nearly  $\frac{1}{4}$  of the length of body, its anterior end of the base does not reach to above the posterior corner of the pectoral fin, while the posterior end reaches to above the base of the ventral fin. Pectoral fin very long, slightly shorter than  $\frac{2}{3}$  of the length of the body. Ventral fin moderate. Second dorsal and the anal fin very small, and the former situate anteriorly to the latter. A pit on the proximal part of the caudal fin, each on dorsal and ventral sides. Lower lobe of the caudal fin moderate, elongated upper part of the caudal fin rather broad, with a notch near the

GMELIN; Systema Naturæ, 3, p 1496; 1789.

MÜLLER & HENLE.—Plagiostomen, s 74, 1841.

DAY; Fauna of British India, Vol 1, p. 28; 1889.

GARMAN.—Plagiostomia, Mem. Mus. Comp Zool Harvard Coll., XXXVI, p. 30, 1913.

D. S. JORDAN, C. L. HUBBS; Mem Carnegie Mus., 10, p 101; 1925.

end of it, posterior part of the notch enlarged moderately. Colour deep purplish gray.

*Alopias pelagicus* (fig. 2, Pl. I.)

Body cylindrical, gradually passing into the caudal fin, anterior part of the first dorsal plump. Length of body shorter than  $\frac{1}{2}$  of the total length, namely the length of the tail surpasses that of the body. Head  $3\frac{2}{3}$  in the body;  $3\frac{1}{2}$  of the snout;  $10\frac{1}{4}$  of the lateral diameter,  $8\frac{1}{2}$  of the transverse diameter of the eye.

Teeth are very characteristic, having an oblique central cusp, serrated externally; those on upper jaw in four rows, but on the lower jaw only in two rows in function. Eyes are elliptical, the transverse axis  $1\frac{1}{2}$  of the lateral diameter. Gill crefts five, on both sides, the last two situate above the pectoral fin. Spiracles small, obliquely elongated, situate posteriorly to the eyes, aparting from it about a long diameter of it.

First dorsal commences anteriorly to the middle of the body, above the inner corner of the pectoral fin, its posterior tip never reaches to the level of the origin of the ventral fin; and its height slightly longer than the  $\frac{1}{2}$  of the length of the body. Pectoral fin rather large, its length a little longer than the  $\frac{1}{10}$  of the length of the body. Ventral fin moderate. Second dorsal and the anal fin very small, the former situates anteriorly to the latter. A pit to the proximal part of the caudal fin, each on dorsal and ventral sides, the former more dominant. Lower lobe of the caudal fin moderate, the elongated upper lobe rather slender, with a notch near the tip of it, the posterior part of the notch enlarged slightly.

Colour light blueish gray.

For the comparison of these two species, dimensions and the proportions of the body are shown in table 1 and 2.



Table 1. Dimensions of the body parts of the two species.

	1	2	3	1	2	3
Total length	285	270	330	332	352	366
Length of the body	126	123	160	170	174	186.5
Tip of snout to anal fin	121	119	153	158	162.5	173
Tip of snout to 2nd dorsal	118	116	142	152	160	170
Tip of snout to ventral fin	110	98	121	124	130	137
Tip of snout to the 1st dorsal	77	72	89.5	100	108	109
Tip of snout to pectoral fin	38.5	38	47.5	51	56.5	60
Snout	10.1	10	12.5	14	16	17
Diameter of eye	4.8	4.5	5.3	7.5	7.9	8
	3.9	3.7	4.4	4.7	5.2	5.3
Length of the pectoral fin	51.5	47.5	61	61.5	68	69
Height of the 1st dorsal fin	19.5	19.2	24	27.7	29.7	32

Table 2. Proportions of the important parts of the bodies.

	<i>A. pelagicus</i>	<i>A. profundus</i>
Body total length	0.457	0.505
Body tip of snout to the 1st dorsal	1.695	1.673
Body tip of snout to the pectoral fin	3.270	3.190
Body head	3.269	3.188
Head diameter of eye	8.500	7.500
	10.320	10.960

## Foetus

*A) Alopias profundus* (fig. 3 & 4, Pl II.)

Body slightly longer than the tail,  $2\frac{1}{4}$  of the length of the head. Eyes very large, elliptical, transverse and lateral diameter are about  $5\frac{1}{2}$  and  $4\frac{1}{2}$  in the head correspondingly. Interorbital space slightly convex and broad: snout rather pointed, the angle of it from the ventral side nearly equals to a right angle. Head considerably depressed, expanded to the sides posteriorly. Body moderately compressed, gradually passing into the tail. Pectoral fin very large, about  $2\frac{1}{2}$  in the length of the body. First

- 1\* .. Transverse diameter  
2\* .. Lateral diameter

dorsal situated posteriorly to the inner corner of the pectorals, its posterior tip never reaches to above the origin of the ventral fin. Second dorsal fin very small, advanced in its situation from that of the anal fin, the latter slightly larger in size. Ventral fin moderate. No difference can be observed, between young and adult, in the shape of the caudal fin.

Spiracles very minute. None of the tooth developed externally.

B) *Alopias pelagicus* (fig. 5 & 6, Pl. III.)

Body cylindrical, anterior part of the first dorsal very plump, and rather abruptly passing into the tail. Length of the body  $\frac{4}{5}$  of the length of the tail;  $2\frac{9}{10}$  of the head. Head  $8\frac{1}{4}$  of the long axis of the eye. Snout rather rounded: interorbital space broad and much convexed.

Pectoral fin long and broad, its length  $3\frac{9}{10}$  in the length of the body. First dorsal commences nearly above the inner corner of the pectoral fin, and never reaches to the level of the base of the ventral fin. Ventral fin rather large, its length nearly equals to the height of the first dorsal fin. Second dorsal and the anal fin very small, the former situates anteriorly to the latter. In the shape of the caudal fin, no difference can be observed between young and adult. Spiracles somewhat longer than the adult, situated posteriorly to the eye, aparting from it a long axis of it. None of the tooth developed externally.

Table 3 and 4 show the dimensions and the proportions of the body of the embryos of both species.

Before ending this paper, I wish to express my gratitude to Professor K. HIRASAKA, for his kind supervision, and also to Mr. K. YOGI, the Director of the Fisheries Experimental Station of the Government of Formosa, who has given me all facilities in this investigation.

Table 3 Dimensions of the parts of the bodies.

Length (in cm )	<i>A. pelagicus</i>	<i>A. profundus</i>
Length of the body	43.5	36.5
Length of the tail	53	35.5
Tip of snout to 2nd dorsal	36.3	32.5
„ anal	38.3	34.0
„ ventral	28.8	27.6
„ 1st dorsal	21.8	21.9
„ pectoral	14.4	13.2
the last gill slit	15.2	14.2
„ the 1st gill slit	12.4	12.1
Length of the snout	4.0	4.4
Diameter of eye { 1*	1.8	3.0
2*	1.4	2.5
Preoral portion	5.1	4.9
Interorbital space	5.1	4.5
Length of the pectoral fin	12.6	13.3

Table 4 Proportions of the parts of the bodies

	<i>A. pelagicus</i>	<i>A. profundus</i>
Total length length of the body	2.218	1.972
Body head	2.852	2.570
Body tip of snout to 1st dorsal	2.000	1.667
Head snout	3.800	3.227
Head diameter of eye { 1*	8.444	4.773
2*	10.857	5.680
Body length of the pectoral fin	2.980	2.898
Head interorbital space	2.980	3.156

1\* Transverse diameter

2\* Lateral diameter

# **PLATE I**

### Explanation of Plate I

Figure 1. *Alopias profundus* ( $\frac{1}{16}$  Natural size.)  
a. Its teeth (Natural size)

Figure 2. *Alopias pelagicus* ( $\frac{1}{16}$  Natural size.)  
b. Its teeth (Natural size)

Plate I

Fig. 1

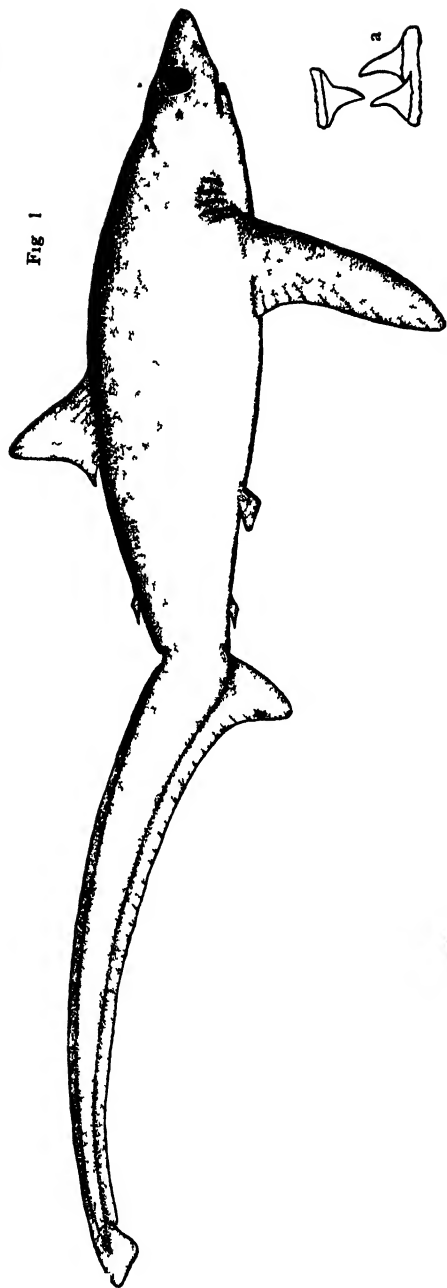
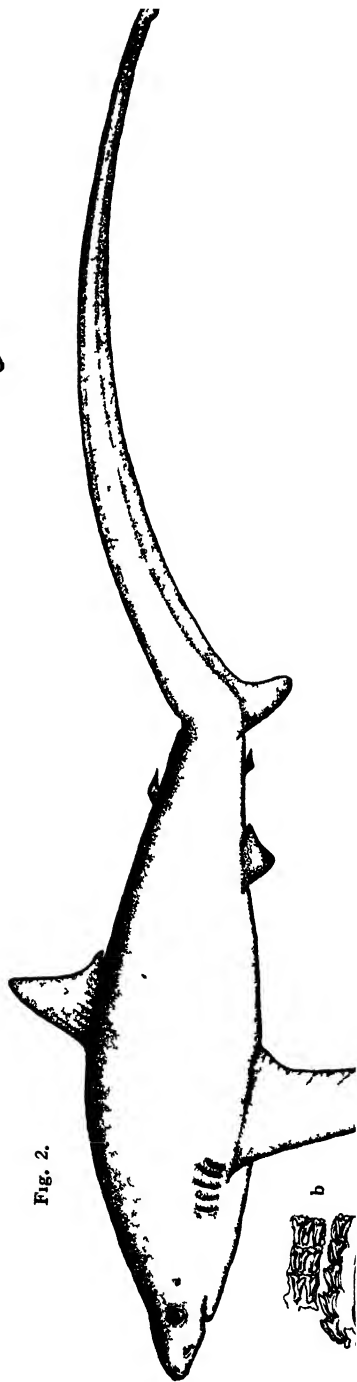


Fig. 2.





## **PLATE II**



### **Explanation of Plate II**

**Figure 3**    Fœtus of *Alopias profundus* ( $\frac{1}{2}$  nat size )  
              a    Ventral view of its head

**Figure 4**    Dorsal view of the same

Fig 3

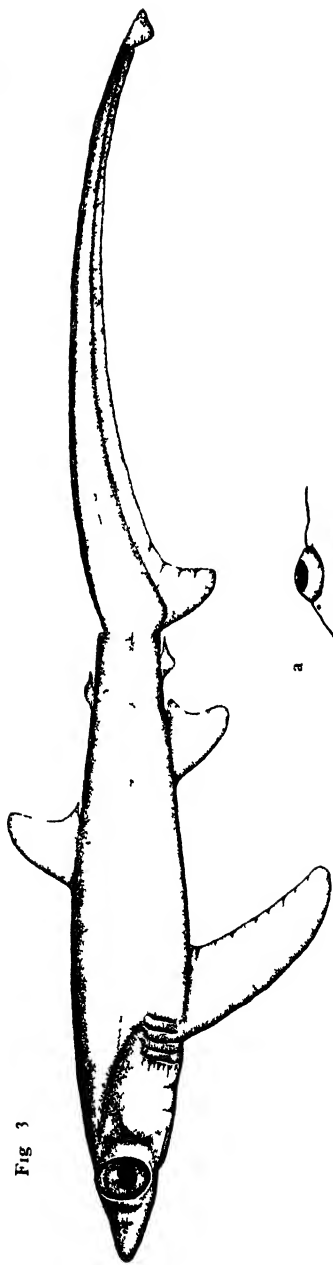
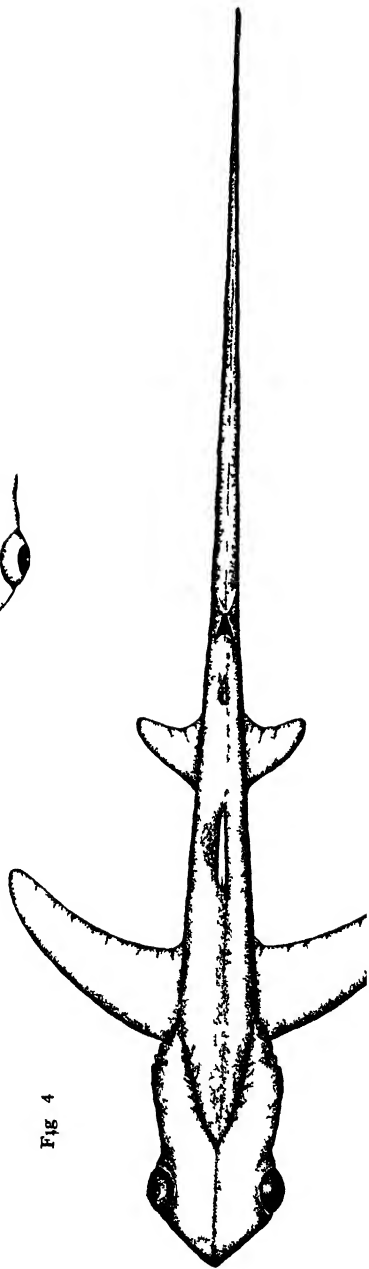


Fig 4





## **PLATE III**

### **Explanation of Plate III**

**Figure 5.** Fœtus of *Alopias pelagicus* ( $\frac{1}{3}$  nat. size.)

a. Ventral view of its head.

**Figure 6.** Dorsal view of the same.

(All figures were drawn by the author from life.)

Fig. 5.

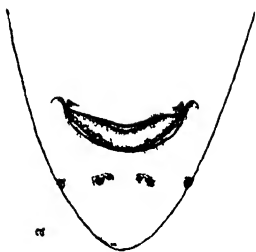
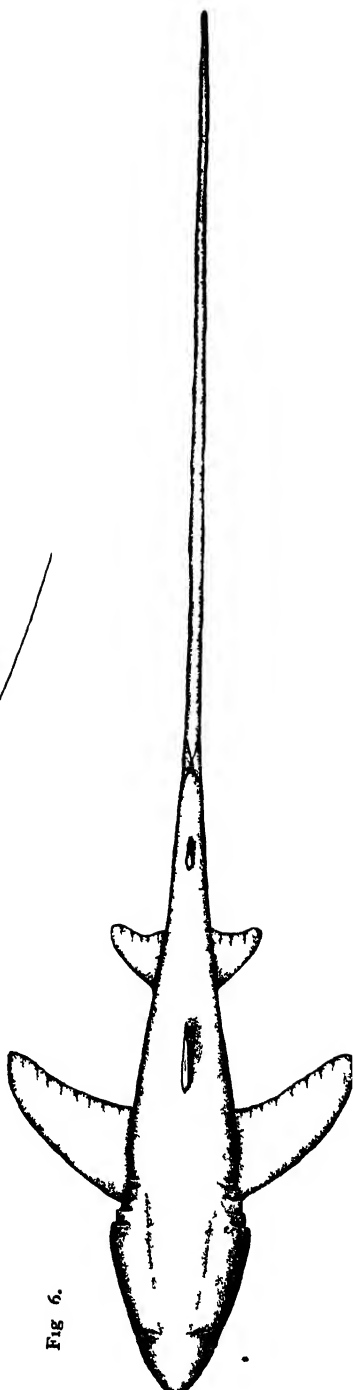


Fig. 6.





# ZUR ACANTHOCEPHALENFAUNA VON JAPAN.

Isokiti HARADA.

(Accepted for publication, January 10, 1935)

(Mit 9 Textabbildungen)

Unsere Kenntnisse über die Acanthocephalenfauna Japans sind in neuerer Zeit durch mehrere Forscher, nämlich früher von T. FUJITA 1920, 1921) und späterhin von H. J. VAN CLEAVE (1925, 1931), I. HARADA (1928, 1929, 1931) und T. FUKUI (1929), Schritt für Schritt gefördert worden.

Die vorliegende Arbeit beruht hauptsächlich auf meiner Sammlung; davon verdanke ich alle Exemplare aus Korea Herrn I. MOTOMURA und die Exemplare von *Acanthocephalus echigoensis* aus dem Kizaki-See Herrn Dr. Y. OKADA; die einzige mir fehlende Art ist *Macracanthorhynchus hirudinaceus*, deren Einsicht mir von Dr. M. SUGIMOTO in seiner Sammlung gewährt wurde; allen diesen Herren bin ich für ihre Freundlichkeit zu wärmstem Dank verpflichtet.

In vorliegender Arbeit werden 8 Genera und 9 Species behandelt, davon 2 Genera und 5 Species neu beschrieben. Die Wirttiere verteilen sich auf Meeres- und Süßwasserfische, Amphibien, Reptilien und Säugetiere.

**Pallisentis** VAN CLEAVE 1928

(Syn. *Neosentis* VAN CLEAVE 1928)

Kleine bis mittelgrosse Acanthocephalen; Rumpf im vorderen Drittel, unmittelbar hinter dem Hals, mit einigen Kreisen dicht stehender Stacheln, dahinter ein unbestachelter Abschnitt, dann wiederum Querreihen von Stacheln, von welchen einige der hinteren dorsal unterbrochen sind.

Proboscis kurz, kugelig; Proboscishaken quincunxial, zwei Haken in einer Längsreihe (also 4 Querreihen); Proboscis-Receptaculum ovoid, einwandig; Hirnganglion im Grunde der Rüsselscheide. Lemniskiten lang, zylindrisch, jeder einzelne mit einem Riesenkerne. Hoden hintereinander; Zementdrüsen lang, sackförmig, synzytial, mit etwa 16 Riesenkernen. Haut mit einigen amoeboiden Riesenkernen; Lakunensystem mit medialen Hauptgefäßen.

Parasiten von Süßwasserfischen und Weichschildkröten.



Im Jahre 1928 errichtete H. J. VAN CLEAVE in dem gleichen Artikel zwei Gattungen, *Pallisentis* und *Neosentis*, aus China, welche, wie der Autor selbst angibt, einander sehr nahe stehen; meines Erachtens sind sich diese zwei Gattungen so ausserordentlich ähnlich, dass zwischen ihnen ausser der Proboscisbehakung keine wichtige Verschiedenheit besteht und eine Trennung derselben ganz unberechtigt erscheint. Neuerdings hat H. A. BAYLIS (1933) die Ähnlichkeit von *Pallisentis*, *Farzandia* etc. erörtert und sich dabei in entschiedenem Gegensatz zu MEYER (1932) gestellt; es sollte nach ihm die Familie Acanthogyridae MEYER gestrichen, und die in ihr begriffenen Gattungen mit der Familie Quadrigyridae vereinigt werden.

Was den Zusammenschluss dieser Gattungen in eine einzige Familie betrifft, so stimme ich mit ihm völlig überein. Ich kann ihm aber nicht folgen, wenn er die Gattung *Farzandia* als Synonym von *Pallisentis* behandelt, glaube vielmehr, dass schon die Verschiedenheit in der Körperbestachelung die Trennung der beiden Gattungen notwendig macht.

Ein weiterer wichtiger Unterschied besteht darin, dass nach BHALERAO (1931) bei *Farzandia nagpurensis* die Hauptlängsgefässe des Lakunensystems eine laterale Lage einnehmen, während sie bei *Pallisentis* [*Neosentis*] *celatus* nach meiner ganz sicheren Beobachtung median verlaufen. Das Genus *Neosentis* ist natürlich weit näher verwandt mit *Pallisentis* als mit *Farzandia*. Ich behandle demnach *Neosentis* als ein Synonym von *Pallisentis*, betrachte aber *Farzandia* als eine distinkte Gattung, indem mir der laterale Verlauf der Hauptgefässe des Lakunensystems als hinreichendes Trennungsmerkmal erscheint.

***Pallisentis celatus* (VAN CLEAVE 1928) (Abb. 1).**

(Syn. *Neosentis celatus* VAN CLEAVE 1928)

Rumpf im vorderen Drittel etwas verdickt, im übrigen zylindrisch; nach VAN CLEAVE ♀ 17 mm lang, 1.7 mm breit; ♂ meist etwa 10 mm lang, 0.4 mm breit. Meine Exemplare sind ziemlich jung; ♀ 3.5 mm lang, 0.4 mm breit; ♂ 2.7 mm lang, 0.4 mm breit.

Proboscis kugelig, 0.18 mm lang, 0.19 mm breit; Haken quincunxial, 16 Längsreihen zu je 2 (also 4 Querreihen zu je 8) Haken.

**Dimensionen der Proboscishaken (Länge in  $\mu$ ).**

Haken in den Querreihen, von vorn nach hinten	H <sub>1</sub>	H <sub>2</sub>	H <sub>3</sub>	H <sub>4</sub>
Freier Hakenteil	70	64	52	41
Wurzelteil	53	50	40	28

ZUR ACANTHOCEPHALENFAUNA VON JAPAN

Proboscis-Receptaculum länglich oval, 0.3 mm lang, 0.18 mm breit, einwandig; Hirnganglion im Grunde der Rüsselscheide.

Lemniskiten lang, zylindrisch, 1.2 mm lang, 0.1 mm breit, mit einem Riesenkern nahe dem Ende der Rüsselscheide, beim Männchen bis zum vorderen Testis reichend.

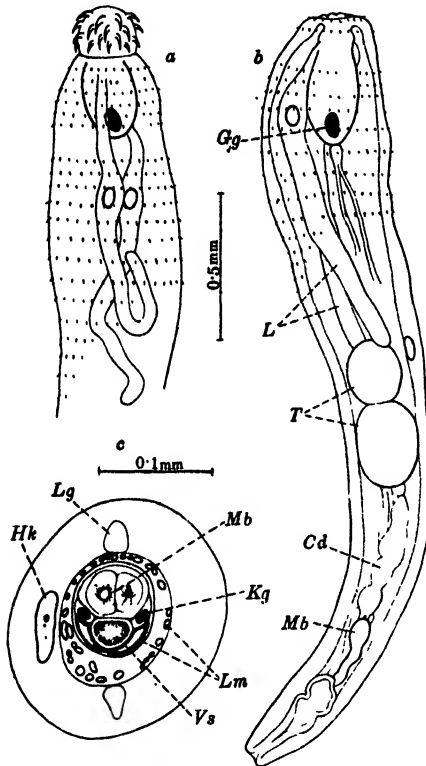


Abb. 1  
*Pallisentis celatus*  
(VAN CLEAVE 1928)

- a) Vorderkörper des Weibchens
- b) Männchen
- c) Querschnitt des Hinterkörpers des Männchens

- Cd. Zementdrüsen
- Gg. Hirnganglion
- Hk. Hautkern
- Kg. Kittgang
- L. Lemniskiten
- Lg. Längsgefäss
- Lm. Längsmuskel
- Mb. Markbeutel
- T. Testes
- Vs. Vesicula seminalis

Testes dicht hintereinander, länglich oval; Zementdrüsen synzytial, lang, schlauchförmig, mit einem hinteren Reservoir, von welchem zwei seitliche Ausführungsgänge austreten.

Bestachelung auf das vordere Drittel des Rumpfes beschränkt, in zwei (einem vorderen und einem hinteren) Feldern, vorn meist 5, selten 6 Ringe, hinten 8 oder 9 Ringe, auf welche sodann noch 5 oder 6 auf die Ventralseite beschränkte Querreihen von Stacheln folgen. Die Länge der Stacheln, zusammen mit dem Wurzelteil, beträgt meist  $16\mu$ , selten  $22\mu$ .

Geburtsreife Eier konnte ich bei meinen Exemplaren nicht beobachten; sie sind nach VAN CLEAVE 53 bis  $77\mu$  lang, 20 bis  $27\mu$  breit.

Wirte: *Monopterus javanensis*, *Anguilla pekinensis* und *Parasilurus asotus*—China. *Anguilla japonica*, *Parasilurus asotus* und *Amyda* sp.—Korea.

### **Micracanthorhynchus n. g.**

Körper sehr klein, Vorderrumpf mit etwa 20 in gleicher Entfernung stehenden Querreihen von winzigen Stacheln, von denen die vorderen 10 bis 11 Reihen vollkommene Ringe bilden, die dahinter stehenden aber dorsal unterbrochen sind. Proboscis keulenförmig; Proboscisbehakung an das Genus *Acanthocephalus* erinnernd; Haken mit einem hinteren und einem schräg nach vorn gerichteten Fortsatz; Proboscis-Receptaculum doppelwandig. Testes dicht hintereinander; Zementdrüsen 4, birnförmig; Geschlechtsöffnung subterminal, ventral. Haut mit kleinen, zerstreuten Kernfragmenten; Lakunensystem mit lateralen Hauptgefässen, welche durch pseudometamerisch angeordnete Querkommissuren miteinander verbunden sind.

Parasiten von Süßwasserfischen.

Während eine Verschiedenheit der Hakengrösse auf der dorsalen und ventralen Seite der Proboscis bei diesem neuen Genus nicht besteht, schliesse ich es doch in Anbetracht der anderen Merkmale in die Familie Rhadinorhynchidae ein.

### **Micracanthorhynchus motomurai n. sp. (Abb. 2).**

Körper spindelförmig, etwa in der Mitte erweitert; ♀ 3.2 mm lang, 0.5 mm breit; ♂ 1.6 bis 3.5 mm lang, 0.35 bis 0.5 mm breit. Proboscis keulenförmig, vorn etwas erweitert, 0.3 bis 0.5 mm lang, 0.15 mm breit; Proboscishaken von vorn nach hinten allmählich kleiner, mit einem hinteren und einem schräg nach vorn gerichteten Fortsatz, in 12 Längsreihen zu je meist 8, selten 9 Haken, quincunxial.

Dimensionen der Proboscishaken in einer ventralen Längsreihe.

Haken von vorn nach hinten	H <sub>1</sub>	H <sub>2</sub>	H <sub>3</sub>	H <sub>4</sub>	H <sub>5</sub>	H <sub>6</sub>	H <sub>7</sub>	H <sub>8</sub>
Länge in $\mu$	56	56	50	44	41	30	24	18

Proboscis-Receptaculum dick, kurz, doppelwandig, 0.55 bis 0.9 mm lang, 0.2 mm breit; Hirnganglion etwa in der Mitte.

Lemniskiten etwa von gleicher Länge mit dem Proboscis-Receptaculum,

stäbchenförmig, mit rundem Querschnitt.

Testes kugelig, dicht hintereinander im mittleren Drittel des Rumpfes gelagert; Zementdrüsen 4, birnförmig; Geschlechtsöffnung bei beiden Geschlechtern subterminal, ventral.

Vorderrumpf mit 18 bis 22 in fast gleicher Entfernung stehenden Querreihen von winzigen (etwa  $20\mu$  langen,  $8\mu$  breiten) Stacheln, von denen die vorderen 8 bis 11 Reihen vollkommene Ringe bilden, die dahinter stehenden aber in allmählich zunehmendem Maasse dorsal unterbrochen sind. Rumpfbestachelung reicht etwa bis zur Körpermitte.

Haut mit zahlreichen kleinen Kernfragmenten; Lakunensystem mit lateralen Hauptgefäßen, welche durch zahlreiche pseudometamerische Querkommissuren miteinander verbunden sind. Hierbei ist noch zu bemerken, dass die Querreihen der Stacheln diesen Kommissuren vollkommen parallel laufen.

Uterus und Uterusglocke etwa 1.4 mm lang; Eier unbekannt.

Wirt: *Zacco* sp.—im Darm.

Verbreit.: Korea.

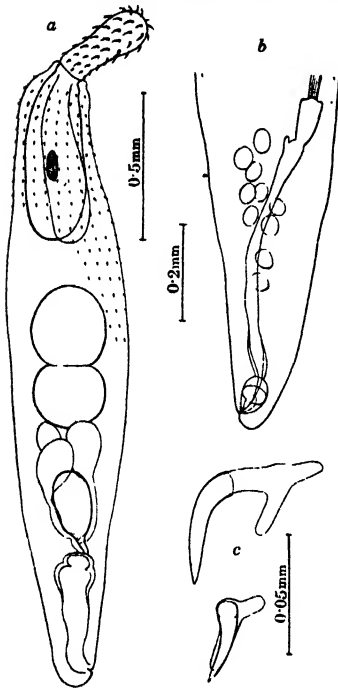


Abb. 2

*Micracanthorhynchus motomurai* n. sp.

a) Männchen

b) Hinterkörper des Weibchens

c) Proboscishaken

### ***Rhadinorhynchus trachuri* n. sp. (Abb. 3).**

Rumpf vorn etwas verdickt, hinten fast zylindrisch, dorsal gekrümmt. ♀ 10 mm lang, ♂ etwa 7.5 mm lang, beide Geschlechter im Maximum 0.6 mm breit.

Proboscis zylindrisch, etwa 1.7 mm lang, 0.15 mm breit, im fixierten Zustande in der Halsregion fast im rechten Winkel zum Körper geneigt. Proboscishaken meist in 12 Längsreihen zu je 22 bis 24, ventrale Haken etwas länger und kräftiger als dorsale, die basalen 12 Haken in einem nicht unterbrochenen Ringe angeordnet.

Proboscis-Receptaculum mit etwas verjüngtem Hinterende, 1.6 mm lang, 0.15 mm breit, doppelwandig; Hirnringanglion etwas vor der Mitte

Dimensionen der Proboscishaken (Länge in  $\mu$ ).

Haken von der Proboscisbasis nach vorn	H <sub>1</sub>	H <sub>2</sub>	H <sub>3</sub>	H <sub>4</sub>	H <sub>5</sub>	H <sub>6</sub>	H <sub>7</sub>	H <sub>8</sub>	H <sub>9</sub>	H <sub>10</sub>	H <sub>11</sub>
Ventralreihe	76	72	74	75	79	80	74	74	70	—	70
Dorsalreihe	68	55	58	65	66	67	67	68	69	70	70

der Rüsselscheide.

Lemniskcn etwas abgeplattet, aber schmal, wenig länger als das Proboscis-Receptaculum, am Hinterende etwas erweitert.

Testes hintereinander, wenig länger als breit, 0.7 mm lang, 0.4 mm breit, wenig hinter der Mitte des Rumpfes gelagert; Zementdrüsen 4, paarig hintereinander, keulenförmig, hinteres Paar grösser als vorderes.

Rumpfbestachelung in zwei Feldern; vorne ein Gürtel, davon getrennt ein hauptsächlich auf die ventrale Seite beschränktes Feld. Die Länge der Stacheln beträgt meist 0.05 mm im vorderen Feld, 0.06 mm im hinteren. Die Rumpfbestachelung des hinteren Feldes viel reicher bei ♀ als bei ♂, aber selbst bei ♀ kaum bis zum Hinterende des Proboscis-Receptaculums reichend.

Uterus und Uterusglocke etwa 1.2 mm lang; geburtsreife Eier 73  $\mu$  lang, 20  $\mu$  breit.

Wirt: *Trachurus japonicus* (TEMMINCK u. SCHLEGEL) — im Darm. Fischmarkt, Tokyo (Japan).

Im Jahre 1921 beschrieb H. J. VAN CLEAVE, gleichfalls aus Carangiden (*Caranx georgianus*), eine neue Species, *Rhadinorhynchus selkirkii* (Sammlung der Schwedischen Expedition nach den Juan Fernandez-Inseln). Seine Beschreibung ist leider mangelhaft, besonders die für das männliche Geschlecht, und gestattet eine Vergleichung nur soweit die äusseren Charaktere in Betracht kommen. Obgleich zwischen den beiden Species eine Ähnlichkeit in der Behakung der Proboscis besteht, stimmen doch die Dimensionen der Pro-

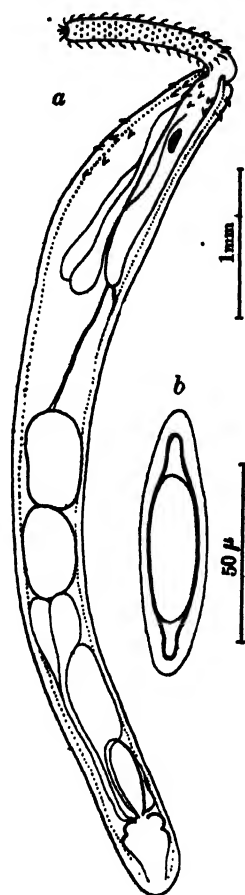


Abb. 3  
*Rhadinorhynchus*  
*trachuri* n. sp.  
a) Männchen  
b) Ei

boscishaken sowie der Rumpfstacheln nicht überein.

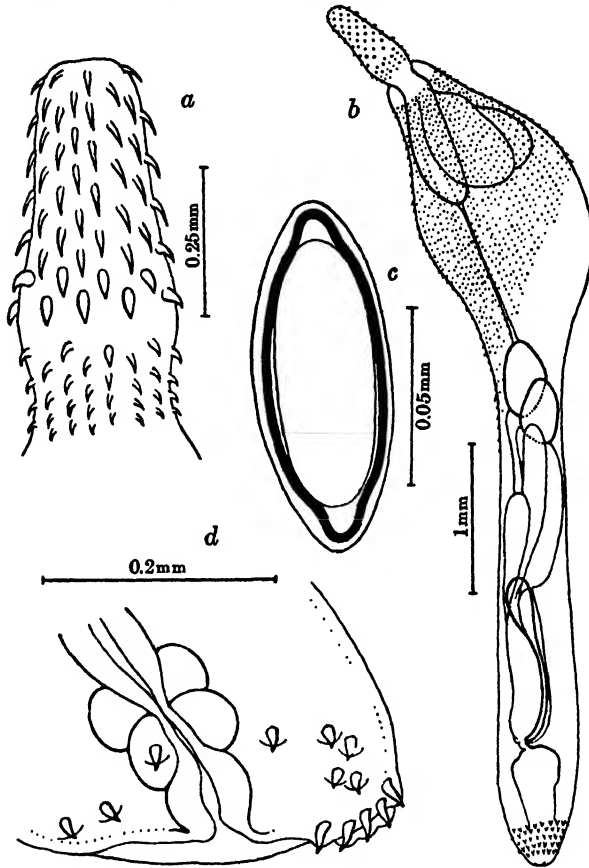


Abb. 4. *Corynosoma ambispinigerum* n. sp.

a) Proboscis b) Männchen c) Ei d) Hinterkörper des Weibchens.

***Corynosoma ambispinigerum* n. sp.\* (Abb. 4).**

Körper bei den konservierten Exemplaren milchweiss, bei beiden Geschlechtern etwa 6 mm lang, keulenförmig, vorderes Drittel erweitert, der dahinter liegende Teil fast zylindrisch. Der dicke Vorderkörper ist nach vorn stark verschmälert und ziemlich ventral geneigt, zeigt aber niemals eine kreisförmige Abflachung dieses Körperteils, wie bei *C. strumosum*.

Bestachelung des Körpers auf der Dorsalfäche ausschliesslich auf den

\* Bezüglich dieser Species und ihres Namens mache ich im voraus auf den dieser Mitteilung angefügten Nachtrag aufmerksam.

vorderen Kegel des bulbösen Vorderkörpers beschränkt, dagegen auf der Bauchfläche bis zum hinteren Hoden reichend. Die Länge der Stacheln beträgt 26 bis 30  $\mu$ .

Das Hinterende des Körpers beim Männchen mit einigen (meist 5) Querreihen von Stacheln, wie bei *C. strumosum*, und auch beim Weibchen mit vielen zerstreuten Stacheln rund um die Geschlechtsöffnung. Die Länge der Stacheln dieses Körperteiles beträgt bei beiden Geschlechtern etwa 30  $\mu$ .

Proboscis subzylindrisch, im Beginn des hinteren Drittels etwas erweitert, etwa 0.6 mm lang, 0.25 mm breit (im Maximum); Proboscishaken in 18 Längsreihen, zu je 10 oder 11. Auf dem erweiterten Teile sind die Proboscishaken in eine vordere und eine hintere Gruppe gesondert; vordere Gruppe mit stets 6 Haken in einer Reihe, welche von vorn nach hinten allmählich grösser und stärker werden; die Haken der hinteren Gruppe stehen in gleichen Linien mit jenen der vorderen Gruppe, werden aber rasch kleiner als die letzteren; die Zahl der Haken in einer Längsreihe schwankt zwischen 4 und 5.

Dimensionen der Haken einer Längsreihe (Länge in  $\mu$ ).

Haken von vorn nach hinten	Vordergruppe						Hintergruppe			
	H <sub>1</sub>	H <sub>2</sub>	H <sub>3</sub>	H <sub>4</sub>	H <sub>5</sub>	H <sub>6</sub>	H <sub>1</sub>	H <sub>2</sub>	H <sub>3</sub>	H <sub>4</sub>
Freier Hakenteil	55	58	58	58	58	70	42	41	41	40
Wurzelteil	35	40	40	50	50	75	—	—	—	—

Hals sehr kurz, keulenförmig, 0.26 mm lang, an der Rüsselbasis 0.18 mm breit. Proboscis-Receptaculum fast zylindrisch, etwa 1 mm lang, 0.3 mm breit; Hirnganglion in der Mitte. Lemniskiten blattförmig, stark abgeplattet, die Rüsselscheide kaum überragend.

Hoden am Beginn des mittleren Drittels, dort wo die ventrale Bestachelung aufhört, schräg neben und hintereinander gelagert; Zementdrüsen 6, paarig, schlauchförmig, mit langem Stiel; Markbeutel birnförmig, gleichfalls mit langem Stiel.

Uterus und Uterusglocke 1.25 mm lang; geburtsreife Eier 0.1 mm lang, 0.04 mm breit.

Wirt: *Phoca* sp.—im Dünndarm. Verbreit.: Nordpazifik (Japan).

Zwischenwirt: *Sciaena schlegeli* (BLEEKER).

Unsere neue Species zeigt in mehreren Punkten Ähnlichkeit mit *C. strumosum*, so besonders in der Bewaffnung des Rüssels. Die beiden

wichtigsten Unterschiede bestehen darin, dass bei der neuen Species der Vorderkörper niemals eine bestachelte Scheibe, sondern nur eine Spindel bildet, und dass die Umgebung der weiblichen Geschlechtsöffnung viele zerstreute Stacheln trägt.

**Larvenstadien:** *Corynosoma*-Arten sind als Larvenstadien häufig in Seefischen gefunden worden. Ich habe während meines Aufenthalts in Ōnuki (Prov. Hitati) im Sommer 1927 auf dem Mesenterium von *Sciaena schlegeli* enzystierte *Corynosoma*-Larven gesammelt, deren grösste Exemplare etwa 3.0 mm in der Länge massen.

Obgleich diese Larven im Zustande mit stark eingestülpter Proboscis gefunden wurden, erwies die nähere Untersuchung, dass die Proboscisbewaffnung und auch die Bestachelung des Leibesendes bei beiden Geschlechtern vollkommen mit *C. ambispinigerum* übereinstimmen.

Es ist somit sicher, dass *Sciaena schlegeli* (BLEEKER) als ein Zwischenwirt von *C. ambispinigerum* fungiert.

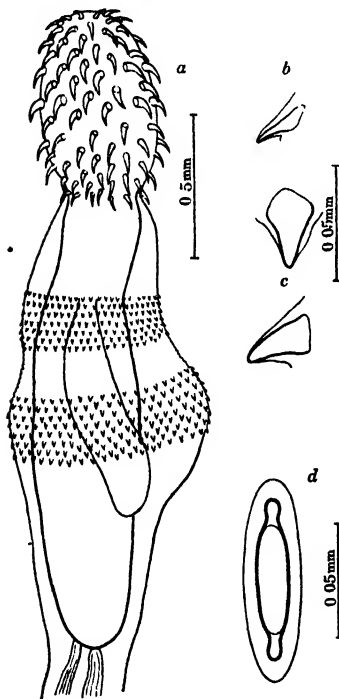


Abb. 5

*Bolbosoma thunni* n. sp.

- a) Vorderkörper des Weibchens  
b) u. c) Bulbusstacheln  
d) Ei

### ***Bolbosoma thunni* n. sp. (Abb. 5).**

Rumpf im Leben orangerot gefärbt, ♀ 8 bis 9.5 mm lang, 0.4 mm breit, dorsal stark gewölbt.

Proboscis länglich oval, Länge 0.65 mm, Breite etwa in der Mitte 0.4 mm und an der Basis 0.27 mm; Proboscishaken in 16 bis 19 (meist 18) Längsreihen, meist zu je 8 Haken, quincunxial.

#### Dimensionen der Haken in einer ventralen Längsreihe.

Haken von vorn nach hinten	H <sub>1</sub>	H <sub>2</sub>	H <sub>3</sub>	H <sub>4</sub>	H <sub>5</sub>	H <sub>6</sub>	H <sub>7</sub>	H <sub>8</sub>
Länge in $\mu$	86	88	100	120	78	86	86	76
Breite an der Basis in $\mu$	20	23	32	40	22	20	18	17

Proboscis-Receptaculum lang, zylindrisch, 1.5 mm lang, 0.36 mm breit, doppelwandig; Hirnganglion etwa in der Mitte.



Lemniskien lappenförmig, an der Halsbasis, also am vorderen Rande der Bulbusbestachelung inseriert, 0.75 mm lang, 0.17 mm breit.

Hals kegelförmig, 0.33 mm lang. Vorderrumpf, soweit sich das Proboscis-Receptaculum erstreckt, erheblich verdickt (etwa 0.9 mm breit) und einen Bulbus bildend. Bulbusbestachelung in zwei Ringen, der vordere schmaler, aus kleineren Stacheln bestehend, der hintere wenig breiter, durch einen unbestachelten Bulbusteil von dem vorderen Ringe getrennt, aus grösseren Stacheln gebildet, und den dicksten Bulbusteil einnehmend. Die Länge der Stacheln beträgt im vorderen Ringe meist  $26\mu$ , im hinteren  $35\mu$ .

Drei Exemplare trugen annähernd geburtsreife Eier, welche 80 bis  $88\mu$  in der Länge, 24 bis  $26\mu$  in der Breite massen.

Wirt: *Thunnus thynnus* (L.)—im Darm. Verbreit.: Meeresgebiet von Japan.

Diese neue Species steht *Bolbosoma vasculosum* (RUD.) sehr nahe, unterscheidet sich aber sofort durch die Kleinheit der Lemniskien.

### ***Acanthocephalus lucidus* VAN CLEAVE 1925 (Abb. 6).**

(Syn. *Acanthocephalus artatus* VAN CLEAVE 1925)

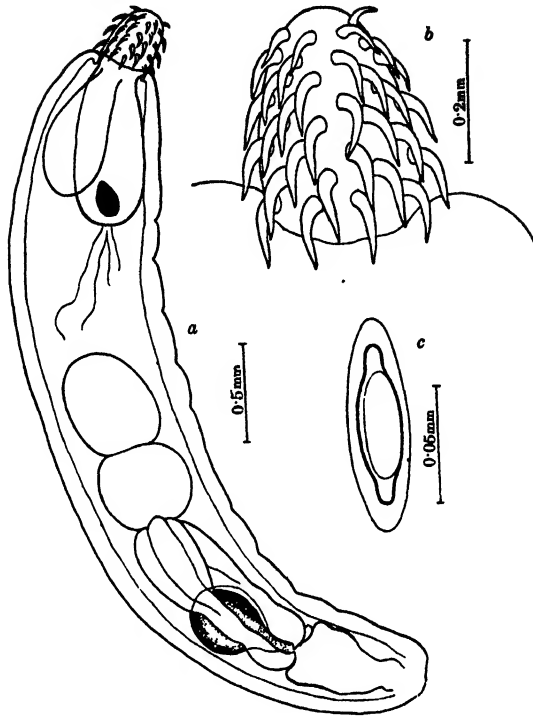
Körper ventral gekrümmt, vorn wenig breiter als hinten; ♀ 9 bis 17 mm lang, 0.9 mm breit; ♂ 4 mm lang, 0.6 mm breit.

Proboscis kurz, mit gerundetem Scheitel, 0.3 bis 0.4 mm lang, 0.25 mm breit. Haken in 12 bis 16 (meist 14) Längsreihen, meist 4 seltener 5 in einer Reihe, von vorn nach hinten allmählich länger werdend, in jeder Reihe der der Basis zunächst stehende beim ♀ etwas länger, beim ♂ wenigstens nicht kürzer, als der unmittelbar vorhergehende.

Dimensionen der Proboscishaken einer dorsalen Längsreihe  
(Länge in  $\mu$ )

Haken von vorn nach hinten	H <sub>1</sub>	H <sub>2</sub>	H <sub>3</sub>	H <sub>4</sub>
Weibchen	95	110	118	125
Männchen	70	83	90	90

Hals sehr kurz; Proboscis-Receptaculum etwa 0.85 mm lang, 0.4 mm breit; Hirnganglion im Grunde der Rüsselscheide. Lemniskien wenig

Abb. 6. *Acanthocephalus lucidus* VAN CLEAVE 1925

a) Männchen b) Proboscis des Weibchens c) Ei.

kürzer als das Proboscis-Receptaculum,\* etwa 0.7 mm lang, 0.3 mm breit, blattförmig.

Testes am Beginn der hinteren Hälfte des Rumpfes, hintereinander; Zementdrüsen schlauchförmig, jederseits 3 in gleicher Höhe.

Geburtsreife Eier etwa 80 bis 100 $\mu$  lang, 20 bis 26 $\mu$  breit.

Wirt: *Rana japonica*—im Darm.

Verbreit.: Prov. Sinano, Simōsa und Musasi (Japan).

Im Jahre 1925 berichtete H. J. VAN CLEAVE über zwei neue *Acanthocephalus*-Arten, *A. lucidus* und *A. artatus*, aus Japan. Das Wirtstier war gleicherweise *Rana japonica*. Die beiden von VAN CLEAVE beschriebenen Species stehen, wie der Autor selbst angibt, einander so nahe, dass zwischen ihnen eine klare Grenze auf Grund der Proboscisbehakung nicht festzustellen ist. Die Proboscishaken variieren sehr erheblich nach

\* In diesem Punkt stimmt VAN CLEAVE's Beschreibung mit seiner Abbildung nicht überein.

Zahl, Stellung, Grösse, und auch nach dem Geschlecht. Was die Grösse der Eier betrifft, so beträgt sie bei meinen Exemplaren (im konservierten Zustande) 80 bis 100 $\mu$  in der Länge und 26 $\mu$  in der Breite, füllt also die Lücke zwischen den von VAN CLEAVE angegebenen Grössenmaassen seiner beiden Species. LÜHE fand auch bei dem in europäischen Amphibien schmarotzenden *Acanthocephalus ramae*, dass die Proboscisbehakung erheblich variiert. Eine parallele Erscheinung scheint bei der japanischen Art vorzuliegen.

***Acanthocephalus echigoensis* FUJITA 1920 (Abb. 7).**

(Syn. *A. oncorhynchi* FUJITA 1921, *A. aculeatus* VAN CLEAVE 1931,

*A. acerbus* VAN CLEAVE 1931).

Rumpf bei den konservierten weiblichen Exemplaren unregelmässig geringelt, 5 bis 12 mm lang, 0.6 bis 1 mm breit; die  $\delta$  viel kleiner, 2.2 bis 4 mm lang, 0.5 mm breit. Proboscis zylindrisch, etwa 0.6 mm lang, 0.15 bis 0.2 mm breit; Proboscishaken nach Zahl, Stellung und Grösse erheblich variierend, in 10 bis 13 Längsreihen, zu je 6 bis 10 Haken. Bei 14 Exemplaren ( $\varnothing$  8,  $\delta$  6) konnte ich mit völliger Sicherheit folgende Zahlen der Längsreihen feststellen:

Zahl der Längsreihen	10	11	12	13	Summe
Weibchen	1	3	3	1	8
Männchen	1	4	1	0	6
Summe	2	7	4	1	14

Auch die Grösse der Haken erheblich variabel, besonders nach dem Geschlecht, die vordersten Proboscishaken aber niemals kleiner als die übrigen. Bei allen Haken ist der Wurzelteil vorn nicht gegabelt, viel kleiner als der freie Hakenteil, die beiden Teile annähernd parallel gerichtet.

**Dimensionen der Proboscishaken einer Längsreihe (Länge in  $\mu$ ).**

Haken von vorn nach hinten		H <sub>1</sub>	H <sub>2</sub>	H <sub>3</sub>	H <sub>4</sub>	H <sub>5</sub>	H <sub>6</sub>
Hakenlänge (vom Vorderrand der Basis bis zur Spitze des freien Hakenteils)	$\delta$	64	56	56	52	47	30
	$\varnothing$	94	92	75	68	54	44
Wurzelteil	$\varnothing$	64	64	64	55	50	32

Hals sehr kurz, keulenförmig, etwa 0.2 mm lang. Proboscis-Receptaculum zweiwandig, seine Länge und Breite von dem Grade der Rüsselretraktion abhängig; bei starker Retraktion etwa 0.7 mm lang und 0.23 mm breit, bei maximaler Entfaltung etwa 0.5 mm lang, 0.17 mm breit. Hirnganglion im Grunde des Proboscis-Receptaculums. Lemniskiten blattförmig, 0.43 mm lang, 0.25 mm breit.

Testes verhältnismässig gross, dicht zusammengedrängt, der vordere in Berührung mit dem Hinterende der Rüsselscheide. Zementdrüsen 6, in 3 Paaren, kugelig, jede mit einem langen Ausführungsgang.

Uterus und Uterusglocke etwa 1 mm lang; geburtsreife Eier sehr schlank, im Maximum 106 bis 115  $\mu$  lang, 19  $\mu$  breit.

Wirte: *Oncorhynchus keta*, *O. nerka*, *O. adonis* und *Salmo irideus*.

Verbeit.: Prov. Etigo, Sinano, und Hokkaido.

Aus Salmoniden von Japan wurden bisher 4 Arten des Genus *Acanthocephalus*, nämlich *A. echigoensis*, *A. oncorhynchi*, *A. aculeatus* und *A. acerbus*, berichtet. Meine Untersuchung von 14 Exemplaren aus dem Kizaki-See (Wirt: *Oncorhynchus adonis*) ergab, wie oben berichtet, dass die Proboscisbehakung erheblich variiert. Obgleich ich die von VAN CLEAVE für *A. aculeatus* angegebene Mindestzahl von 8 Längsreihen bei meinen Exemplaren nicht bestätigen kann, so passen doch meine Befunde in Bezug auf die Proboscisbewaffnung (Zahl der Längsreihen, sowie der Haken in einer Längsreihe) auf alle die obigen 4 Arten in gleicher Weise.

Was die Eier betrifft, so gibt VAN CLEAVE  $71 \times 12 \mu$  für *A. aculeatus* und  $82 \times 15 \mu$  für *A. acerbus* an, während bei meinen Exemplaren die Grösse der geburtsreifen Eier, ohne Rücksicht auf die Zahl der Längsreihen der Proboscishaken, im Maximum  $115 \times 19 \mu$  betrug.

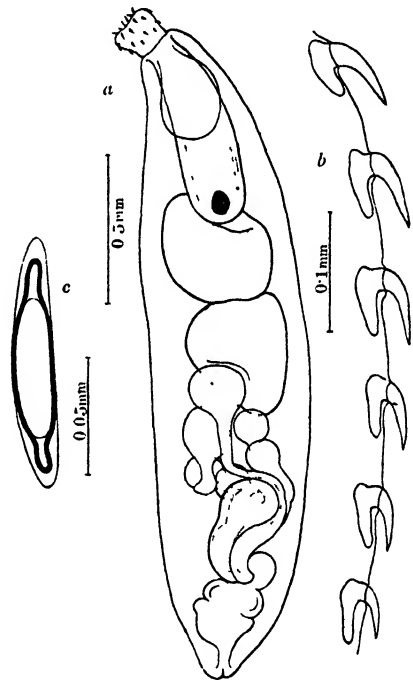


Abb. 7

*Acanthocephalus echigoensis* FUJITA 1920

a) Männchen mit eingestülptem Russel

b) Proboscishaken c) Ei

Es erscheint demnach meines Erachtens als sehr wahrscheinlich, dass die Proboscisbehakung der Acanthocephalen aus den japanischen Salmoniden nach Zahl, Stellung und Grösse erheblich variiert, und dass die bisher als getrennt betrachteten 4 Arten in Wirklichkeit zu einer einzigen Art, *Acanthocephalus echigoensis*, zusammengefasst werden müssen.

### **Spirorhynchus n. g.**

Mittelgrosse Acanthocephalen; Hals sehr lang, fast zylindrisch, spiralig gewunden, Halsbulbus nicht vorhanden; Proboscis kolbenförmig, Proboscis-Receptaculum an der Proboscisbasis inseriert, durch die ganze Länge des Halses laufend und mit einem keulenförmigen Endabschnitt in den vorderen Teil des Rumpfes reichend, doppelwandig; Hirnganglion etwa in der Mitte des keulenförmig erweiterten Endabschnitts des Proboscis-Receptaculums. Lemniskiten nicht vorhanden.

Parasitisch im Darm von Meeresfischen.

*Systematische Stellung der Gattung Spirorhynchus:* Da in der bisherigen Acanthocephalen-Literatur ähnliche Verhältnisse noch nicht beschrieben wurden, entstehen für die Einreihung dieser neuen Gattung in das System gewisse Schwierigkeiten. Sie ist ausgezeichnet insbesondere durch die aussergewöhnliche Länge des Halses und der Rüsselscheide im Vergleich mit dem Rumpfe, sowie durch das vollkommene Fehlen der Lemniskiten. Nach der lateralen Lagerung der Hauptlängsgefässe des Lakunensystems ist sie zur Ordnung Palaeacanthocephala MEYER 1931 zu stellen, obgleich ihr die Rumpf- und Halsbestachelung fehlt.

Im allgemeinen Habitus, weiter in der Art ihres Parasitismus zeigt diese Gattung Ähnlichkeit mit *Pomphorhynchus*; doch sind bei letzterer sowohl Halsbulbus wie Lemniskiten vorhanden.

Es scheinen demnach ausreichende Gründe zu bestehen, um auf unsere so stark differenzierte Gattung eine neue Familie zu errichten.

### **Spirorhynchidae n. fam.**

Palaeacanthocephalen mit ansehnlich langem, schlankem, spiral gewundenem Hals; Halsbulbus fehlt selbst im erwachsenen Zustande; Proboscis kolbenförmig; Lemniskiten nicht vorhanden. Haut mit zahlreichen, kleinen Kernfragmenten; Hauptlängsgefässe des Lakunensystems lateral verlaufend.

**Spirotrhynchus alemniscus** n. sp. (Abb. 8 u. 9).

Im lebenden Zustande Rumpf orange-gelb, Hals subtransparent. Der spiral gewundene Hals kommt bei der Verankerung in der Darmwand des Wirtes auf deren peritoneale Seite zu liegen.

Rumpf bei beiden Geschlechtern gleich gross, vorn ziemlich stark erweitert, im Maximum etwa 6 mm lang, 1.1 mm breit. Vorderrumpf geht sehr rasch in den schlanken Hals über, letzterer sehr lang, vorn und hinten stark verjüngt, etwa 8 mm lang, im Maximum 0.7 mm breit.

Proboscis kolbenförmig, vordere Hälfte kugelig angeschwollen, 0.7 mm lang, im Maximum 0.35 mm breit; Haken sehr klein, meist in 11 Längsreihen zu je 11; Haken 2 und 3 in jeder Reihe dick und kurz ( $24\mu$  lang, an der Basis  $16\mu$  breit), die anderen bedeutend schlanker ( $28-35\mu$  lang, an der Basis  $12\mu$  breit); Wurzelfortsätze nicht vorhanden.

Proboscis-Receptaculum sehr lang und schlank, sein keulenförmiges Hinterende im vorderen Rumpfteile gelegen.

Lemniscen nicht vorhanden.

Hoden etwa in der Mitte des Rumpfes, hintereinander liegend. Zementdrüsen in Berührung mit dem hinteren Hoden, 6 an der Zahl; ihre



Abb. 8

*Spirotrhynchus alemniscus*

n. sp.

Rechts Männchen,  
links Weibchen.

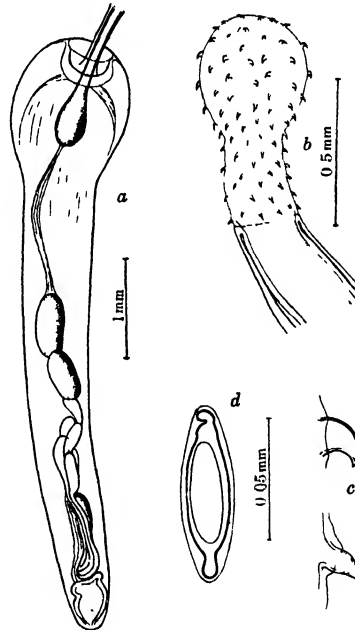
Vergr.  $\times 3$ 

Abb. 9

*Spirotrhynchus alemniscus* n. sp.

a) Rumpf des Männchens

b) Proboscis

c) Proboscishaken

d) Ei

Ausführungsgänge vereinigen sich, am Hinterende der Genitalscheide zusammentreffend, zu einem gemeinsamen Kanal.

Geburtsreife Eier mit sehr zarter Aussenhülle, welche schon im Darmkanal des Wirtes häufig zerbricht,  $79\mu$  lang,  $23\mu$  breit.

Wirt: *Scatophagus argus* (BLOCH) und *Lutianus russelli* (BLEEKER).

Verbreit.: Formosa (Japan).

### **Macracanthorhynchus hirudinaceus (PALLAS 1781).**

Die von mir untersuchten Exemplare stimmen im grossen und ganzen mit den Angaben von TRAVASSO (1917) und MEYER (1932) überein. Der wichtigste Unterschied besteht darin, dass bei den grössten Exemplaren die beiden Testes nicht länglich-oval sind, sondern vielmehr eine lang gestreckte zylindrische oder gurkenähnlich gestaltete Form (12–17 mm in der Länge, etwa 1.5 mm in der Breite) besitzen, wie F. KAISER (1893) für seine Exemplare (*Echinorhynchus gigas*) angibt.

Wirt: *Sus scrofa domesticus*.

Verbreit.: Formosa (Japan).

### **Nachtrag:**

T. FUJITA errichtete im Jahre 1921 auf Larvenstadien, welche im Mesenterium von *Osmerus lanceolatus* MAJIMA aus Hokkaido gefunden wurden, die Art *Corynosoma osmeri*, und hatte vor kurzem die Freundlichkeit, mir einige Exemplare seiner Species zu überlassen, für welche ich ihm auch hier danken möchte.

Nach Wirttier und Fundort stimmen diese Exemplare mit den Angaben FUJITA's überein, dagegen erwies die genaue Untersuchung, dass sie in ihren wichtigsten Merkmalen von der Beschreibung FUJITA's abweichen, und mit meinem *Corynosoma ambispinigerum* identisch sind.

Nach FUJITA sollen die Proboscishaken von *Corynosoma osmeri* in 10–12 Längsreihen zu je etwa 28 Haken stehen; bei den von mir untersuchten Stücken stehen sie sicher in 18 Längsreihen zu je 10–11 Haken, wie dies bei *C. ambispinigerum* der Fall ist.

In diesem Zusammenhang muss ich darauf aufmerksam machen, dass die Proboscis der Acanthocephalen, solange sie als Larvenstadien im Zwischenwirt enzystiert sind, immer stark retrahiert ist, und deshalb die Feststellung der Proboscis-Bewaffnung dieser Stadien grosse Schwierigkeiten bietet, und neben peinlichster Genauigkeit auch reichliche Übung voraussetzt.

Ein weiterer wichtiger Punkt, in welchem diese Exemplare mit *C. ambispinigerum* übereinstimmen, findet sich in der Bestachelung am Hinterende des Weibchens, auf welche FUJITA in seiner Beschreibung nicht aufmerksam macht.

Aus diesen Gründen scheint es mir notwendig, *C. ambispinigerum* HARADA als Synonym zu *C. osmeri* FUJITA 1921 zu stellen, zugleich aber FUJITA's Species-Diagnose nach meiner Beschreibung von *C. ambispinigerum* zu emendieren und zu ergänzen.

Taihoku, 7. März 1935.

### Literaturverzeichnis.

- BAYLIS, H. A. 1933. On some parasitic worms from Java, with remarks on the Acanthocephalan genus *Pallisentis*. Ann. Mag. Nat. Hist. 12, 70: 443-449.
- BHALERAO, G. D. 1932. On a new Species of Acanthocephala from *Ophiocephalus striatus*. Ann. Mag. Nat. Hist. 10, 7: 569-573.
- FUJITA, T. 1920. On the Parasites of Japanese Fishes. I. Acanthocephala. Dôbutu-gaku-Zasshi. Vol. 32: 275-283.
- 1921. On the Parasites of Japanese Fishes. II. Ibid. 33: 1-8.
- KAISER, E. 1893. Die Acanthocephalen und ihre Entwicklung. Biblioth. Zool., 7: 1-137.
- LÜHE, M. 1911. Acanthocephalen.—In BRAUER's Süßwasserfauna Deutschlands. H. 16. Jena.
- 1912. Zur Kenntnis der Acanthocephalen. Zool. Jahrb. Suppl.-Bd. 15: 271-306.
- MEYER, A. 1931. Neue Acanthocephalen aus dem Berliner Museum. Begründung eines neuen Acanthocephalensystems auf Grund einer Untersuchung der Berliner Sammlung. Zool. Jahrb., Syst. Bd. 62: 53-108.
- 1932. Acanthocephala.—In: BRONN's Klassen und Ordnungen des Tierreichs. Bd. IV, 2 Abt., 2 Buch.
- THAPAR, G. S. 1930. On *Farsandia*, a new genus of Acanthocephalid worms, from the intestine of *Ophiocephalus marulius*. Ann. Mag. Nat. Hist. 10, VI: 76-81.
- VAN CLEAVE, H. G. 1921. Acanthocephala collected by the Swedish Expedition to the Juan Fernandez Islands (1916-1917). The Natural History of Juan Fernandez and Ester Island, Vol. III.
- 1925. Acanthocephala from Japan. Parasit. Vol. 17: 149-156.
- 1928. Acanthocephala from China. I. New Species and new Genus from Chinese Fishes. Parasit. Vol. 20: 1-9.
- 1931. Acanthocephala from Japan. II. Two new Species of the Genus *Acanthocephalus*. Annot. Zool. Japon., Vol. 13: 33-37.





# ORTHOPTERA OF THE JAPANESE EMPIRE\*

## (Part IV)

### PHASMIDAE

(Plates IV [I]—X [VII] and 9 Text-figures)

**Tokuichi SHIRAKI**

(Accepted for publication, January 10, 1934)

Back in 1911, I published a short monograph of our Phasmids, under the title of "Phasmiden und Mantiden Japan". Since then I have been to Europe and America twice, and have had very good opportunities to study on numerous types of this family, especially in the British Museum, and the Natural History Museum of Wien. These results would seem to indicate that the several great systematic studies on the Phasmidae published up to the present are probably non-natural, or rather unscientific ones, and that more detailed morphological studies are very important for Taxonomy.

In the present study I have discovered many uncertain points by which it is possible to separate the species, in the form of genitalia, the degree of dentation, the relative length or width, etc., which were generally used by many systematists. In this work, I took, therefore, even a slight character for a specific difference, especially in the Subfamily Pachymorphinae. The material forming the base of the present paper is almost entirely contained in the collections of the Entomological Laboratory of the Taihoku Imperial University, and of the Section of Economic Zoology of the Government Research Institute, Formosa.

Key to the Subfamilies found in the Japanese Empire.

1. Four posterior tibiae with distinct triangular apical furrow beneath  
..... Division I. AREOLATAE  
Prosternum with two tubercles; antennae much longer than the front  
femora ..... Subfam. *Therameninae*, KARNY
11. Four posterior tibiae without distinct triangular apical furrow .....

Part I. Gryllotalpidae and Gryllidae, *Insecta Mats. Japan*, VI, 4 (1930).

Part II. Blattidae, *Insecta Mats.*, V, 4 (1931).

Part III. Mantidae, *Trans. Nat. Hist. Soc. Formosa*, XXII, no. 120 (1932).

- ..... Division II. ANAREOLATAE
2. Wings wanting; median segment very short, transverse or a little longer than wide.
3. Antennae distinctly shorter than the front legs ..... Subfam. *Pachymorphinae*, KARNY
33. Antennae longer than or as long as the front legs ..... Subfam. *Prisomerinae*, KARNY
22. Wings present; median segment longer than or as long as wide.
3. Antennae distinctly shorter than the front legs ..... Subfam. *Phibalosominae*, REDTENBACHER
33. Antennae longer than the front legs ..... Subfam. *Necrosiinae*, REDTENBACHER

Subfam. **Therameninae**, KARNY (1923)

*Obriminae*, REDTENBACHER

Two genera found in our country are determined as in the following key:

1. Prosternum with two distinct protuberances; first joint of antennae armed with no spine-like process ..... *Hoploclonia*, STÅL
11. Prosternum without protuberance; first joint of antennae armed with spine-like processes ..... *Datames*, STÅL

Genus **Hoploclonia**, STÅL

Bihang Svenska Akad., II, 17, p. 8 (1875).

*Pachymorpha* (pt.), WESTWOOD, Cab. Orient. Ent., p. 78 (1847).

*Acanthoderus* (pt.), WESTWOOD, Cat. Phasm., p. 48 (1859).

Only one species, found in Kotosho, Formosa.

1. *Hoploclonia draconina*, WESTWOOD

*Pachymorpha draconina*, WESTWOOD, Orient. Ent., p. 78, pl. 38, fig. 5 (1847).

*Acanthoderus draconinus*, WESTWOOD, Cat. Phasm., p. 51 (1859).

*Tisamenus draconinus*, KIRBY, Syn. Cat. Orth., I, p. 399 (1904).

*Hoploclonia draconina*, BRUNNER VON WATTENWYL, Phasmiden, p. 45, pl. 1, fig. 9 (1906).

Hab. Formosa—Kotosho.

Philippines; Borneo.

A single female (collected in Kotosho) is found in our collection, it is however very doubtful.

Genus **Datames**. STÅL

Rec. Orth., III, p. 51 (1875)

*Acanthoderus* (pt.), WESTWOOD, Cat. Phasm., p. 48 (1859).

*Acanthoderus* (pt.), BATES, Trans. Linn. Soc. London, XXV, p. 342 (1865).

Only one species found in our fauna.

1. *Datames mouhoti*, BATES

*Acanthoderus Mouhoti*, BATES, Trans. Linn. Soc., XXV., p. 342 (1865).

*Datames mouhoti*, STÅL, Rec. Orth., III., p. 93 (1875).

Hab. Japan—Okinawa; Yayeyama (XI).

Formosa—Taihoku (V); Horisha (IV); Koshun (IV).

Cambodja; China.

The coloration varies from greyish brown to ash-grey.

Subfam. **Pachymorphinae**, KARNY (1923)

*Clitumninae*, REDTENBACHER

Key for the genera found in our country.

1. Ninth tergite in female truncate or emarginate; supra-anal plate in female very short *Baculum*, DE SAUSSURE
11. Ninth tergite in female long, acuminate or shortly emarginate; supra-anal plate in female very long.
2. Ninth tergite in female emarginate; supra-anal plate in female very long, forming an operculum, never fused with the preceding tergite *Entoria*, STÅL.
22. Ninth tergite in female very long and acuminate; supra-anal plate in female very long, but fused with the ninth tergite *Rhamphophasma*. BRUNNER VON WATTENWYL

Genus **Baculum**, DE SAUSSURE

Mém. Soc. Geneve, XX, p. 292 (1870).

*Cuniculina*, BRUNNER VON WATTENWYL, Phasmiden, p. 196 (1907).

*Clitumnus*, STÅL. Bihang Svenska Akad., III, p. 8 (1875).

Genotype: *cuniculus*, WESTWOOD

Two species, found in the Japanese Empire, are distinguished by the following table:

1. Head in female with spines.

2. Four posterior femora more or less dentate beneath

*irregulariter-dentatum*, BRUNNER VON WATTENWYL

22. Four posterior femora with one pair of triangular apical lamellae beneath ..... *formosanum*, sp. nov.  
 11. Head in female without spines . . . . . *granulatus*, sp. nov.

1. *Baculum irregulariter-dentatum*, BRUNNER VON WATTENWYL.

*Cuniculina irregulariter-dentata*, Br. v. W., Phasmiden, p. 202, ♀ (1907).

Hab. Japan.

Type in the Natural History Museum of Paris.

2. *Baculum formosanum*, sp. nov. Pl. IV [I] (Figs. 1 & 2).

♀. Large species; distinguished by the non-serrate upper side of femora, by the large bidentulate ventral basal lamella of the four posterior femora, and by the two long spines of head.

Head longer than the prothorax, with a distinct median suture which does not reach to the middle, and with two large spines between the eyes, just behind the spines there is a pair of small but somewhat conspicuous rounded foveoles. Eyes small but prominent, rounded. Basal joint of antennae longer than the spines of head,  $2\frac{1}{2}$  times as long as wide, nearly parallel-sided, very slightly narrowed at the tip, depressed but more or less inflated apically, with a distinct lateral edge.

Pronotum rather smooth, very little longer than wide, more or less saddle-shaped, with the posterior margin rounded and with the anterior margin more or less truncate; the median longitudinal suture distinct, but its posterior end conspicuously carinate; the transverse suture well-marked and placed in the middle, very slightly curved, nearly reaching the lateral margins; on the posterior half of the pronotum there is a pair of the distinct submedian sulci which diverge behind, while on the anterior half there are also a pair of parallel lateral sulci. Mesonotum about 6 times as long as the pronotum, moderately dilated behind, finely granulate throughout, with a distinct but fine longitudinal median and indistinct lateral carinae, the latter being formed of some granules. Metanotum (with median segment) about  $\frac{2}{3}$  as long as the mesonotum, very slightly narrowed in the median part, finely granulate, with median and lateral carinae as in the mesonotum; median segment distinctly shorter than wide, much less granulate than in the metanotum-proper, with a very fine longitudinal median carina and a pair of median crescent foveoles which are placed in the middle.

Abdomen very finely granulated and with a very fine longitudinal median sulcus, longer than the head and thorax together, in the four basal tergites slightly increasing and in the apical five tergites distinctly decreas-

ing in length apically; fifth tergite as long as the fourth; 9th tergite a little longer than the preceding one, triangularly emarginate, with the short triangular lateral lobes which are pointed and extended to the tip of the supra-anal plate; supra-anal plate distinct but short, with a distinct longitudinal median carina and the rounded apical margin; sixth sternite with a rather large apical elevation; subgenital operculum long, exceeding the tip of the supra-anal plate, cymbiform, with the apex rounded.

Legs rather short and thick; anterior femora and tibiae a little shorter than the prothorax, without serration or dentation, the tibiae being slightly longer than the femora; four posterior femora shorter than the anterior pair, with a pair of large somewhat triangular infero-apical lamellae which are bidentate along the posterior half of the margin, and without any serration or dentation above; four posterior tibiae with a conspicuous infero-basal lamella which is not serrate nor dentate.

Length of body	♀ 130.0 mm.
.. .. pronotum	4.5 mm.
.. .. mesonotum	29.0 mm.
.. .. metanotum (with median segment)	21.0 mm.
.. .. median segment	3.0 mm.
.. .. anterior femora	26.0 mm.
.. .. median femora	19.0 mm.
.. .. posterior femora	22.0 mm.
.. .. 9th tergite	3.9 mm.
.. .. subgenital operculum	12.8 mm.

Hab. Formosa (Karenko VIII).

Described from only one female preserved in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

### 3. *Baculum granulatus*, sp. nov. Pl.IV [I] (Figs. 3 & 4).

Distinguished by the granulated body, the granules being very small and pointed.

♀. Very elongate, with very long and slender legs. Head very large, somewhat cylindrical but narrowed hindward, furnished with many granules which are composed of six longitudinal series, on the vertex and occiput there are also some granules; the two median series of granules slightly divergent behind, while the two lateral pairs of the intermediate series are united together into one in the posterior one-third; below the eyes there are some irregular granules. Eyes rounded, not oval, proportionally small.

Antennae short, nearly reaching to the middle of the front femora; first joint conspicuously flattened and very dilated, about twice as long as wide, more or less granulate and with a short median longitudinal carina; second joint flattened, very narrow, about  $\frac{1}{4}$  as long as the first joint and about  $1\frac{1}{2}$  times as long as wide; 3rd joint about as long as the preceding one and distinctly narrower than the latter, about  $2\frac{1}{2}$  times as long as wide. Labial palpi rather narrow, moderately flattened; first joint about as long as wide; second joint about  $2\frac{1}{2}$  times as long as the first joint and nearly as long as the apical joint, the latter is moderately cylindrical and is more or less pointed. Maxillary palpi cylindrical; the 3rd and 4th joints the same in length and a little longer than the two basal joints together; apical joint slightly longer than the preceding one, narrowly rounded at the apex.

Pronotum irregularly granulate, very much shorter than the head, very slightly longer than wide, in the middle with a transverse sulcus; on the disc with two longitudinal submedian sulci which are interrupted by the transverse sulcus, their anterior portions being parallel and the posterior portions being conspicuously divergent behind, in *formosanum* the anterior portions placed very near to the lateral carinae. Mesonotum well but irregularly granulate, moderately broadened hindward; metanotum very slightly broader than or about  $\frac{3}{4}$  as long as the mesonotum, granulate as in the mesonotum; median segment rather long but distinctly wider than long, irregularly granulate, and with two crescent foveoles just behind the middle.

Abdomen very much longer than the head and thorax together, irregularly granulate; fourth tergite longer than either the remaining tergites; 8th tergite about half as long as the 7th; 9th tergite longer than the 8th, with the apex truncate but in the middle emarginate; supra-anal plate very small, triangular, its hind margin being truncate and not exceeding the 9th tergite; 6th sternite long, nearly as long as the preceding one, its posterior margin triangularly produced behind; subgenital operculum narrow and long, moderately broadened hindward and at the apex distinctly narrowed but not pointed, moderately naviculate, as long as the 7th, 8th and 9th tergites together, and not exceeding the supra-anal plate; cerci slender, but not very long, slightly exceeding the apex of the subgenital operculum.

Legs very long; front femora a little shorter than the tibiae, the interno-superior carina serrate throughout and the externo-inferior carina furnished with many minute black teeth nearly throughout, on the intermedio-inferior carina there are no denticles, while in the four posterior femora there are some apical denticles; intermediate and hind femora very sparsely furnished with some minute denticles on all the carinae; inter-

mediate tibiae with two denticles on the antero-superior carina near the base.

Length of body	♀ 128.0 mm.
„ „ pronotum	4.2 mm.
„ „ mesonotum	26.5 mm.
„ „ metanotum	16.7 mm.
„ „ median segment	3.5 mm.
„ „ front femora	36.0 mm.
„ „ intermediate femora	22.3 mm.
„ „ hind femora	29.2 mm.
„ „ 9th tergite	3.8 mm.
„ „ subgenital operculum	12.6 mm.

Hab. Formosa—Gojo (X).

Described from only one female preserved in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

### Genus *Entoria*, STÅL

Rec. Orth., III, p. 14 (1873).

*Baculum* (pt.), KIRBY, Syn. Cat. Orth., I, p. 327 (1904).

Genotype: *denticornis*, STÅL

Key to the species.

Female.

1. Anterior femora not serrate nor dentate beneath.
2. Head without spines; subgenital operculum never exceeding the tip of the terminal tergite, or the 9th tergite nearly as long as the 8th tergite.
3. Anterior femora not serrate above; the 9th tergite apparently longer than the preceding tergite; supra-anal operculum distinctly exceeding the subgenital operculum  
*nuda*, BRUNNER VON WATTENWYL
33. Anterior femora at the base serrate above; the 9th tergite nearly as long as the preceding tergite; supra-anal operculum hardly exceeding the subgenital operculum  
*ishigakiensis*, sp. nov.
22. Head with two short or very minute spines; subgenital operculum exceeding the tip of the 9th tergite, if it is not so the 9th tergite is always very much longer than the 8th tergite.
3. Subgenital operculum exceeding the tip of the 9th tergite.
4. Very large species; intermediate tibiae without lamella



- ..... *koshunensis*, sp. nov.
44. Rather small species; intermediate tibiae with a triangular subbasal interno-superior lamella ..... *japonica*, SHIRAKI
33. Subgenital operculum not reaching to the tip of the 9th tergite ..... *okinawaensis*, sp. nov.
11. Anterior femora serrate beneath.
2. Head with two spines.
3. Four posterior tibiae with lamellae above.
4. Intermediate femora with lamellae beneath.
5. Subgenital operculum not reaching to the tip of the supra-anal operculum; the 9th tergite distinctly triangularly emarginate; supra-anal operculum suddenly narrowed apically.
6. Four posterior femora spined above.
7. Intermediate femora with two lamellate spines above ..... *domonensis*, sp. nov.
77. Intermediate femora with a small spines above ..... *formosana*, SHIRAKI
66. Four posterior femora not spined nor serrate above ..... *takaoensis*, sp. nov.
55. Subgenital operculum exceeding the tip of the supra-anal operculum.
6. Ninth tergite truncate; supra-anal operculum gradually narrowed toward the apex and strongly pointed; intermediate femora with a pair of distinct subbasal lamellae ..... *taitoensis*, sp. nov.
66. Ninth tergite triangularly emarginate; supra-anal operculum suddenly narrowed apically; intermediate femora with a single small posterior (internal) tooth ..... *longiopercula*, sp. nov.
44. Intermediate femora without distinct lamellae beneath.
5. Subgenital operculum not reaching to the tip of the supra-anal operculum.
6. Supra-anal operculum (exposed part) as long as the ninth tergite ..... *nagoensis*, sp. nov.
66. Supra-anal operculum longer than the ninth tergite ..... *kiirunensis*, sp. nov.
55. Subgenital operculum exceeding the supra-anal operculum which is about twice as long as the ninth

tergite

*magna*, SHIRAKI

33. Posterior tibiae without lamella.

4. Intermediate femora with a basal lamella; 9th tergite conspicuously emarginate, its apical lobes distinctly triangular *taihokuensis*, sp. nov.

44. Intermediate femora without lamella; 9th tergite very slightly emarginate, its apical lobes very small and sub-triangular *banshoryoensis*, sp. nov.

22. Head with two long lamellae; intermediate tibiae with one tooth above; subgenital operculum not reaching to the tip of the supra-anal operculum *shinchikuensis*, sp. nov.

Male.

1. Head with or often without two spines or granules; 9th tergite longer than  $1\frac{1}{2}$  times the length of the 8th tergite.

2. Eighth tergite as long as the 7th tergite *koshunensis*, sp. nov.

22. Eighth tergite distinctly shorter than the 7th tergite *miyakoensis*, sp. nov.

11. Head without spines or granules.

2. Pronotum with a transversal sulcus behind the middle *nuda*, BRUNNER VON WAITENWIL.

22. Pronotum with a transversal sulcus in the middle.

3. Eighth tergite nearly as long as the preceding tergite.

4. Eighth sternite distinctly longer than half the 7th tergite.

5. First joint of antennae about  $2\frac{1}{2}$  times as long as wide *ishigakiensis*, sp. nov.

55. First joint of antennae about twice as long as wide *kiirunensis*, sp. nov.

44. Eighth sternite distinctly shorter than half the 7th tergite *taitoensis*, sp. nov.

33. Eighth tergite distinctly shorter than the 7th tergite.

4. Body very strongly linear; antennae a little exceeding the tip of the front femora.

5. Median segment with two crescent foveoles distinctly behind the middle.

6. Head conspicuously narrowed behind *shinchikuensis*, sp. nov.

66. Head very slightly narrowed behind *formosana*, SHIRAKI

55. Median segment with two crescent foveoles in the

- middle ..... *taihokuensis*, sp. nov.  
 44. Body moderately linear; antennae never exceeding the tip  
 of the front femora ..... *miyakoensis*, sp. nov.

1. *Entoria nuda*, BRUNNER VON WATTENWYL.

Phasmiden, p. 208 (1907).

Hab. Japan—Oshima (probably Amami-Oshima); Ishigaki; Daito-Shima.

Formosa—Taihanroku, Kankau, Hosan.

One female and one male from Ishigaki, which are clearly identical with Brunner's Types, while many males from the Koshun-district are somewhat distinguished by the transverse sulcus of the pronotum which is placed nearly in the middle.

2. *Entoria ishigakiensis*, sp. nov. Pl. IV[I] (Figs. 5 & 6).

Very near to the preceding species, but in the female it is distinguished by the more or less serrate anterior femora and by the proportional length of the anal segments; while in the male it differs from *nuda* in the position of the transversal sulcus of pronotum.

♀. Head distinctly longer than the pronotum, distinctly longer than wide, gradually but slightly narrowed behind; occiput with 3 short longitudinal sulci, of which the median one is conspicuous; the side with two blackish stripes, extended from the eye to the posterior margin, the upper stripe being narrower than the lower one. Eyes round, never ovate (in *nuda* longer than wide), with a blackish transverse streak in the middle. Antennae reaching to the middle of the fore femora. Basal antennal joint flattened, about twice as long as wide, its base is narrow, then becomes broad toward the middle and afterwards gradually narrowed and not flattened apically; lateral margins distinctly carinate and furnished with one row of distinct but very fine hairs; the upper surface with a rather broad longitudinal carina, the latter is conspicuously narrowed just in front of the base. Second antennal joint small, somewhat cylindrical but narrowed apically, longer than wide, about  $\frac{1}{2}$  as long as the basal joint and definitely narrower than the latter; third joint cylindrical and elongate, a little narrower than or  $1\frac{1}{2}$  times as long as the second joint. Maxillary palpi cylindrical; 2nd joint very small, about half as long as the first; each of the three apical joints longer than the two basal joints together, of which the apical joint is distinctly longer and slightly narrower than the following ones and its apex is narrow and rounded. Labial palpi flattened; first

joint nearly as long as wide, slightly broadened apically; third joint more or less pointed, longer and narrower than the second joint which is longer than the first.

Pronotum about  $1\frac{1}{2}$  times as long as wide, proportionally longer than that in *nuda*; the transversal sulcus in the middle (while in *nuda* it is distinctly though only a little behind the middle), never behind the middle but often very slightly before the middle. Mesonotum very slightly broadened posteriorly, distinctly longer than the metanotum (with median segment), with a very fine median longitudinal carina which is often obsolete in its both ends. Metanotum strictly parallel-sided, longer than the head and pronotum together, with a very fine median longitudinal carina which reaches to a small median foveole situated rather far in front of the hind margin (the foveole found in nearly all the Phasmids and often elevated); median segment distinctly, though only a little, wider than long, about  $\frac{1}{2}$  as long as the metanotum, with the rather indistinct crescent foveoles in front of the middle.

Abdomen longer than the head and thorax together, gradually narrowed apically and pointed, with an indistinct very fine median carina throughout; basal tergite shorter than the following ones, but distinctly longer than either of the three apical tergites; fourth tergite longer than either of the others and shorter than the three terminal tergites together; second tergite as long as the 8th and 9th tergites together; 9th tergite very slightly longer than the 8th, triangularly emarginate in the middle so that there are two broad and short lateral lamellae; longer than the 9th, sharply pointed; subgenital operculum very long and sharply pointed, as long as the four preceding tergites together but not reaching to the tip of the supra-anal operculum.

Legs slender and long; front femora much longer than the four other femora, on the interno-superior carina with a short basal serration which is composed of two to five very short teeth; hind femora longer than the median femora and very slightly shorter than the front femora except the narrowed basal portion (in *nuda* as long as); four posterior femora with a few very small teeth on the apical portion of the inferior median carina.

♂. Very slender, linear. Head conspicuously longer than wide and distinctly narrowed behind, with two dark brown longitudinal streaks at the sides; eyes and occiput as in the female, but the former is more prominent. Antennae long, about  $\frac{3}{4}$  as long as the front femora; first joint about  $2\frac{1}{2}$  times as long as wide; second joint about  $\frac{1}{2}$  as long as the basal joint; third joint about as long as the basal joint. Palpi much more slender

than those in the female; the apical joint of the labial palpi cylindrical, with the apex narrow and rounded.

Pronotum parallel-sided, a little shorter than the head and nearly twice as long as wide, in the middle with the transverse sulcus which is never placed behind the middle (in *nuda* distinctly behind). Mesonotum very slightly broadened behind, distinctly longer than twice the head and pronotum together or the metanotum and median segment together; the median carina more distinct than in the female. Metanotum slightly narrowed in the middle; the posterior end of the median carina slightly thickened, where is no foveole; median segment long, about  $1\frac{1}{2}$  times as long as wide, with two distinct crescent-shaped foveoles just behind the middle.

Abdomen conspicuously longer than the rest of the body, slightly narrowed before the anal portion, the median carina being very indistinct throughout the whole length. Seventh and eighth tergites equal in length (in *nuda* the former distinctly longer than the latter), much shorter than the 6th tergite which is about as long as the first tergite; 9th tergite distinctly, though only a little, longer than the 7th, with the very short triangular basal portion which is usually beneath the preceding tergite, and with the very long apical portion which has a very distinct median longitudinal carina and is divided into two narrow lateral lobes in the apical half; these lobes directed obliquely beneath and slightly inwards, narrowed apically but not pointed, and furnished with many minute teeth inside the apical half. Seventh and eighth sternites equal in length (in *nuda* the eighth sternite a little longer than the preceding one), well carinate in the middle, the latter sternite being broader than the seventh; subgenital plate about  $1\frac{1}{2}$  times as long as the 8th sternite and nearly as long as the 8th tergite, naviculate, suddenly narrowed at apex, moderately pointed, not reaching the tip of the 8th tergite. Cerci laterally compressed, more or less triangular, the tip being more or less rounded.

Legs very much more slender and longer than in the female, without the serration of the front femora.

	♂	♀
Length of body	80.0–93.0 mm.	95.0–108.0 mm.
„ „ pronotum	3.2– 3.5 mm.	3.5– 4.0 mm.
„ „ mesonotum	17.5–18.3 mm.	15.0– 19.0 mm.
„ „ metanotum	11.8–12.0 mm.	10.0– 12.0 mm.
„ „ median segment	2.7– 3.1 mm.	3.5– 4.0 mm.
„ „ basal tergite	5.4– 5.8 mm.	5.5– 6.0 mm.
„ „ apical tergite	4.5– 4.6 mm.	3.8– 3.9 mm.

	(9th tergite)	(supra-anal operculum)
„ „ apical sternite	2.7– 2.8 mm.	15.5– 16.5 mm.
	(subgenital plate)	(subgenital operculum)
„ „ front femora	30.0–34.0 mm.	26.0– 33.0 mm.
„ „ median femora	20.0–23.0 mm.	16.0– 20.0 mm.
„ „ hind femora	25.6–28.8 mm.	19.6– 26.0 mm.

Hab. Japan—Ishigaki (XI)

Formosa—Mizuho (VIII)

Types preserved in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

### 3. *Entoria koshunensis*, sp. nov. Pl. V [II] (Figs. 1, 2 & 4).

The present species is very closely allied to *nuda*, Br. v. W. and *ishigakiensis*, but it may be distinguished from these two species by the very minute spines of the head and by the larger size: in the female by the very long supra-anal operculum which is as long as the two preceding tergites together, but it never exceeds the tip of the subgenital operculum; in the male by the very long 9th tergite which is more than  $1\frac{1}{2}$  times the preceding tergite. In both sexes the spines of the head are very often obsolete, and this character may be rather unstable. Beside this it is also distinguished from *nuda* by the well serrated front femora, as well as by the round eyes.

♀. Very elongate and rather robust species. Head as in *ishigakiensis*, but with two very minute granules between the eyes which are proportionally small and are about one-fifth the length measured from the hind margin of the eye to the posterior margin of the head (in *ishigakiensis* about one-fourth); the terminal joint of labial palpi as long as the second joint (in *ishigakiensis* distinctly longer), the latter is twice as long as the first joint. Antennae quite the same as those in *ishigakiensis*.

Pronotum distinctly shorter than the head, about  $1\frac{1}{2}$  times as long as wide, more or less rugose; median transversal sulcus distinctly, though only a little, before the middle. Meso- and metanotum and median segment as in *ishigakiensis*.

Abdomen proportionally long, nearly twice as long as the thorax; fourth tergite longer than either the remaining tergites; 8th tergite about half as long as the 7th and about  $\frac{3}{4}$  as long as the 9th, the latter is triangularly incised at the median apex, but the emargination is smaller than in *ishigakiensis* and its postero-lateral margin moderately undulate; supra-anal operculum very long and slender, distinctly longer than the 7th tergite.

sharply pointed; subgenital operculum very slightly cymbiform, sharply pointed, very long and slender, a little longer than the four terminal tergites together and very slightly exceeding the tip of the supra-anal operculum; cerci small, narrow, moderately pointed; ovipositor hardly reaching the tip of the subgenital operculum and distinctly reaching the tip of the supra-anal operculum.

Front femora at the basal  $\frac{1}{4}$  to  $\frac{1}{3}$  well-serrate above, about  $1\frac{1}{2}$  times as long as the intermediate femora which is conspicuously shorter than the hind femora; four posterior femora at the apex more or less serrate beneath; median tibiae often with one or two upper denticles before the middle.

Male. Much slenderer than in the female. Head distinctly narrowed behind, with two narrow blackish lateral streaks which are distinct also in some females, with two very minute spines which are often obsolete; eyes more prominent than those in *ishigakiensis*; antennae as in *ishigakiensis*. Second joint of the labial palpi fully twice as long as the first joint or shorter than the apical joint, less flattened than in the female; second joint of the maxillary palpi very slightly shorter than the first joint and about half as long as the 3rd joint, the latter is very slightly longer than the 4th but distinctly shorter than the terminal joint.

Pronotum in the hind portion distinctly broadened, with the transversal sulcus in the middle, the latter being placed never before the middle; longitudinal median sulcus rather sharply-defined. Mesonotum, metanotum and median segment as in *ishigakiensis*.

Abdomen much longer than the rest; 8th tergite very slightly shorter than the 7th, or about  $\frac{2}{3}$  as long as the 4th which is longer than either the other tergites; 9th tergite long, more than  $1\frac{1}{2}$  times as long as the 8th, with the very narrow and long apical lobes which are distinctly longer than the basal portion and are furnished with some denticles inside; subgenital plate proportionally short, more naviculate than in *ishigakiensis*, very slightly longer than the preceding sternite, the latter being about as long as the 7th sternite; cerci more slender than in *ishigakiensis*.

Legs very long and slender as usual, without the serration of femora.

	♂	♀
Length of body	95.0–104.0 mm.	125.0–134.0 mm.
„ „ pronotum	3.7– 3.9 mm.	4.9– 5.0 mm.
„ „ mesonotum	17.5– 21.0 mm.	20.0– 20.5 mm.
„ „ metanotum	12.6– 14.6 mm.	12.2– 12.3 mm.
„ „ median segment	3.0– 3.2 mm.	4.0– 4.1 mm.

„ „ basal tergite	5.5– 6.5 mm.	6.0– 6.5 mm.
„ „ apical tergite	5.5– 5.7 mm.	8.5– 9.0 mm.
	(9th tergite)	(supra-anal operculum)
„ „ subgenital plate or operculum	2.0– 2.3 mm.	22.0– 23.0 mm.
„ „ front femora	36.6– 40.0 mm.	34.0– 37.0 mm.
„ „ intermediate femora	24.7– 28.0 mm.	23.0– 23.2 mm.
„ „ hind femora	31.5– 35.0 mm.	29.0– 30.0 mm.

Hab. Formosa—Koshun (Kankau and Kuraru IV, V, VII, XI)

Types in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

#### 4. *Entoria japonica*, SHIRAKI.

Ann. Zool. Japonensis, VII, 5, p. 313, pl. XII, fig. 2 (1911).

Hab. Japan—Yoshihama (Kanagawaken, VIII)

Type in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

#### 5. *Entoria okinawaensis*, sp. nov. Pl. V [II] (Fig. 3).

♀. Very closely allied to *koshunensis*, but it is easily distinguished by the very short 8th tergite, as well as by the round-tipped supra-anal operculum.

Moderately long and slender. Head distinctly narrowed behind, with two distinct but small spines; eyes proportionally larger and much more prominent than in *koshunensis*, about  $\frac{1}{3}$  as large as the length measured from the hind margin of eye to the posterior margin of head. Antennae proportionally short; basal joint conspicuously dilated in the middle, about  $1\frac{1}{2}$  times as long as wide; second joint as long as wide and about  $\frac{2}{3}$  as long as the 3rd joint, the latter is about  $2\frac{1}{2}$  times as long as wide; 4th joint in length less than half the preceding one; 5th joint shorter than the 4th. Labial palpi rather slender; first joint about half as long as the second which is broadest and is about as long as the 3rd joint, the latter being more or less cylindrical and pointed. Maxillary palpi rather slender; two basal joints nearly same in length; each of the 3rd and 4th joints about twice as long as the 2nd; 5th joint narrower and very slightly longer than the preceding one.

Pronotum exactly the same as in *koshunensis*. Meso- and metanotum proportionally longer than in *koshunensis*; median segment as in



*koshunensis*, but the crescent foveoles in the middle.

Abdomen as in *koshunensis* but proportionally short; 7th tergite  $2\frac{1}{4}$  times as long as the 8th; 9th tergite about  $1\frac{1}{2}$  times as long as the 8th, emarginate at apex, with the apical lobes very short and broadly rounded, the lateral margins being distinctly sinuated in the apical one-third; supra-anal operculum very narrow and very slightly narrowed towards the tip, where it is pointed but not sharply, a little longer than the 9th tergite; subgenital operculum moderately naviculate, long and slender, as long as the four apical tergites together but not reaching the tip of the supra-anal operculum; cerci narrow, more or less pointed; ovipositor nearly reaching the tip of the subgenital operculum.

Legs as in *koshunensis*, but the serration of the front femora much more distinct and prominent at the basal two-thirds.

Length of body	♀ 119.0 mm.
„ „ pronotum	4.3 mm.
„ „ mesonotum	20.0 mm.
„ „ metanotum	12.7 mm.
„ „ median segment	4.0 mm.
„ „ basal tergite	6.7 mm.
„ „ supra-anal operculum	5.0 mm.
„ „ subgenital operculum	17.0 mm.
„ „ front femora	33.0 mm.
„ „ intermediate femora	20.8 mm.
„ „ hind femora	24.6 mm.

Hab. Japan—Okinawa

Described from only one female preserved in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

#### 6. *Entoria miyakoensis*, sp. nov. Pl. V [II] (Fig. 5)

♂. Allied to *nuda* and *koshunensis*, but it may be distinguished from both by the proportionally short 8th tergite; and from *nuda* by the position of the transverse sulcus of pronotum as well as by two denticles of the head, the latter character being not stable.

Head rather proportionally short and globular, with two distinct spines which are sometimes obsolete. Eyes rounded, never ovate as in *koshunensis*. Antennae not reaching to the tip of the front femora; basal joint more than twice the width, very slightly dilated in the middle; second joint about  $\frac{1}{2}$  as long as the first joint or distinctly narrower than the latter, slightly narrowed apically, as long as wide; third joint very long, about as long as

the two basal joints together, this might be very characteristic. Apical joint of the labial palpi a little longer than the second joint which is not broader than and is about twice as long as the basal joint. Maxillary palpi slenderer than the labial palpi; 2nd joint very small, about  $\frac{1}{2}$  as long as the first joint; apical joint distinctly longer than either the 3rd or 4th joints.

Pronotum distinctly broadened behind, rather a little shorter than the head; the transverse sulcus in the middle; the submedian longitudinal sulci on the front portion distinct but irregularly furrowed, distinctly extending back to the middle of the hind portion where there is no other longitudinal sulcus. Meso- and metanotum more or less blackish, with a narrow yellowish white streak between the lateral margin and the lateral carina, the latter being more or less irregular; the median carina distinct. Median segment elongate, about  $\frac{1}{2}$  as long as the metanotum, just behind the middle there is one pair of crescent foveoles which are never placed before the middle.

Abdomen linear as in other species, with the fourth tergite longest; 7th tergite much longer than the 8th tergite, its posterior margin truncate but very slightly concave; 9th tergite as long as the 7th tergite, with the proportionally short apical lobes which are shorter than the basal portion and are subtriangular; the denticles on the inside of the apical lobes of the 9th tergite very conspicuous; subgenital plate shorter than the 8th tergite, distinctly naviculate, well keeled, its posterior margin rather broadly reflected and rounded but in the middle more or less pointed; 8th sternite very short, about half as long as the following sternite or the preceding one; cerci narrow in the apical half and more or less pointed at apex.

Legs very long, without serrations excepting the four posterior femora which has the inferior median apical serration.

Length of body	97.0–102.0 mm.
.. .. pronotum	3.3– 3.6 mm.
.. .. mesonotum	19.0– 19.6 mm.
.. .. metanotum	13.7– 13.8 mm.
.. .. median segment	2.5– 2.6 mm.
.. .. basal tergite	6.2– 6.3 mm.
.. .. 9th tergite	3.8– 4.0 mm.
.. .. subgenital plate	2.5– 2.6 mm.
.. .. front femora	39.0– 40.2 mm.
.. .. median femora	26.0– 27.0 mm.
.. .. hind femora	32.0– 33.0 mm.

Hab. Japan—Loo-Choo (Miyako VI, VII)

Described from three males preserved in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa. The present species may be the male of *okinawaensis*.

7. *Entoria banshoryoensis*, sp. nov. Pl. V [II] (Figs. 6 & 7).

♀. Very closely allied to *okinawaensis*, but differs in the serration of the front femora and in the shape of the 9th tergite, as well as in the smaller eyes.

Head rather strongly narrowed behind, on the vertex with two prominent spines which are a little shorter than the diameter of eye, and on the occiput with three very deep furrows, the spines and the furrows much more conspicuous than in *okinawaensis*. Eyes small, rounded, with a distinct blackish median streak. Antennae proportionally long, reaching beyond the basal  $\frac{3}{4}$  of the front femora; first joint very dilated as in *okinawaensis* and quite similar with the latter; 2nd joint proportionally larger than in *okinawaensis*, very slightly shorter than the third joint, while in the latter species it is distinctly shorter. Labial palpi slender; first joint about  $\frac{3}{4}$  as long as the second; 3rd joint distinctly longer than the preceding joint. Maxillary palpi slenderer than the labial palpi; first joint distinctly longer than the second; 3rd joint as long as the fourth, or nearly twice as long as the second; apical joint a little longer than the preceding joint.

Pronotum quite similar to that in *okinawaensis*. Meso- and metanotum also as in *okinawaensis*, but on the surface with a few very scattered granules (in the latter species almost entirely wanting); median segment as long as wide, less than  $\frac{1}{2}$  as long as the metanotum, with the crescent foveoles just before the middle.

Abdomen proportionally long as usual but the fourth tergite is as long as the fifth; 9th tergite distinctly, though only a little, longer than the 8th which is nearly half as long as the 7th tergite, with the posterior margin distinctly emarginate and with the posterior lateral margin wavy, the apical lobes being rather triangular; supra-anal operculum very long and slender, and pointed as in *okinawaensis*, distinctly shorter than the 9th and 8th tergites together or than the 7th tergite; subgenital operculum very long and slender, moderately naviculate as in *okinawaensis*, as long as the four terminal tergites together but not exceeding the tip of the supra-anal operculum; ovipositor exceeding the subgenital operculum, but not reaching the tip of the supra-anal operculum.

Legs rather short; front femora in the basal  $\frac{2}{3}$  well serrated above and beneath, but the teeth of the serration are rather small; four posterior femora without any teeth above, and with one or two very inconspicuous median apical teeth beneath.

Length of body	110.0 mm.
„ „ pronotum	4.0 mm.
„ „ mesonotum	19.0 mm.
„ „ metanotum	12.0 mm.
„ „ median segment	3.4 mm.
„ „ basal tergite	6.3 mm.
„ „ supra-anal operculum	4.5 mm.
„ „ subgenital operculum	15.5 mm.
„ „ front femora	32.5 mm.
„ „ intermediate femora	19.5 mm.
„ „ hind femora	25.0 mm.

Hab. Formosa—Banshoryo (XI)

Described from only one female preserved in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

8. *Entoria taihokuensis*, sp. nov. Pl. V [II] (Figs. 8 & 9).

*Lonchodes nematodes*, SHIRAKI (nec. DE HAAN). Annot. Zool Japonenses II, pt. V, p. 293 (1911).

♀. Very close to the preceding species, but it distinctly differs in having the basal lamella of the four posterior femora and in the shape of the 9th tergite.

Head as in *banshoryoensis*, but the spines are much more prominent and broader than in the latter. Antennae proportionally short reaching very little beyond the middle of the front femora; first joint about twice as long as wide, broadest just after the middle, while in *banshoryoensis* it is broadest just before the middle; 2nd joint distinctly shorter than the third joint which is longer than twice the fourth joint, the latter being as long as the fifth, while in other species of *Entoria* the fifth joint of antennae is almost always distinctly shorter than the fourth. Labial palpi moderately flattened throughout the whole length; first joint half as long as or nearly as broad as the second joint, the latter is nearly as long as the third joint which is not cylindrical. Maxillary palpi nearly as broad as the labial palpi; the proportional length of either of the four basal joints as in *banshoryoensis*, but the apical joint distinctly longer than the fourth joint.

Pro-, meso- and metanotum just the same as in *banshoryoensis*; median segment distinctly broader than long, or about  $\frac{1}{4}$  as long as the metanotum, with the two median crescent foveoles just before the middle.

Abdomen proportionally short; fourth tergite as long as the fifth; 9th tergite  $1\frac{1}{2}$  times as long as the 8th, broadly emarginate, with the lateral margin slightly sinuate, the apical lobes being large and triangular; subgenital operculum very long and slender, and moderately naviculate as in *banshoryoensis*, distinctly shorter than the 4 terminal tergites together; supra-anal operculum long and slender, distinctly shorter than the 8th and 9th tergites together, and also shorter than twice the 8th tergite, pointed.

Legs rather thick; front femora serrate as in *banshoryoensis*; four posterior femora slightly serrate above, with a triangular basal tooth, the tooth in the intermediate femora placed on the interno-inferior carina and in the hind femora on the externo-inferior carina; the apical median serration of either the four posterior femora moderate; tibiae without teeth, but the interno-inferior carina of the hind tibiae slightly serrate.

♂. Very strongly linear, with very long and slender legs. Head brown to blackish brown, with two pairs of yellowish lateral stripes, conspicuously broadened forward, distinctly flattened above, without spines, and with three distinct occipital longitudinal grooves which are extended forward but distinctly narrowed, and of which the median one is suture-like. Eyes very prominent, spherical, with a dark longitudinal band. Antennae very little exceeding the tip of the front femora; basal joint about  $2\frac{1}{2}$  times as long as wide, or shorter than the third joint, in the middle very slightly widened; 2nd joint about  $\frac{2}{3}$  as long as the first. Labial palpi rather narrow, moderately flattened, except the terminal joint cylindrical and distinctly narrowed apically; basal joint less than half the second joint, the latter is very slightly shorter than the 3rd. Maxillary palpi longer than the labial palpi and distinctly narrower than the latter; basal joint longer than the second; apical joint distinctly longer than the 4th joint which is as long as the third.

Pronotum irregularly brownish, very slightly broader than half its length, parallel-sided; transversal sulcus in the middle; front and hind submedian longitudinal sulci distinct. Meso- and metanotum dark brown, with a very narrow yellowish lateral stripe throughout the whole length, with a very narrow but distinct longitudinal median carina entire; median segment proportionally long, conspicuously longer than wide, in the middle with the two crescent foveoles.

Abdomen brownish, with a yellowish narrow lateral stripe throughout

the whole length; 4th tergite distinctly longer than the fifth; basal tergite distinctly, though only a little, longer than the 6th, the latter being longer than the two following tergites together; 8th tergite a little shorter than the 7th, truncate at apex; 9th tergite very slightly longer than the 7th, its apical lobes hardly half as long as the whole length, their tip moderately reflexed and their inside distinctly toothed apically; cerci normal; terminal sternite well-naviculate and moderately pointed.

Legs linear, proportionally very long and slender.

	♀	♂
Length of body	103.0 mm.	96.0 mm.
.. .. pronotum	4.0 mm.	3.5 mm.
.. .. mesonotum	18.5 mm.	21.0 mm.
.. .. metanotum	11.5 mm.	14.5 mm.
.. .. median segment	2.8 mm.	2.7 mm.
.. .. basal tergite	6.3 mm.	6.2 mm.
.. .. apical tergite	3.8 mm.	3.1 mm.
	(Supra-anal operculum)	(9th tergite)
.. .. apical sternite	12.8 mm.	1.7 mm.
	(Subgenital operculum)	(Subgenital plate)
.. .. front femora	30.2 mm.	41.5 mm.
.. .. intermediate femora	22.3 mm.	28.2 mm.
.. .. hind femora	27.2 mm.	35.6 mm.

Hab. Formosa—Taihoku (V)

Described from one female and two males; types in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

9. *Entoria shinchikuensis*, sp. nov. Pl. VI [III] (Figs. 1, 2 & 3).

The new species in the female is distinguished from other species found in our country by the long lamellae of the head; in the male it may be distinguished from *formosana* and *taihokuensis* by the proportionally broad first antennal joint.

♀. Very near to *taihokuensis*, but easily distinguished by the long lamellae of the head and by the lamellate tibiae of four posterior legs. Head rather narrow, moderately narrowed behind, on the vertex it has two long lamellae, and on the occiput three distinct longitudinal furrows. Eyes round, and conspicuously prominent. Antennae reaching to the middle of the broadened portion of the front femora; first joint dilated, elliptical, shorter than twice the width, with the median longitudinal carina rather depressed; 2nd joint proportionally small, about  $\frac{1}{4}$  as long

as the first joint or about as long as wide. Labial palpi rather broad; first joint half as long as the 2nd joint, the latter is somewhat elliptical and is about  $\frac{2}{3}$  as long as the third joint which is more or less pointed. Maxillary palpi distinctly depressed at the base; first joint hardly longer than the second; third joint as long as the fourth, or more than  $1\frac{1}{2}$  times the second; apical joint about twice as long as the fourth, pointed.

Pronotum rather rough, comparatively broad, distinctly broadened behind; the median transverse sulcus in the middle; the front submedian longitudinal sulci distinct, but the hind ones indistinct. Meso- and metanotum quite similar with those in *taihokuensis*; median segment as long as wide, with the crescent foveoles before the middle.

Abdomen rather short; fourth tergite as long as the fifth; 7th tergite about half as long as the fifth; 9th tergite distinctly longer than  $1\frac{1}{2}$  times the preceding one, the apex being deeply emarginate triangularly, whilst the infero-lateral margin is very slightly but broadly sinuate; the apical lobes rather long and subtriangular; supra-anal operculum narrow and long, about  $1\frac{1}{2}$  times as long as the 9th tergite, more or less pointed; subgenital operculum similar with that in *taihokuensis*; cerci comparatively long-exserted.

Legs rather narrow; front femora armed with rather large teeth above and beneath nearly throughout the whole length; intermediate femora with one pair of basal lamellae beneath near the base, and with two teeth above; hind femora with one basal lamella on the externo-inferior carina; inferior median apical serration of four posterior femora rather indistinct.

♂. Very closely allied to *taihokuensis*, but it may be distinguished from the latter by the following characters:

Eyes somewhat oval, less prominent; first antennal joint much dilated, slightly shorter than the third joint; second joint of labial palpi about  $\frac{2}{3}$  as long as the third joint.

Thorax proportionally short, especially the mesonotum very short; the crescent foveoles of the median segment behind the middle.

The fifth abdominal tergite nearly as long as the sixth; apical lobes of the 9th tergite proportionally long.

	♀	♂
Length of body	106.5 mm.	90.3 mm.
„ „ pronotum	4.0 mm.	3.0 mm.
„ „ mesonotum	19.2 mm.	18.4 mm.
„ „ metanotum	11.5 mm.	13.6 mm.
„ „ median segment	3.8 mm.	2.5 mm.

„	„ basal tergite	6.5 mm.	5.7 mm.
„	„ apical tergite	5.0 mm.	3.5 mm.
		(Supra-anal operculum)	(9th tergite)
„	„ apical sternite	14.1 mm.	2.1 mm.
•		(Subgenital operculum)	(Subgenital plate)
„	„ front femora	33.0 mm.	37.5 mm.
„	„ intermediate femora	20.0 mm.	25.0 mm.
„	„ hind femora	27.5 mm.	30.5 mm.

Hab. Formosa—Shinchiku (VII)

Described from one female and two males, which are preserved in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku. Formosa.

#### 10. *Entoria magna*, SHIRAKI

Ann. Zool. Japonenses, VII, 5, p. 310, pl. XII, fig. 3 (1911)

Hab. Japan—Yoshihama (VIII)

Type (♀) preserved in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

#### 11. *Entoria kiirunensis*, sp. nov. Pl. VI [III] (Figs. 4, 5 & 6).

The female allied to *magna*, but is easily distinguished from that by the proportionately short subgenital operculum which does not exceed the terminal tergite.

♀. Robust. Head rather elongated, moderately narrowed behind, with two spines which are short and thick, while in *magna* they are rather long and are distinctly pubescent; eyes less prominent. First joint of antennae rather long, longer than twice the width. Labial palpi strongly depressed; first joint a little shorter than a half the second joint; third joint nearly as broad as or longer than the second joint, the latter being about twice as long as wide. In *magna* the second joint of labial palpi distinctly longer than twice the width, or as long as the third joint. Maxillary palpi moderately depressed, except the terminal joint subcylindrical; first joint very little longer than the second; terminal joint about  $1\frac{1}{2}$  times as long as either the third or the fourth joints, in *magna* it is about as long as the fourth.

Pronotum rather short, about  $1\frac{1}{2}$  times as long as wide and very slightly broadened behind (in *magna* very much longer than wide and distinctly broadened behind), with the median transverse sulcus in the middle (in *magna* distinctly before the middle). Mesonotum proportionally long, with



very few granules; metanotum proportionally short, with much fewer granules; median segment very short, well-transverse, nearly half as long as wide, behind the middle with the two indistinct crescent foveoles.

Abdomen proportionally long; fourth tergite very slightly longer than either the fifth or the sixth tergites, the two latter ones equal in length; 8th tergite shorter than half the 7th tergite, and distinctly shorter than the 9th tergite which is about half as long as the 7th tergite; 9th tergite triangularly emarginate, the apico-lateral margins obliquely truncate so that the apical lobes are broad; supra-anal operculum slightly longer than the 9th tergite, very slender, gradually narrowed apically and pointed; subgenital operculum narrow and long, moderately naviculate and sharply pointed, not reaching to the tip of the ovipositor which also does not reach to the tip of the supra-anal operculum.

Legs rather long; front femora on the basal half serrate above and very minutely serrate beneath; four posterior femora non-serrate, but with a median apical serration beneath; four posterior tibiae with a rather small subbasal lamella above.

♂. Linear, rather near to *ishigakiensis*, but it is easily distinguished from the latter by the proportionally broad first antennal joint and by the proportionally long 9th tergite. Head without spines, moderately narrowed behind, rather strongly rounded above, with three distinct longitudinal occipital furrows which extend forwards. Eyes round, proportionally large, but rather less prominent. First joint of antennae twice as long as wide, distinctly dilated in the middle, with a conspicuous median longitudinal carina; 3rd joint about as long as the first joint. Labial palpi rather broad, depressed as usual; first joint about half as long as the second, the latter is about twice as long as wide; 3rd joint somewhat cylindrical toward the apex, about  $1\frac{1}{2}$  times as long as the second. Maxillary palpi distinctly narrower than the labial palpi, moderately depressed toward the base; first joint nearly as long as the second, or about half as long as the third, the latter is about as long as the fourth; terminal joint about  $1\frac{1}{2}$  times as long as the preceding one.

Pronotum rather short, much broader than half the length, moderately broadened in the posterior half, with the transverse median sulcus in the middle, and with the longitudinal submedian furrows distinct in both the front and hind portions; meso- and metanotum proportionally long; median segment rather long, but not twice as long as wide, with the two crescent foveoles behind the middle.

Abdomen much longer than the remaining parts together as usual;

fourth tergite as long as the fifth; 7th tergite a little longer than the 8th, or distinctly shorter than the 6th tergite; 9th tergite about  $1\frac{1}{2}$  times as long as the 6th tergite, its apical lobes being very long and slender and furnished with rather few denticles nearly throughout the inside; 7th sternite about  $\frac{2}{3}$  as long as the 8th sternite; subgenital plate strongly naviculate, not reaching to the apex of the 9th tergite; cerci rather broadly rounded at the apex.

Legs very long and slender; hind femora proportionally long.

	♂	♀
Length of body	83.0 mm.	126.0 mm.
.. .. pronotum	3.0 mm.	5.0 mm.
.. .. mesonotum	17.8 mm.	23.1 mm.
.. .. metanotum	11.9 mm.	13.3 mm.
.. .. median segment	2.9 mm.	3.3 mm.
.. .. basal tergite	4.6 mm.	5.6 mm.
.. .. apical tergite	4.7 mm.	4.8 mm.
	(9th tergite)	(Supra-anal plate)
.. .. apical sternite	2.6 mm.	21.4 mm.
	(Subgenital plate)	(Subgenital operculum)
.. .. front femora	33.7 mm.	39.0 mm.
.. .. intermediate femora	?	24.8 mm.
.. .. hind femora	27.8 mm.	29.8 mm.

Hab. Formosa—Kiirun.

Described from one pair preserved in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

12. *Eutoria nagoensis*, sp. nov. Pl. VI [III] (Figs. 7 & 8).

♀ Closely resembles the preceding species, but it differs from it in its small size and in the short supra-anal operculum. It is also allied to *taihokuensis*, but distinguished by the denticulate median tibiae and by the proportionally short supra-anal operculum.

Head as in *taihokuensis*. First joint of antennae very broad, about  $1\frac{1}{2}$  times as long as wide, broadest just before the middle; 2nd joint distinctly longer than the third one. Labial palpi depressed throughout; first joint a little shorter than a half the second joint; third joint narrower than and about as long as the preceding one. Maxillary palpi slightly depressed; first joint distinctly longer than the second; third joint about as long as the two preceding joints together; terminal joint, distinctly

pointed, longer than the fourth, which is as long as the third joint.

Pronotum as in *kiirunensis*. Mesonotum proportionally short, almost no granules, but with a distinct lateral longitudinal sulcus composed of irregular foveoles; metanotum rather long, its surface as in the mesonotum; median segment a little shorter than broad, the crescent foveoles in the middle.

Abdomen rather long; fourth tergite distinctly, although only a little, longer than either the 3rd or the fifth tergites; 9th tergite 1.4 times as long as the 8th tergite, its apex rather deeply emarginate and its lateral margin distinctly sinuate just after the middle, with the apical lobes rounded; supra-anal operculum shorter than the 9th tergite, gradually narrowing toward the tip; subgenital operculum narrow and long, moderately naviculate and pointed, reaching to the middle of the supra-anal operculum, or exceeding very little the tip of the ovipositor.

Legs as in *kiirunensis* but proportionally short, and the serrations more marked.

Length of body	♀ 118.0 mm.
„ „ pronotum	4.7 mm.
„ „ mesonotum	21.5 mm.
„ „ metanotum	13.4 mm.
„ „ median segment	4.2 mm.
„ „ basal tergite	7.0 mm.
„ „ supra-anal operculum	3.8 mm.
„ „ subgenital operculum .	14.0 mm.
„ „ front femora	31.4 mm.
„ „ intermediate femora	19.6 mm.
„ „ hind femora	24.3 mm.

Hab. Japan—Amami-Oshima (Nago, VII)

Only a single female, collected by the author, is preserved in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

### 13. *Entoria formosana*, SHIRAKI, Pl. VI [III] (Fig. 9).

Ann. Zool. Japonenses, VII, 5, p. 309, pl. XII, fig. 1 (1911)

Rather near to *taihokuensis*, but in the female it is easily distinguished from the latter by the very long terminal tergite and the lamellæ of four posterior tibiae, and in the male by the situation of the crescent foveoles of median segment.

♀. Head as in *taihokuensis*. Antennae short, reaching beyond the middle of the front femora; first joint about twice as long as wide, moderately narrowed toward the base, while in *taihokuensis* it is conspicuously constricted at the base; the 2nd joint shorter than the 3rd one, which in turn is shorter than twice the fourth, the latter being distinctly shorter than the fifth. Labial palpi moderately flattened; first joint hardly half as long as the second joint, and distinctly longer than wide, while in *taihokuensis* it is as long as wide; second joint conspicuously broadened at the middle, being broadest just before the middle and distinctly broader than the first one; 3rd joint as long as the preceding one, but distinctly narrower, moderately narrowed toward the round tip. Maxillary palpi distinctly narrower than the labial palpi; 1st joint as long as and as wide as the second joint; the 3rd fully  $1\frac{1}{2}$  times as long as the second joint or as long as the fourth, the latter is distinctly shorter than the fifth. The spines of the head shorter and narrower than in *taihokuensis* and distinctly oblique forwards, while in the latter species it is not forwardly oblique. Eyes proportionally longer than in *taihokuensis*.

Pronotum proportionally broad, with the median transverse sulcus just in front of the middle; mesonotum proportionally long, with the median and lateral carinae conspicuous, irregularly and very sparsely granulated; metanotum (with the median segment) about  $\frac{2}{3}$  times as long as the preceding notum, its surface granulose as in the mesonotum and with the carinae which are less distinct than in the latter; median segment fully  $\frac{1}{2}$  as long as the metanotum-proper, a little broader than long, with the crescent foveoles in the middle.

Abdomen rather long; fourth tergite a little longer than the third or the fifth; first tergite distinctly shorter than half the metanotum; ninth tergite nearly  $1\frac{1}{2}$  times as long as the 8th, triangularly emarginate, with the median ridge distinctly but finely sulcate throughout, with the lateral margins very slightly sinuate just after the middle, and with the apical lobes subtriangular but not pointed; subgenital operculum very long and slender, very slightly naviculate, and distinctly shorter than the four terminal tergites together; supra-anal operculum very narrow and long, shorter than the two preceding tergites together, but longer than twice the 8th tergite, with the tip rather rounded.

Legs rather thick, but proportionally longer than those in *taihokuensis*; front femora serrate as in *taihokuensis* but the teeth are much more lamellate, with the small upper apical median triangular lobe distinctly horizontal (while in *taihokuensis* it is obliquely upwardly directed); four posterior

femora not serrate above, but with one or two small teeth on both the inner and outer carina, with the two lower subbasal lamellate teeth distinct in the intermediate femora, but in the hind femora they are very indistinct, and have the apical upper median triangular lobe the same as on the front femora; front tibiae without any serration; intermediate tibiae very sparsely and finely serrate on the interno-inferior carina, on the externo-superior carina there is a large subtriangular lamella near the base; hind tibiae very indistinctly serrate on the apical half of the inferior carinae and on the apical one-third the interno-superior carina, with one or two small pine-like lamellae on the basal half the interno-superior carina.

♂. Somewhat greenish brown or greenish reddish brown, without lateral dark streaks. Very strongly linear, much more linear than in *taihokuensis*, with very narrow but rather short legs. Head without blackish lateral streak behind the eyes, slightly narrowed behind, without spines, and with three deep longitudinal occipital streaks, of which the lateral pair reaches to the eye-margin but becomes very fine. Eyes very prominent, round, without streak, about as long as  $\frac{1}{3}$  the length of post-ocellar portion of the head. First joint of antennae rather cylindrical, about 3 times as long as wide, or as long as the third joint which is as long as the two following joints together; 2nd joint slightly longer than wide; 4th joint as long as the 5th. Labial palpi flattened; first joint a little longer than wide; 2nd joint distinctly longer than twice the width, or shorter than the third joint which is nearly as wide as the first and becomes narrowed apically. Maxillary palpi distinctly narrower than the labial palpi; first joint as long as the second; 3rd joint as long as the 4th, or twice as long as the first joint; apical joint about  $1\frac{1}{2}$  times as long as the preceding one.

Pronotum distinctly broadened than half the length, parallel-side but very slightly broadened at the hind half, with three longitudinal sulci of which the submedian pair is only conspicuous on the front disc, where there is a pair of crescent furrows in the middle, and with the median transverse sulcus just ahead of the middle. Meso- and metanotum have a distinct median longitudinal carina which becomes rather indistinct on the median segment. Median segment nearly twice as long as wide, or fully  $\frac{1}{2}$  as long as the metanotum proper, with the crescent foveoles distinctly behind the middle.

Abdomen a little longer than the preceding portions together; 4th tergite a little longer than the 3rd or distinctly longer than the 5th; first tergite indistinctly longer than the 6th which is about as long as the two

following tergites together; 8th tergite conspicuously shorter than the preceding one; terminal tergite very slightly longer than the 7th tergite, with the apical lobes distinctly shorter than the basal portion and their tips moderately reflexed and their inside distinctly toothed especially toward the tip; subgenital plate more or less naviculate, hardly reaching the tip of the 8th tergite; 7th sternite about  $1\frac{1}{2}$  times as long as the 8th; cerci normal.

Legs unfortunately lacking, excepting the right posterior one which is proportionally short.

	♂	♀
Length of body	85.0 mm.	122.0 mm.
.. .. pronotum	3.2 mm.	4.1 mm.
.. .. mesonotum	18.0 mm.	20.3 mm.
.. .. metanotum (without median segment)	12.3 mm.	12.0 mm.
.. .. median segment	3.0 mm.	4.0 mm.
.. .. basal tergite	5.5 mm.	6.4 mm.
.. .. apical tergite	3.3 mm.	5.3 mm.
		(Supra-anal operculum)
.. .. subgenital plate or operculum	1.9 mm.	16.0 mm.
.. .. hind femora	29.0 mm.	28.3 mm.
.. .. intermediate femora	—	21.3 mm.
.. .. front femora	—	35.0 mm.

Hab. Formosa—Nanto (V); feeding on *Liquidambar formosana*.

Described from one pair of insects which are in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

One male from Rantai-San (2500 m high) and one male from Antsun (Taito-Prefecture) are very similar to the above species, but differ in the antennae: 1st joint about  $2\frac{1}{2}$  times as long as wide, or shorter than the 3rd; 4th joint distinctly shorter than the 5th. These insects are probably a local variety.

#### 14. *Fintoria takaoensis*, sp. nov. Pl. VI [III] (Fig. 10).

♀. Allied to *formosana*, but differs from that in the four posterior femora not being spined nor serrate above, in the long antennae, etc.

Head rather broad, conspicuously narrowed behind, with the lateral margin more or less convex (straight in *formosana*); the longitudinal sulci and spines as in *formosana*. Antennae long, reaching to the end of the

basal two-thirds of the front femora; first joint wider than half its length, strongly constricted at the base, with the exterior margin strongly convex; 2nd joint very slightly shorter than the third or very little longer than wide; 3rd joint as long as the two following joints together; the 4th distinctly longer than the 5th joint which is shortest of all the joints, or conspicuously shorter than the 6th. Labial palpi moderately flattened; first joint hardly  $\frac{1}{3}$  as long as the second joint or about  $\frac{2}{3}$  as long as wide; 2nd joint nearly twice as long as wide, moderately broadened at the middle, being broadest just after the middle; 3rd joint definitely longer than and as wide as the second, gradually narrowing toward the tip. Maxillary palpi slightly narrower than the labial palpi, slightly exceeding the latter; first joint distinctly longer than and as wide as the second joint; 3rd joint hardly twice as long as the preceding one or as long as the following one, and broader than the 2nd or fourth; fifth joint nearly twice as long as the fourth, with the tip suddenly narrowed. Eyes proportionally more prominent than in *formosana*.

Pronotum  $1\frac{1}{2}$  times as long as wide, gradually but very slightly broadened behind, with the median transverse sulcus at the middle; mesonotum proportionally short, with the inconspicuous longitudinal carinae, and with very few irregularly scattered granules; metanotum (with the median segment) longer than  $\frac{1}{2}$  the length of the mesonotum, with the longitudinal carinae and granules much more obsolete; median segment about  $\frac{1}{2}$  as long as the metanotum proper, about  $\frac{2}{3}$  as long as wide, with the crescent foveoles in the middle.

Abdomen as in *formosana*, but the fourth tergite proportionally longer than the fifth or 3rd, the 6th tergite as long as the fifth (in *formosana* distinctly shorter), and the median ridge of the ninth tergite furrowed.

Legs as in *formosana*, but the serrations and spine-like lamellae less strong and the four posterior femora not serrate above.

Length of body	♀ 100.0 mm.
„ „ pronotum	3.8 mm.
„ „ mesonotum	16.2 mm.
„ „ metanotum (without median segment)	12.0 mm.
„ „ median segment	3.0 mm.
„ „ basal tergite	6.0 mm.
„ „ supra-anal operculum	4.5 mm.
„ „ subgenital operculum	14.2 mm.
„ „ front femora	29.0 mm.

„ „ intermediate femora	18.2 mm.
„ „ hind femora	22.0 mm.

Hab. Formosa—Takao

Described from one female which is preserved in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

15. *Entoria domonensis*, sp. nov. Pl. VII [IV] (Fig. 1).

♀. Very closely allied to *formosana*, but distinguished by the two upper lamellae of the intermediate femora, and by the position of the crescent foveoles of the median segment, which are situated distinctly before the middle.

Rather short species. Head at the sides black, where are two ill-defined greyish stripes; the spines rather stout (in *formosana* narrow) and short. Antennae proportionally long, exceeding the middle of the front femora; first joint nearly twice as long as wide, broadest before the middle (in *formosana* broadest after the middle); the second half as long as the third joint which is fully three times as long as the fourth; fifth joint about twice as long as the fourth. Labial palpi strongly flattened; first joint  $\frac{3}{4}$  as long as the second joint and distinctly longer than wide; second joint nearly elliptical, about  $1\frac{1}{2}$  times as long as wide, and a little broader than the first joint; 3rd joint very slightly longer and narrower than the second, somewhat pointed at the tip. Maxillary palpi nearly as broad as the labial palpi; 1st joint very slightly longer than and as wide as the second joint; 3rd joint twice as long as the preceding joint, and a little shorter than the fourth which is as long as the fifth.

Pronotum proportionally broad, with the median transverse sulcus just behind the middle; mesonotum proportionally long, about  $4\frac{1}{2}$  times as long as the pronotum, carinated and granulated as in *formosana*; metanotum (with the median segment) about  $\frac{3}{4}$  as long as the mesonotum, much more distinctly carinate than in *formosana*; median segment  $\frac{3}{4}$  as long as the metanotum-proper, as long as wide, with the crescent foveoles in front of the middle.

Abdomen proportionally short; fourth tergite as long as the fifth, a little longer than either the 3rd or the sixth tergite; first tergite about  $\frac{3}{4}$  as long as the metanotum; ninth tergite about  $1\frac{1}{2}$  times as long as the preceding tergite, slightly emarginate, with the median ridge not sulcate, with the lateral margin hardly sinuate, and with the lateral lobes rather rounded; subgenital operculum very long and slender, very slightly naviculate, and distinctly not reaching the tip of the supra-anal operculum which



is shorter than the two preceding tergites together or twice the 8th tergite, with the tip rather rounded.

Legs rather stout; front femora serrate as in *formosana* but the serrations much more conspicuous and occupying fully the basal two-thirds (in *formosana* only in the basal half of the thickened portion), with the small upper apical median lobe horizontal; four posterior femora not serrate above, but with two teeth on the inner carina and one on the outer carina, the inner (or posterior) teeth in the intermediate femora large and lamellate, with the two lower subbasal lamellae very large in the intermediate femora, but in the hind femora only one on the outer margin; front tibiae entire; intermediate tibiae as in *formosana*; hind tibiae also as in *formosana*.

Length of body	♀ 140.0 mm.
„ „ pronotum	4.2 mm.
„ „ mesonotum	17.2 mm.
„ „ metanotum (without median segment)	10.1 mm.
„ „ median segment	3.9 mm.
„ „ basal tergite	6.8 mm.
„ „ supra-anal operculum	4.5 mm.
„ „ subgenital operculum	14.5 mm.
„ „ front femora	30.0 mm.
„ „ intermediate femora	20.5 mm.
„ „ hind femora	25.5 mm.

A single female collected at Domon (Karenko, VII), Formosa, which is preserved in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

16. *Entoria taitoensis*, sp. nov. Pl. VII [IV] (Figs. 2 & 3).

The present species in the female is easily distinguished from the all preceding species which have the front femora serrate beneath, by the long subgenital operculum which extends beyond the tip of the apical tergite, and in the male from *kiirunensis* by the short 8th tergite which is shorter than a half the 7th tergite.

♀. Very long species, with the very short-spined head. Antennae reaching to just beyond the middle of the thickened portion of the front femora; first joint about  $\frac{2}{3}$  as wide as long, broadest immediately before the middle; second joint shorter than the third, the latter is about twice as long as the fourth; fifth joint very slightly shorter than the preceding one. Labial palpi strongly flattened; first joint half as long as the second, and

wider than long; second joint longer than the third joint, the latter is much less flattened and is more or less pointed. Maxillary palpi less flattened than the labial palpi; first joint longer than the second, much wider than long; 3rd joint a little longer than the two basal joints together, and about as long as the following one; apical joint distinctly longer than the fourth. The spines of head very small and somewhat triangular. Eyes proportionally small.

Pronotum rather narrow, with the median transverse sulcus immediately front of the middle; mesonotum 4 times as long as the pronotum, hardly carinate, irregularly and very sparsely granulate; metanotum (with the median segment) nearly  $3\frac{1}{2}$  times as long as the pronotum, with the lateral carinae very conspicuous, granulated as in the mesonotum; median segment fully  $\frac{1}{2}$  as long as the metanotum proper, wider than long, with the crescent foveoles distinctly in front of the middle.

Abdomen very long; fourth tergite very little longer than the 3rd or fifth; the 8th about  $\frac{2}{3}$  as long as the 9th tergite which is about  $\frac{2}{3}$  as long as the 7th; first tergite shorter than the 7th, and about  $1\frac{1}{2}$  times as long as the median segment; 9th tergite not emarginate at the end, with the lateral margins very slightly sinuate just before the apex; supra-anal operculum very narrow and long, sword-like when seen from side; distinctly longer than the ninth tergite; subgenital operculum exceeding the tip of the supra-anal operculum, very narrow and hardly naviculate, gradually narrowed toward the tip and pointed.

Legs proportionally short; front femora serrate as in *taihokuensis*, with the small upper apical median triangular lobe nearly horizontal; four posterior femora entirely non-serrate, but the intermediate pair with a pair of subbasal inferior lamellae; four posterior tibiae with one subbasal interno-superior lamella and one subbasal interno-inferior lamella, of all the lamellae those of the intermediate tibiae are distinctly larger than those of the hind tibiae and the inferior lamellae are conspicuously smaller than superior ones.

♂. Head without spines, moderately narrowed behind, somewhat strongly rounded above, with three distinct longitudinal occipital furrows which do not extend forwards. Eyes round, proportionally large and prominent. Antennae not quite reaching to the tip of the front femora; first joint a little longer than twice the width, or about twice as long as the second joint, moderately dilated in the middle, with the median carina rather indistinct; 3rd joint as long as the first joint, or fully twice as long as the fourth joint, the latter is about  $\frac{1}{2}$  as long as the fifth; the apical joint as long as the 3rd joint. Maxillary palpi moderately depressed

toward the bases; first joint distinctly shorter than the second; third joint about half as long as the second and about  $\frac{2}{3}$  as long as wide; fourth joint twice as long as the first joint, or  $\frac{4}{5}$  as long as the apical joint which is slightly pointed at the tip. Labial palpi not very broad, very slightly broader than the maxillary palpi; first joint shorter than a half the length of the second joint; third joint longer than the second, more or less pointed.

Pronotum a little broader than a half the length, very slightly broadened in the posterior half, with the median transverse sulcus in the middle and with the submedian longitudinal furrows distinct but obsolete in the posterior half; meso- and metanotum proportionally long; median segment about  $1\frac{1}{2}$  times as long as wide, with the crescent foveoles distinctly behind the middle.

Abdomen much longer than the preceding portions together; first tergite longer than two-thirds the median segment, or as long as 7th tergite which is much longer than the 8th; fourth tergite longer than the fifth; 9th tergite as long as the 7th, its apical lobes a little shorter than the basal portion, furnished with rather few denticles on the apical one-third of the inside; 7th sternite  $1\frac{1}{2}$  times as long as the 8th sternite, or as long as the subgenital plate which is strongly naviculated and slightly exceeds the middle of the 9th tergite; cerci as usual.

Legs very long and slender; hind femora proportionally long.

	♂	♀
Length of body	87.0 mm.	114.0 mm.
„ „ pronotum	3.0 mm.	4.5 mm.
„ „ mesonotum	18.0 mm.	20.2 mm.
„ „ metanotum (with median segment)	15.0 mm.	16.8 mm.
„ „ median segment	2.9 mm.	3.8 mm.
„ „ basal tergite	5.9 mm.	6.2 mm.
„ „ apical tergite	5.5 mm.	6.8 mm.
	(9th tergite)	(Supra-anal operculum)
„ „ subgenital plate or operculum	2.7 mm.	22.5 mm.
„ „ front femora	35.0 mm.	32.8 mm.
„ „ intermediate femora	21.5 mm.	20.7 mm.
„ „ hind femora	27.0 mm.	28.0 mm.

Hab. 'Formosa—Taito (II, III); Chipon (V); Toroen (VI).

Types in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa, Japan.

17. *Entoria longiopercula*, sp. nov. Pl. VII [IV] (Figs. 4 & 5).

♀. Allied to *taitoensis*, but easily distinguished from that by the distinctly emarginated 9th tergite.

Rather short species, with the short spined head which is conspicuously narrowed behind. Antennae proportionally short, reaching to the middle of the front femora; first joint fully twice as long as wide, broadest just in front of the middle, from where it is gradually narrowed toward the base; second joint about  $\frac{1}{2}$  as long as the preceding one; third joint about as long as the two following joints together, the fourth being shortest; the apical joint  $\frac{3}{4}$  as long as the basal joint, not thicker than the preceding one. Labial palpi slightly depressed; first joint about  $\frac{2}{3}$  as long as the 2nd joint; apical joint slightly longer than the 2nd joint which is rather distinctly depressed at the base. Maxillary palpi slightly narrower than the labial palpi; first joint about twice as long as the 2nd; third joint hardly three times as long as the preceding one, or as long as the following one; apical joint  $1\frac{1}{2}$  times as long as the preceding joint, with the tip rather rounded. The spines of the head rather small, directed a little forwards. Eyes round, comparatively large.

Pronotum as in *taitoensis*; mesonotum fully 5 times as long as the pronotum, with the median longitudinal carina very fine and complete, furnished with a very few granules; metanotum (with the median segment) fully 4 times as long as the pronotum, carinated and granulated as in the pronotum; median segment about as long as the pronotum or  $\frac{1}{2}$  as long as the metanotum-proper or as long as wide, with the crescent foveoles in the middle.

Abdomen comparatively short; first tergite a little shorter than the 7th and 8th tergites together; fourth tergite distinctly longer than the 3rd or 5th tergite; 6th tergite distinctly shorter than the preceding one; 7th tergite as long as the two following tergites together; 9th tergite a little longer than the 8th, distinctly triangularly emarginate; supra-anal operculum a little longer than the 9th tergite, slender, suddenly narrowed at the tip; subgenital operculum long and slender, slightly naviculate, and pointed, exceeding the tip of the supra-anal operculum.

Legs proportionately very long; front femora serrate as in *taihokuensis*, with the small upper apical median triangular lobe horizontal; intermediate femora with a small triangular interno-inferior subbasal lamella, with an indistinct interno-superior subbasal spine, and with rather distinct, medio-inferior apical serration; hind femora entire, with rather indistinct

medio-inferior apical serration; front tibiae with a very small spine in the middle of the basal half of the interno-superior carina; four posterior tibiae with a small triangular subbasal interno-superior lamella, with the interno-inferior carina sparsely serrate at the apical half or two-thirds.

Length of body	♀ 108.0 mm.
„ „ pronotum	4.0 mm.
„ „ mesonotum	20.0 mm.
„ „ metanotum (with median segment)	16.0 mm.
„ „ median segment	3.9 mm.
„ „ basal tergite	6.4 mm.
„ „ supra-anal operculum	3.7 mm.
„ „ subgenital operculum	13.5 mm.
„ „ front femora	34.0 mm.
„ „ intermediate femora	22.0 mm.
„ „ hind femora	28.0 mm.

Hab. Formosa—Taihoku(II)

The type, preserved in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa, is dark brown.

Genus **Rhamphophasma**, BRUNNER VON WATTENWYL

Rev. Orth., p. 92 (1893); Phasmiden, p. 209 (1907)

Genotype: *modestum*, BRUNNER VON WATTENWYL

*Rhamphophasma japonicum*, BRUNNER VON WATTENWYL

Phasmiden, p. 210, pl. VIII, fig. 4 a, b (1907)

Hab. Japan.

Type preserved in the Zoological Museum of Berlin.

Subfam. **Prisomerinae**, KARNY (1923)

*Lonchodidae*, BRUNNER VON WATTENWYL

Key to the genera found in our country.

1. Second abdominal tergite of female transversé or quadrate; of male longer than wide ..... *Neohirasea*, REHN
11. Second abdominal tergite of female much longer than wide; of male twice or three times as long as wide ..... *Phraortes*, STÅL

Genus **Neohirasea**, REHN

Proc. Acad. Nat. Sci. Philad., p. 84 (1904)

*Menoxenus* (pt.), BRUNNER VON WATTENWYL (nec STÅL), Phasmiden, p. 242 (1907).

*Acanthoderus* (pt.), WESTWOOD (nec. GRAY), Cat. Phasm., p. 48 (1859).

Genotype: *Phasma japonica*, DE HAAN.

Key to the Japanese species.

1. Mesonotum with two long spines on the anterior margin  
     .. *lugens*, BRUNNER VON WATTENWYL
2. Mesonotum without such spines *japonica*, DE HAAN

1. *Neohirasea japonica*, DE HAAN

*Phasma* (*Acanthoderus*) *japonicum*, DE HAAN, Verhandel. Natuurlijke Geschied., Orth., p. 135, tab. 12, fig. 4 (1842).

*Acanthoderus japonicus*, WESTWOOD, Cat. Phasmidae, p. 50 (1859).

*Neohirasea japonica*, REHN, Proc. Acad. Nat. Sci. Philad., p. 84 (1904).

*Menexenus japonicus*, BRUNNER VON WATTENWYL, Phasmiden, p. 245 (1907).

I think this type is preserved in the Leiden Museum, Holland.

Hab. Japan—Nikko and Kyoto.

2. *Neohirasea lugens*, BRUNNER VON WATTENWYL

*Menexenus lugens*, BRUNNER VON WATTENWYL, Phasmiden, p. 244 (1907).

Hab. Japan—Kobe, Kumamoto.

Type in the Zoologisches Museum of Hamburg; the male is not recorded.

Genus **Phraortes**, STÅL

Rec. Orth., III, p. 8 (1875)

*Bacteria* (pt.), DE HAAN, WOOD-MASON, WESTWOOD.

*Lonchodes* (pt.), WESTWOOD, Phasmidae, p. 36 (1859).

*Staelonchodes*, KIRBY, Ann. Nat. Hist. (7) XIII, p. 372 (1904).

*Phraortes*, BRUNNER VON WATTENWYL, Phasmiden, p. 262 (1907).

*Lonchodes*, BRUNNER VON WATTENWYL (nec GRAY), Phasmiden, p. 256 (1907).

Genotype: *Phasma elongata*, THUNBERG.

Key to the species found in the Japanese Empire.

Female.

1. Vertex with two distinct spines.
2. Subgenital operculum reaching to the tip of the supra-anal plate.
3. Four posterior femora with two triangular dentate inferior apical lamellae *elongatus*, THUNBERG

33. Four posterior femora with very narrow dentate inferior apical lamellae.
  4. Body granulate throughout; median segment distinctly transverse; subgenital operculum conspicuously naviculate; sixth sternite gibbous apically.
  5. Subgenital operculum pointed in the middle ..... *bicolor*, BRUNNER VON WATTENWYL
  55. Subgenital operculum broadly rounded ..... *formosanus*, sp. nov.
  44. Body smooth; median segment rather long; subgenital operculum moderately naviculate; sixth sternite non-gibbous ..... *mikado*, REHN
  22. Subgenital operculum not reaching to the tip of the supra-anal plate.
  3. Median segment with the crescent foveoles in the middle; inferior apical lamellae of the four posterior femora very narrow ..... *koyasanensis*, sp. nov.
  33. Median segment with the crescent foveoles distinctly before the middle; inferior apical lamellae of the four posterior femora rather triangular ..... *kumamotoensis*, sp. nov.
  11. Vertex without spines ..... *miyakoensis*, sp. nov.
- Male.
1. Cerci strongly bent near the middle.
  2. Subgenital plate distinctly sinuate apically.
  3. Body very long and slender ..... *formosanus*, sp. nov.
  33. Body rather thick ..... *miyakoensis*, sp. nov.
  22. Subgenital plate not sinuate and distinctly triangular at apex' .... *bicolor*, BRUNNER VON WATTENWYL
  11. Cerci moderately curved at the apical part.
  2. Subgenital plate triangularly sinuate .... *kumamotoensis*, sp. nov.
  22. Subgenital plate rounded at the apex.
  3. Median segment slightly broader than long; cerci conspicuously curved; apical lobes of ninth tergite nearly triangular when seen from side; subgenital plate broadly rounded ..... *elongatus*, THUNBERG
  33. Median segment rather long; cerci very slightly curved at the tip only; apical lobes of ninth tergite rather broadly rounded at the tip when seen from side ..... *illegidus*, BRUNNER VON WATTENWYL

1. *Phraortes illepidus*, BRUNNER VON WATTENWYL

*Lonchodes illepidus*, BRUNNER VON WATTENWYL, Phaemiden, p. 258 (1907).

Hab. Formosa—Hozan; Kobayashi (VIII); Tabo (VII).

Japan—Nagasaki.

This species is identical with Brunner's type in the Natural History Museum in Wien.

2. *Phraortes elongatus*, THUNBERG

*Phasma elongata*, THUNBERG, Mém. Soc. Petersb., V, p. 299 (1815).

*Phasma (Bacteria) niponense*, DE HAAN, Temminck, Verhandel., Orth., p. 134 (1842).

*Lonchodes niponensis*, WESTWOOD, Cat. Phasm., p. 46 (1859).

*Phraortes elongatus*, STÅL, Rec. Orth., III, p. 64 (1875).

Hab. Japan—Tokusa (VIII, 1922), Yamaguchi-Ken; Fukuoka (VII, 1932; X, 1930), Fukuoka-Ken; Kumamoto (VIII, 1932) and Tochinoki (VIII, 1932), Kumamoto-Ken; Tokyo.

I do not know where the types are preserved; the above species was identified by me, by an examination of Brunner von Wattenwyl's collection in the Natural History Museum of Wien and the collection in the British Museum.

3. *Phraortes mikado*, REHN

Proc. Acad. Nat. Sci. Philadelphia, p. 40, ♀ (1904)

Hab. Japan—Yokohama, Kanagawa-Ken (this is Type and preserved in the National Museum of U.S.A.); Tokyo (VII).

I have only one female from Takaoyama near Tokyo. This species is rather near to *elongatus*, THUNBERG, as noticed by REHN, but clearly distinguished by the short and rounded head, the long median segment (distinctly transverse in *elongatus*) and the much less naviculate subgenital operculum; from *bicolor*, BR. v. W., by the above characters and also by the smooth body (distinctly granulate throughout in *bicolor*).

4. *Phraortes bicolor*, BRUNNER VON WATTENWYL

*Lonchodes bicolor*, BRUNNER VON WATTENWYL, Phasmiden, p. 259, ♂ ♀ (1907).



Hab. Formosa—Horisha (V, 1918 ♂ & ♀).

The present species compared with the types in the Natural History Museum in Wien.

5. *Phraortes formosanus*, sp. nov.

Pl. VII [IV] (Figs. 6, 7, 8, 9, 10 & 11)

*Lonchodes confucius*, SHIRAKI (nec WESTWOOD), Ann. Zool. Japonenses, VII, p. 295 (1911).

Very near to *P. bicolor*, but in the female it is distinguished from the latter by the broadly rounded subgenital operculum which is not always pointed in the middle of the apex, and in the male by the distinctly sinuated apex of the subgenital plate. This is also allied to *confucius*, WESTWOOD, but it differs from the latter in the triangularly sinuated subgenital plate and the strongly bent cerci of the male, and in the short female-cerci which do not extend beyond the supra-anal plate.

♀. Moderately stout and long, pale green to dark brown. Head rather long, distinctly although only slightly narrowed hindwards with or without a pair of acute but short spines on the vertex; eyes circular, moderately prominent, nearly  $\frac{1}{3}$  as long as the lateral length of the head behind the eyes; antennae longer than the front leg, with the long nearly parallel-sided first joint which is twice as long as the second joint. Pronotum rectangular, distinctly longer than wide; the surface very slightly granulated, with the distinct median longitudinal and transversal sulci, the latter being placed nearly in the middle; the marginal depressions rather deep. Mesonotum granulated, fully 5 times as long as the pronotum, gradually and very slightly broadened hindward, with a very fine median longitudinal carina throughout. Metanotum (with median segment) granulated as in the mesonotum, about as long as four-fifths of the mesonotum, nearly parallel-sided; median segment about  $\frac{1}{3}$  as long as the metanotum alone, shorter than long, with a pair of transversal depressions just before the middle. Abdomen rather longer than the head and thorax together, gradually narrowed hindward, granulated less than in the thorax except the three apical segments which are smooth, with a fine median longitudinal carina from the base to the apex; second to fifth tergites nearly equal in length, but the greatest length being at the fourth; 7th tergite a little shorter than the two apical tergites together; ninth tergite tectate and rather sharply carinate, with the lateral margin very slightly and broadly curved outward in the middle, and with the apex conspicuously emarginated where the somewhat tectate and distinctly carinate supra-anal

plate are exposed, the latter being rounded at the apical margin and not exceeding the lateral apices of the ninth tergite; 6th sternite with a conspicuously sharply pointed apical median prolongation; subgenital operculum not exceeding the supra-anal plate, scoop-like, compressed and carinate, with the apical margin broadly rounded and never pointed. Legs slender, the anterior pair distinctly longer than the others; anterior femora longer or shorter than or equal to the mesonotum, with the carinae never serrate; anterior tibiae longer than the femora, or as long as the head, pronotum and mesonotum united; median femora comparatively short, as long as the metanotum (with the median segment), with the lower apical-lamellae which are rather narrow and moderately serrate, and with the genicular lobes small and not sharply pointed; posterior femora longer than the median pair, with the two lower apical lamellae which are more serrate than in the preceding; posterior and median tibiae conspicuously longer than the corresponding femora.

♂. Linear, very sparsely granulated except on nearly apical half of the abdomen, pale green to reddish yellow, with a rather conspicuous blackish lateral streak which extends through the whole length but is wanting on the prothorax and somewhat obscured toward the anal apex. Head long, slightly narrowed posteriorly, without spine; occiput with two pairs of elevations; eyes quite circular, prominent, little more than two-fifths the length measured from the hind margin of eye to the posterior end of head; antennae about as long as the anterior leg, the first joint very slightly narrowed at the base and about twice the length of the second joint. Pronotum distinctly shorter than the head, slightly narrowed behind, conspicuously longer than wide, with the transversal sulcus just behind the middle. Mesonotum six times as long as the pronotum, broadened at the posterior part, with a fine longitudinal median carina. Metanotum (with the median segment) shorter than one-fourth the length of the preceding notum, with the median carina nearly obsolete; median segment a little longer than wide or shorter than one-fifth the length of the metanotum alone, with the crescent foveoles just behind the middle. Abdomen rather longer than the head and thorax together, the narrowest width being at the fifth and sixth tergites, the greatest length at the second and third, and the shortest length at the 8th; ninth tergite longer than the 7th which is longer than the 8th, tectate, compressed, with a strong longitudinal median carina, deeply incised nearly apical half and forming subtriangular apical lobes, which are distinctly narrowed toward the apex where it is rounded and are finely denticulate inside, the lateral margin

slightly sinuate at the apical half; subgenital plate a little longer than the preceding sternite, slightly emarginate triangular; cerci strongly bent inwardly and more or less pointed. Legs linear, never spined nor lamellate, the anterior pair being longer than others but very little longer than the posterior pairs.

	♂	♀
Length of body	63.0–79.0 mm.	90.0–100.0 mm.
„ „ pronotum	2.9– 3.0 mm.	3.9– 4.2 mm.
„ „ mesonotum	17.0–18.5 mm.	20.0– 22.0 mm.
„ „ metanotum (with median segment)	13.0–14.0 mm.	15.0– 16.8 mm.
„ „ median segment	2.0– 2.1 mm.	3.0– 3.1 mm.
„ „ abdomen	37.0–39.0 mm.	45.0– 55.0 mm.
„ „ basal tergite	4.8– 5.0 mm.	6.0– 7.0 mm.
„ „ apical tergite	3.8– 3.9 mm.	2.9– 3.2 mm.
„ „ subgenital plate or operculum	2.0– 2.2 mm.	9.2– 10.5 mm.
„ „ front femora	19.1–21.1 mm.	21.0– 23.0 mm.
„ „ intermediate femora	15.0–16.5 mm.	16.0– 16.3 mm.
„ „ hind femora	19.0–21.0 mm.	19.0– 20.2 mm.

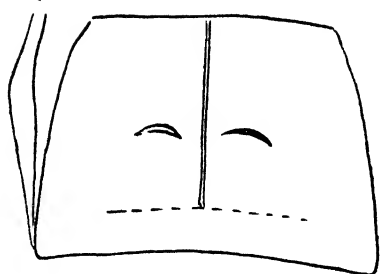
Hab. Formosa—Taihoku (VI), Sozan (IX), Urai (VII), Taipin (IX), Shinchiku (VII), Rimogan (VII), Kaya-hara (IX), Arisan (X), Kanshirei (VII).

The present species is found on the leaf of upland cotton plants and also the leaves of several trees.

#### 6. *Pharaortes koyasanensis*, sp. nov. Pl. VIII [V] (Fig. 1)

Near to *elongatus*, but in the female distinguished by the relatively short subgenital operculum and by the position of the crescent foveoles of the median segment. The present species may be a local variety of the latter species.

♀. Rather stout and long, smooth, pale green. Head short, conspicuously narrowed behind, with two conical spines between the eyes; eyes distinctly longer than wide, prominent, a little longer than two-fifths the lateral length of the head behind the eye; 1st antennal joint very slightly narrowed toward the base, longer than twice the length of the second joint. Pronotum rectangular, a little longer than wide, with the transversal median sulcus in the middle. Mesonotum hardly five times as long as the pronotum, distinctly and gradually broadened hindward, with a fine longitudinal



♀ Fig. 1 (× ca. 8)  
Median segment of  
*Phraortes koyasanensis*.

median carina. Metanotum (with the median segment) very slightly longer than four-fifths the mesonotal length, very slightly narrowed at the median portion, with the median carina distinct; median segment transverse, as long as two-ninths the metanotum, with the crescent foveoles in the middle. Abdomen much longer than the head and thorax together, with a longitudinal median carina throughout the whole

length, very slightly narrowed toward the anal apex; fourth tergite longest; seventh tergite as long as the two following ones together; ninth tergite very slightly longer than the preceding one, tectate and carinate, with the lateral margin nearly evenly curved outward, and with the apical margin conspicuously triangularly emarginate; supra-anal plate round and somewhat tectate, nearly entirely exposed between the apical lobes of the ninth tergite, which, when seen from side, are triangle and bluntly pointed apically; 6th sternite with a distinct rounded median apical elevation; subgenital operculum scoop-like, compressed and carinate, not reaching to the apex of the supra-anal plate, bluntly pointed. Legs rather slender and long, without lamellae, spines or teeth, excepting of the serrate apico-inferior lamellae of four posterior femora, which are very narrow and are armed with only two very small spine-like teeth; anterior femora as long as the mesonotum or anterior tibia; posterior femora shorter than the anterior femora, but longer than the median pair, with the pointed genicular lobes.

Length of body	♀ 89.0 mm.
„ „ pronotum	3.5 mm.
„ „ mesonotum	20.0 mm.
„ „ metanotum (with median segment)	16.4 mm.
„ „ median segment	3.0 mm.
„ „ abdomen	59.0 mm.
„ „ basal tergite	6.2 mm.
„ „ ninth tergite	2.2 mm.
„ „ subgenital operculum	8.0 mm.
„ „ front femora	19.5 mm.
„ „ intermediate femora	15.0 mm.
„ „ hind femora	18.0 mm.

Hab. Japan—Koyasan (VIII)

Type and two larvae, one male and other female, presented by Mr. K. Numajiri, are preserved in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

7. *Phraortes kumamotoensis*, sp. nov.

Pl. VIII [V] (Figs. 2, 3, 4, 5 & 6)

Closely allied to the preceding species and to *elongatus*, but in female distinguished from the former by the position of the crescent foveoles of the median segment and the narrow apico-inferior lamellae of the four posterior femora, and from the latter by the relatively short subgenital operculum and the relatively long median segment; in the male by the triangularly emarginated subgenital plate. This new species also may be a local variety of *elongatus*.

♀. Elongate and long, freely granulated, pale brown or yellowish green. Head rather long, slightly narrowed behind, with two short conical spines between the eyes; eyes circular, prominent, longer than one-third the lateral length of head behind the eye; antennae nearly as long as the front leg, the first joint being as long as twice the second joint.

Pronotum rectangular, distinctly longer than wide or a little shorter than the head, with a distinct transversal sulcus in the middle. Mesonotum gradually broadened behind,  $4\frac{1}{2}$  times as long as the pronotum, with a conspicuous but fine longitudinal median carina. Metanotum (with median segment) as long as five-sixths the length of the mesonotum, nearly parallel-sided, with the fine longitudinal median carina which is interrupted before the median segment; the latter slightly broader than long, hardly longer than one-fourth the length of the metanotum alone, with the crescent foveoles before the middle.

Abdomen much longer than the head and thorax together, with a fine longitudinal median carina which is obsolete in the posterior one-third, very slightly narrowed posteriorly, the greatest length being at the fourth; seventh tergite tectate, slightly carinate, conspicuously shorter than the two following tergites together; ninth tergite tectate, carinate, longer than the preceding one, its apical margin deeply emarginate triangularly, with the triangular apical lobes; supra-anal plate more or less tectate, strongly carinate and broadly rounded apically, slightly extending behind the apical lobes of the ninth tergite; 6th sternite with a rather long compressed apical median elevation which does not exceed the posterior margin of this tergite; subgenital operculum scoop-like, compressed and carinate, hardly reaching

to the posterior end of the ninth tergite, its apex being broadly rounded.

Legs slender, not serrate nor lamellate, except the spinulate triangular, apico-inferior lamellae of the four posterior femora; inferior basal lobe of the four posterior tibiae rather large; anterior femora longer than the mesonotum, and posterior femora shorter than the anterior pair and shorter than the median ones; genicular lobes of the four posterior femora small, with a rather obtusely angled apex; tibiae as long as the corresponding femora.

♂. Linear, pale greenish, with an ill-defined reddish lateral streak on the meso- and metanotum, and with a dark coloured genicular portion. Head rather long, slightly narrowed behind, without spine, with an indistinct pale lateral streak behind the eye; eyes circular moderately prominent, as long as three-sevenths the lateral length of the head behind the eye; 1st antennal joint  $2\frac{1}{2}$  times as long as the second joint.

Pronotum conspicuously shorter than the head and distinctly longer than wide, rectangular, with the transversal sulcus before the middle. Mesonotum broadened at the both ends, with a faint longitudinal median carina, fully six times as long as the pronotum. Metanotum (with the median segment) moderately narrowed at the middle, with an indistinct longitudinal median carina which is interrupted before the median segment, as long as three-fourths the length of the mesonotum; median segment a little longer than wide or nearly three-tenths as long as the metanotum alone, with the crescent foveoles before the middle.

Abdomen distinctly longer than the head and thorax together, narrowest at the 6th segment and broadest at the 7th and 8th segments, the greatest length being at the fourth and fifth tergites; 7th tergite as long as the 8th, broadened apically, tectate and rather sharply carinate; 8th tergite narrowed apically, tectate and rather sharply carinate; ninth tergite as long as the preceding one, deeply incised, the apical lobes when seen from side being suddenly narrowed at the apical half and rounded at the apex, dentate inside; subgenital plate much longer than the preceding sternite but shorter than the seventh sternite, sharply carinate, very slightly triangularly emarginate at the apical margin; cerci distinctly bent at the apical one-third. Legs long and slender, not serrate nor lamellate, but with the narrow bidentate infero-apical lamellae of the four posterior femora; anterior femora longer than the pro- and mesonotum together, or very slightly shorter than the anterior tibia; hind femora distinctly shorter than the anterior pair or longer than the intermediate ones.

	♂	♀
Length of body	67.0–72.0 mm.	93.0–94.0 mm.
„ „ pronotum	2.5– 2.6 mm.	3.5– 3.8 mm.
„ „ mesonotum	14.2–15.7 mm.	18.6 mm.
„ „ metanotum (with median segment)	11.2–12.2 mm.	15.0–15.5 mm.
„ „ median segment	2.0– 2.5 mm.	3.0 mm.
„ „ abdomen	35.5–38.5 mm.	49.5–52.5 mm.
„ „ basal tergite	4.8 mm.	6.5– 6.6 mm.
„ „ 9th tergite	2.9– 3.0 mm.	2.7– 2.9 mm.
„ „ subgenital plate or operculum	3.0– 3.5 mm.	8.7– 8.0 mm.
„ „ front femora	19.0–20.0 mm.	20.2–22.0 mm.
„ „ intermediate femora	15.5 mm.	14.5–15.5 mm.
„ „ hind femora	18.5–18.8 mm.	16.5–17.4 mm.

Hab. Japan—Kumamoto (VIII, 2♂♂, 2♀♀), Fukuoka (X, 1♀).

Described from one pair collected at Kumamoto; preserved in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

8. *Phraortes miyakoensis*, sp. nov.

Pl. VIII [V] (Figs. 7, 8, 9, 10 & 11)

In the female it is characterized by the robust body which is conspicuously granulated, the non-spined head, and the narrow and flat apical median elevation of the 6th sternite; in the male by the thick body, the distinctly sinuate subgenital plate, and the strongly bent cerci.

♀. Pale yellowish green or pale yellowish brown, robust, distinctly but minutely granulated. Head relatively short, more or less broadened apically, with two inconspicuous notches between the eyes and with four distinct elevations along the posterior margin; eyes circular, moderately prominent, as long as one-third the lateral length of head behind the eye; antennae nearly as long as the front leg, the first joint being parallel-sided and twice as long as the second joint which is a little longer than the third.

Pronotum a little shorter than the head, distinctly, but slightly, broadened at the posterior half, with the transversal sulcus in the middle. Mesonotum  $4\frac{1}{4}$  times as long as the pronotum, gradually narrowed behind, with an indistinct longitudinal median carina. Metanotum (with the median segment) about four-fifths the length of the mesonotum, very slightly narrowed at the middle, with the distinct longitudinal median

carina; median segment transverse, distinctly shorter than one-third the length of the metanotum alone, with an indistinct longitudinal carina and two very short crescent foveoles before the middle. Abdomen longer than the head and thorax together, gradually narrowed posteriorly, the greatest length being at the fourth and fifth tergites, and the smallest at the ninth tergite, with a fine longitudinal carina throughout the whole length; seventh tergite tectate, very slightly longer than the two following tergites together, strongly carinate; ninth tergite tectate, strongly carinate, its apical margin broadly and so slightly emarginated as the apical lobes are very short and subtriangular; supra-anal plate more or less tectate and carinate, clearly exceeding the lateral tips of the ninth tergite, with the rounded hind margin; sixth sternite with the narrow depressed median elevation which clearly extends beyond the posterior margin; subgenital operculum scoop-like, very slightly exceeding the tip of the ninth tergite but not reaching to the posterior end of the supra-anal plate, compressed and carinate.

Legs long and slender, not lamellate nor serrate, excepting of the subtriangular dentate infero-apical lamellae of the femora; anterior femora as long as the anterior tibiae or very slightly longer than the mesonotum; posterior femora distinctly shorter than the mesonotum and longer than the intermediate femur or metanotum (with median segment); posterior tibia as long as the posterior femur, while the intermediate tibia is shorter than the corresponded femur.

♂. Linear, green or yellowish brown, uniformly coloured, distinctly granulated. Head and prothorax very similar to the female, but the former without any spine-like elevation between the eyes.

Mesonotum five times as long as the pronotum, gradually broadened behind, with a fine longitudinal median carina. Metanotum (with the median segment) two-thirds as long as the mesonotum, with a fine longitudinal median carina; median segment as long as wide or two-sevenths as long as the metanotum alone, with the very indistinct crescent foveoles just before the middle.

Abdomen longer than the head and thorax together, with a fine longitudinal median carina, the greatest length being at the fourth and fifth tergites, and the smallest at the eighth tergite, gradually narrowed toward the apex of the 6th tergite and then broadened toward the eighth tergite; ninth tergite tectate and carinate, distinctly longer than the 7th tergite, the apical lobes when seen from side gradually narrowed toward the apex where it is not pointed and distinctly denticulated inside; sub-



genital plate distinctly longer than the preceding sternite and exceeding beyond the end of the 8th tergite, its apical margin rounded but triangularly emarginate in the middle; cerci strongly curved inwards.

Legs rather stout and long, without lamellae or spines, the infero-apical lamellae of femora rather narrow and very few dentate; anterior femora as long as the head and pro- and mesothorax together; posterior femora as long as the pro- and mesothorax together or longer than the intermediate femora; tibiae as long as the corresponding femora, but the intermediate pair distinctly shorter.

	♂	♀
Length of body	78.0–79.0 mm.	88.0–95.0 mm.
„ „ pronotum	3.3– 3.6 mm.	3.6– 4.0 mm.
„ „ mesonotum	17.0–17.5 mm.	19.5–20.0 mm.
„ „ metanotum (with median segment)	12.3–12.7 mm.	14.0–15.8 mm.
„ „ median segment	2.6– 2.7 mm.	3.0–3.5 mm.
„ „ abdomen	42.0–44.0 mm.	47.0–50.0 mm.
„ „ basal tergite	5.5– 5.8 mm.	6.6– 6.8 mm.
„ „ 9th tergite	3.7– 3.8 mm.	2.5 mm.
„ „ subgenital plate or operculum	2.2– 2.3 mm.	9.0– 9.7 mm.
„ „ front femora	22.5–23.2 mm.	19.3–20.3 mm.
„ „ intermediate femora	17.2–17.5 mm.	15.0–15.6 mm.
„ „ hind femora	20.0 mm.	17.0–19.0 mm.

Hab. Okinawa—Miyako (VII), Ishigaki (VII).

Described from one pair collected in Miyako-Island; preserved in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

#### Subfam. **Phibalosominae**, REDTENBACHER

Only one genus is found in Formosa

#### Genus **Megacrania**, KAUP

Berlin, Ent. Zeitschr., XV, p. 28 (1871)

*Platycrania* (pt.), WESTWOOD, BATES, etc.

*Megacrania tsudai*, SHIRAKI, Pl. X [VII] (Fig. 5)

Dobutsugaku Zasshi, Tokyo, XLV, pp. 532–533 (1932)

Hab. Formosa—Kankau (VII)

Many females preserved in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

Subfam. **Necrosciinae**, REDTENBACHER

Three genera found in the Japanese Empire are distinguished by the following key:

1. Subgenital operculum incised apically; subgenital plate short, arched; seventh sternite of female with a large round apical groove

*Trachythorax*, REDTENBACHER

11. Subgenital operculum pointed or rounded apically; seventh sternite of female without apical groove.

2. Head convex above; subgenital plate rounded at the apex; subgenital operculum pointed; cerci cylindrical, slightly curved

*Micadina*, REDTENBACHER

22. Head depressed; subgenital plate obtusely angled or pointed; subgenital operculum pointed or rounded; cerci straight

*Sipyloidea*, BRUNNER VON WATTENWYL

Genus **Micadina**, REDTENBACHER

BRUNNER VON WATTENWYL, Phasmiden, p. 533,

Taf. XXVII, fig. 4 (1908)

In addition to REDTENBACHER's description: Ocelli are rudimentary or distinctly presenting; supra-anal plate of female very slightly or not exposed hindward; cerci slightly or conspicuously curved; ovipositor exposed behind the subgenital operculum.

Genotype—*Marmessoides phluctacnoides*, REHN.

Four species, found in the Japanese Empire, are distinguished by the following key:

Female.

1. The apical margin of frons very narrow; cerci reaching to the apex of the ninth tergite.
2. Tegmina densely reticulated; ninth tergite truncate, but slightly triangularly emarginate *phluctacnoides*, REHN
22. Tegmina coarsely reticulated; ninth tergite rounded, but very slightly sinuate in the middle *rotundata*, sp. nov.
11. The apical margin of frons broad; cerci conspicuously exceeding the apex of the ninth tergite.
2. Pronotum with a transversal sulcus distinctly in front of the

posterior two-thirds; ninth tergite distinctly emarginated triangularly; supra-anal plate not exceeding the lateral tips of the ninth tergite *yasumatsui*, sp. nov.

22. Pronotum with a transversal sulcus behind the anterior one-third; ninth tergite truncate; supra-anal plate conspicuously exposed hindward *sonani*, sp. nov.

Male.

1. Ninth tergite as long as the seventh tergite, moderately carinate; cerci straight.
2. Ninth tergite about as long as the 7th, moderately dentate inside the apex *phluctaenoides*, REHN
22. Ninth tergite distinctly longer than the 7th, conspicuously dentate inside the apex *rotundata*, sp. nov.
11. Ninth tergite distinctly shorter than the seventh tergite, not carinate; cerci strongly curved inward *sonani*, sp. nov.

1. *Micadina phluctaenoides*, REHN

*Marmessoidea phluctaenoides*, REHN, Proc. Acad. Nat. Sci. Philadelphia, p. 74 (1904).

Hab. Japan—Gifu (♂♀); Totomi (♀); Fukuoka (VII, ♀♀).

Types in the Academy of Natural Science of Philadelphia, U.S.A.

2. *Micadina rotundata*, sp. nov.

Figs. 2 and 3; VIII [V] (Figs. 12, 13 & 14);

Pl. X [VII] (Fig. 1 & 2)

Very closely allied to the preceding species, but differs in the following characters:

Female.

1. Head not narrowed behind, strongly rounded.
2. Apical margin of the frons distinctly rounded (in *phluctaenoides* it is straight).
3. Eyes comparatively small, nearly as long as half the lateral length of the head behind the eye (in *phluctaenoides* slightly shorter).
4. Ocelli rather distinct (in *phluctaenoides* almost always rudimental).
5. Tegmina coarsely reticulated (in *phluctaenoides* densely reticulated).
6. Ninth tergite conspicuously rounded at the apex, where it is very minutely sinuated in the middle.
7. Subgenital operculum hardly reaching to the apex of the eighth tergite.

## Male.

1. Antennae conspicuously longer than the abdomen (also in *phluctaenoides*, differing from the original description); third joint of antennae nearly as long as the first (in *phluctaenoides* distinctly shorter); second joint proportionately very short.

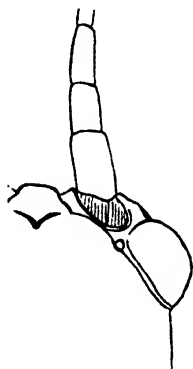


Fig. 2 ( $\times$  ca. 8)  
A part of the head of  
*Micadina*  
*rotundata* ♀.

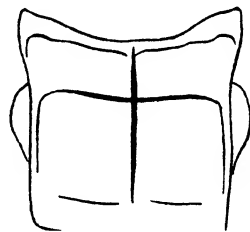


Fig. 3 ( $\times$  ca. 8)  
Pronotum of  
*Micadina rotundata* ♀.

2. Tegmina much more coarsely reticulated than that of *phluctaenoides*.
3. Wings never reaching the abdominal apex (also in *phluctaenoides*, REHN's description being incorrect).
4. Eighth tergite comparatively long,  $1\frac{1}{2}$  times as long as the 7th, in *phluctaenoides* only  $1\frac{1}{3}$  times as long as the 7th; ninth tergite distinctly longer than the 7th.

	♂	♀
Length of body	34.0–38.0 mm.	47.0–53.0 mm.
.. .. pronotum	2.1– 2.2 mm.	2.8– 2.9 mm.
.. .. mesonotum	5.3– 6.3 mm.	8.2–10.2 mm.
.. .. abdomen	17.0–21.5 mm.	25.0–27.6 mm.
.. .. 9th tergite	2.0 mm.	3.0 mm.
.. .. subgenital plate or operculum	1.0– 1.3 mm.	4.2– 4.8 mm.
.. .. front femora	9.1–10.5 mm.	10.2–10.4 mm.
.. .. intermediate femora	6.0– 6.1 mm.	7.3– 7.4 mm.
.. .. hind femora	9.5–10.0 mm.	10.8–11.1 mm.

Hab. Amami-Oshima—Nase (♂, ♀♀ VII); Shiro (♂ VII); Nishinakama (♀ VII)

Okinawa—Nago (♂, ♀♀ VII)

The present species may be a local variety of *phluctaenoides*; types are

preserved in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

3. *Micadina yasumatsui*, sp. nov.

Figs. 4 and 5; Pl. VIII [V] (Figs. 15 & 16)

♀. Allied to *M. phluctaenoides*, REHN and *rotundata*, SHIRAKI, but easily distinguished from the both species by the broad and straight apical margin of frons, the rather narrowly produced ninth tergite, and the long cerci.

Head large, conspicuously broader than the pronotum, very slightly narrowed behind; the apical margin of frons broad and straightly carinate, its carina being about twice as long as that of *phluctaenoides*; ocelli distinct; eyes nearly as long as half the lateral length of the head behind the eye.

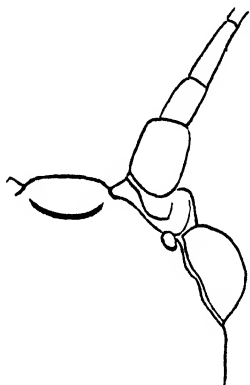


Fig. 4 ( $\times$  ca. 8)  
A part of the head of  
*Micadina yasumatsui*.

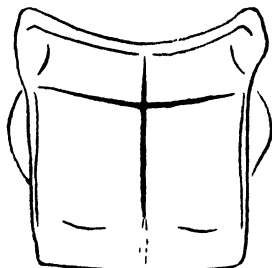


Fig. 5 ( $\times$  ca. 8)  
Pronotum of  
*Micadina yasumatsui*.

Pronotum comparatively short, with the transversal median sulcus distinctly before the posterior two-thirds, and with the longitudinal median sulcus distinct and its posterior part becoming a fine carina and reaching the hind margin. Mesonotum longer than the head and pronotum together or as long as the intermediate femora, rather narrow, slightly expanded behind, with the distinct median and lateral carinae, roughly tuberculose.

Tegmina short, when seen from dorsum elongate and nearly quadrate (in *phluctaenoides* and *rotundata* distinctly produced inward), distinctly and very roughly reticulated; the elevated portion not pointed, and distinct only in the anterior half, while in *phluctaenoides* and *rotundata* it is more or less pointed and placed in the posterior two-thirds. Wings reaching or exceeding the hind margin of the fourth tergite, the lateral area with a

rather regular reticulation and two rather distinct intercalary veins.

Abdomen somewhat inflated, the greatest width being at the second and third tergite, and the least at the sixth; seventh and eighth tergites tectate, the former a little shorter than the latter; ninth tergite very slightly longer than the preceding tergite, the apex narrowly produced and with a distinct triangular median emargination, when seen from side the apico-inferior margin distinctly sinuate; supra-anal plate distinctly exposed between the apical lobes of the ninth tergite but not long; cerci straight, conspicuously exceeding beyond the apex of the ninth tergite; subgenital operculum tectate, the apex broadly rounded and reaching to the apex of the eighth tergite. Legs short; anterior femora as long as the pro- and mesonotum together or distinctly longer than the tibiae, the basal curvature slight; anterior metatarsi nearly as long as the remaining tarsal joints together; intermediate femora and tibiae short, the former very slightly longer than the latter or as long as the mesonotum, both distinctly longer than the two basal tergites together; posterior femora conspicuously longer than the pro- and mesonotum together, or a little longer than the tibiae.

Length of body	♀ 43.0–51.5 mm.
.. .. pronotum	2.8– 3.0 mm.
.. .. mesonotum	7.0– 8.0 mm.
.. .. abdomen	21.6–27.0 mm.
.. .. 9th tergite	2.5– 2.8 mm.
.. .. subgenital operculum	4.0– 5.0 mm.
.. .. front femora	9.5–11.3 mm.
.. .. intermediate femora	7.2– 8.6 mm.
.. .. hind femora	11.1–12.9 mm.

Hab. Japan—Sobosan (VII); Ubasha (VIII)

Type in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

#### 4. *Micadina sonani*, sp. nov. Pl. IX [VI] (Figs. 1, 2 & 3)

The present species is readily distinguished from the three preceding ones by the form of the ninth tergite and of the supra-anal plate of the female, and by the non-carinated ninth tergite and strongly curved cerci of the male.

♀. Head large, distinctly broader than the pronotum, and broadened at the middle; frons with a distinct V-shaped furrow; the apical margin of frons very broad, distinctly broader than the width of the first antennal

joint, very slightly curved forward but in the middle very indistinctly sinuate, its carination rather indistinct and comparatively longer than in *yasumatsui*; occiput with 3 distinct but fine longitudinal sulci which extend distinctly forward, and with four very faint longitudinal streaks of which the two internal ones are situated between the sulci and each of the remaining ones is placed exteriorly on the external sulcus; ocelli wanting; eyes small, oval, about as long as  $\frac{2}{3}$  the lateral length of the head behind the eye; the first joint of antennae hardly twice as long as the second or  $1\frac{1}{2}$  times as long as the third.

Pronotum rather long, with the anterior and posterior margins very slightly curved inwards; transversal sulcus one-third behind the anterior margin, nearly straight; median longitudinal sulcus distinct, reaching to the fine posterior transversal streak. Mesonotum conspicuously longer than the head and pronotum together, or longer than the intermediate femora, very irregularly rugose, with the distinct median and lateral carinae.

Tegmina short, when seen from dorsum more or less triangular, irregularly reticulated; the elevated portion just before the middle, very slightly raised. Wings reaching to the posterior margin of the third tergite; the lateral area rather irregularly reticulated, without distinct intercalary vein; the dorsal area sparsely reticulated; anal area very pale pink coloured.

Abdomen longer than the head and thorax together, slightly inflated, the greatest width being at the fourth segment; seventh and eighth tergite-ectate, but not carinate, the former very slightly shorter or broader than the latter; ninth tergite as long as the preceding one, the apex narrowly produced and truncated, when seen from side the lateral margin conspicuously sinuated at the apical one-third; supra-anal plate distinctly exposed behind, broader than long, with the rounded apical margin and the distinct median longitudinal carina; cerci long and straight, conspicuously exposed behind; subgenital operculum tectate and pointed, hardly reaching to the hind margin of the eighth tergite; ovipositor conspicuously exposed behind the operculum. Legs short; anterior femora as long as the pro- and mesonotum together or longer than the tibiae, the basal curvature rather strong; intermediate femora shorter than the mesonotum or distinctly longer than the intermediate tibiae; hind femora as long as the front femora or very slightly longer than the tibiae.

♂. Head comparatively large, with the sides nearly parallel-sided but conspicuously constricted at the hind portion; the apical margin of the frons narrower than the width of the first antennal joint; the longitudinal

sulci of the occiput very short, excepting the median one; eyes longer than a half the lateral length of the head behind the eye; the first joint of antennae slightly longer than wide, distinctly shorter than twice the length of the second joint and shorter than the third (in *phluctaenoides* and *rotundata* distinctly longer).

Pronotum as in the female, but the median longitudinal sulcus reaching the hind margin. Mesonotum conspicuously narrowed at the middle portion and very much broadened hindward, about  $1\frac{1}{2}$  times as long as the head and pronotum united, or shorter than the intermediate femora.

Wings long, distinctly exceeding beyond the fourth tergite, the anal area fuscous.

Abdomen definitely longer than the head and thorax together, swollen at the anal portion; eighth tergite longer than the seventh or ninth, swollen above, with the lateral margin distinctly waved; ninth tergite strongly swollen above, without carina but with a fine median longitudinal sulcus, the posterior margin broadly and roundly sinuated, the lateral margin conspicuously sinuated at the middle; supra-anal plate not seen; cerci very long and strong, strongly curved, pointed, before the tip there is a short tooth; eighth sternite as long as the seventh, strongly tectate, but without carina, with the posterior margin rounded; subgenital plate enormously swollen, shorter than the eighth sternite from which it is separated by a distinct groove, with a fine longitudinal median sulcus in the posterior half, the hind margin rounded and reflexed.

Legs comparatively long; anterior femora as long as the head and pro- and mesonotum together, or a little longer than the tibiae, the basal curvature rather slight; intermediate femora a little shorter than the pro- and mesonotum together, and very slightly longer than the tibiae; hind femora very slightly longer than the tibiae or the front femora.

	♀	♂
Length of body	40.0 mm.	39.5 mm.
.. .. pronotum	2.8 mm.	2.2 mm.
.. .. mesonotum	7.9 mm.	7.0 mm.
.. .. abdomen	21.2 mm.	20.8 mm.
.. .. 9th tergite	2.4 mm.	1.8 mm.
.. .. subgenital operculum or plate	3.6 mm.	1.4 mm.
.. .. front femora	8.6 mm.	10.8 mm.
.. .. intermediate femora	5.0 mm.	7.8 mm.
.. .. hind femora	8.6 mm.	11.0 mm.



Hab. Formosa—Shinchiku (VII) ♂♀ and one male larva.

Types in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

Genus **Trachythorax**, REDTENBACHER

Brunner von Wattenwyl, Phasmiden, p. 507, pl. XXVI, fig. 3 (1908)

*Calvisia*, BRUNNER VON WATTENWYL (pt.), Ann. Mus. Genova, XXXIII, pp. 84, 85 (1893).

Only one species found in Formosa.

*Trachythorax 6-punctatus*, SHIRAKI, Pl. IX [VI] (Figs. 4, 5 & 6)

*Necroscia 6-punctata*, SHIRAKI, Ann. Zool. Jap., VII, p. 304, pl. XII, fig. IV (1911).

The species has been described by me for the male only; the female differing from it as follows:

- 1). Body very large, about twice as long as the male and definitely robust.
- 2). Anterior margin of frons comparatively broad, as broad as the basal width of the first antennal joint, while in the male distinctly narrower; occiput much more swollen above.
- 3). Antennae not reaching to the abdominal end (in the male longer than body); first joint distinctly longer and broader than the second joint, while in the male nearly as long as or slightly narrower than the second.
- 4). Prothorax comparatively broad, the median transversal sulcus being situated rather near to the middle; mesonotum without the black longitudinal stripe, with two black spots (in my description of male not noted) near the lateral side, the anterior one situated just before the middle (in the male just after the middle).
- 5). Tegmina with the elevated portion conspicuously raised and carinated; wings nearly reaching the abdominal end.
- 6). Abdomen gradually narrowed hindward; 9th tergite distinctly longer than the preceding one and a little shorter than the 7th tergite, tectate and carinate on the apex where it is distinctly triangularly emarginated, when seen from side rather triangular and pointed, the apical half of the lower margin being distinctly sinuated; cerci short, straight, moderately exposed behind, the tip rather pointed when seen from above and on the under side with a round groove; subgenital operculum reaching to the middle of the 9th tergite, rather flat, with a longitudinal median carina on the apical half, the tip triangularly

emarginated; 7th sternite nearly as long as the operculum, with two apical elevations, between which one deep groove is presented.

7). Legs comparatively short.

Length of body	80.0–83.0 mm.
„ „ pronotum	4.5– 5.0 mm.
„ „ mesonotum	7.3– 7.5 mm.
„ „ abdomen	44.0–47.0 mm.
„ „ apical tergite	2.4– 2.5 mm.
„ „ subgenital operculum	5.2– 5.8 mm.
„ „ front femora	16.5–18.5 mm.
„ „ intermediate femora	13.0–13.2 mm.
„ „ hind femora	18.0–19.5 mm.

Hab. Formosa—Koshun (IV, V); Taito (III); Toroku (V)

Types are preserved in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

Genus **Sipyloidea**, BRUNNER VON WATTENWYL

Ann. Mus. Genova, XXXIII, pp. 84, 86 (1893)

*Necroscia* (pt.), WESTWOOD, BATES, DE HAAN, etc.

Three species found in the Japanese Empire, are distinguished by the following key:

1. Legs long and slender; front femora longer or as long as the head and pro- and mesonotum together; wings of female very long, clearly exceeding the middle of the abdomen.
2. Ninth tergite of female not emarginated at the apex, with the long and compressed cerci clearly extending beyond the apical tergite; subgenital operculum rather rounded at the apex; usually dirty pale brownish *sipylus*, WESTWOOD
22. Ninth tergite of female emarginated at the apex, with the long and cylindrical cerci which slightly protrude behind; subgenital operculum rather sharply pointed; usually dark green *okunii*, sp. nov.
11. Legs short; front femora shorter than the head and pro- and mesonotum together; wings of female not reaching to the middle of abdomen *truncata*, sp. nov.

1. *Sipyloidea sipylus*, WESTWOOD

*Necroscia sipylus*, WESTWOOD, Cat. Phasm., p. 138, pl. 18, fig. 4 (1859).

*Necroscia samsoo*, WESTWOOD, Cat. Phasm., p. 132, pl. 10, fig. 6 (1859).

Hab. Japan—Kumamoto, Amami-Oshima.

Formosa—Taihoku (VIII, IX), Toyen (IX), Nanto (V),  
Tabo (V), Rantaisan (V), Kayahara (VII),  
Kosempo, Kashoto (IV).

Assam; Java; China; Borneo; Celebes; Sumatra; Tonking;  
Queensland.

In Formosa this insect is known as a pest of upland cotton plant.

2. *Sipylloidea okunii*, sp. nov.

Figs. 6 & 7; Pl. IX [VI] (Figs. 11 & 12)

The present species is very characteristic in the non-granulated thorax and in the pale pink coloured anal area of the wings.

♀. Olive-green, with the abdomen and legs pale, long and slender. Head smooth, rather flat, a little broader than the pronotum, parallel-sided; frons more or less carinated at the frontal margin, where it is narrower than the basal joint of antennae, with a deep V-shaped furrow in the middle; occiput not specially elevated, with three distinct longitudinal sulci, of which the median one extends to the V-shaped frontal furrow and the others are conspicuous only at the posterior portion; antennal sclerite very narrow, not prominently elevated. Eyes moderately prominent, oval, narrowed forward; ocelli wanting. Antennae not reaching to the anal end, olive-green, gradually paler and brown-coloured toward the tip, with one very broad whitish ring near the tip; first joint about  $1\frac{1}{2}$  times as long as wide, or about  $1\frac{1}{3}$  times as long as the second joint; 3rd joint long, nearly as long as the first joint.

Pronotum smooth, about  $1\frac{1}{2}$  times as long as wide, the anterior part slightly broadened, with the straight transversal sulcus before the middle, and with the median longitudinal sulcus distinct and hardly reaching to the hind margin. Mesonotum smooth, with the distinct median longitudinal carina, about  $3\frac{1}{2}$  times as long as the pronotum, very slightly broader than the pronotum but much broader toward the hind margin; meso- and meta-pleurae smooth.

Tegmina long, with the hind margin round, rather regularly reticulated; radial and cubital vein not furcated, median vein not furcated or bifurcated; anal veins two. Wings not reaching to the anal end, with non-fulcate longitudinal veins and many transversal veins, on the lateral area

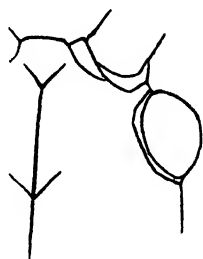


Fig. 6 (× ca. 8)  
A part of the head of  
*Sipylloidea okunii*.

with two distinct intercalary veins, one in the subcostal area and other in the radial area; anal area pale pink coloured.

Abdomen long and slender; ninth tergite more or less tectate, but the apical producing portion flattened, not carinated, only slightly shorter than the seventh or longer than the eighth, the apical margin emarginated, with the apical lobes which are triangular but rounded at the tip; supra-anal plate very small, nearly round, not reaching the tip of the apical lobes of the ninth tergite; subgenital operculum very slightly naviculated, hardly exceeding the eighth tergite, more or less pointed; cerci long, moderately exposed behind, moderately pubescent, compressed but the apical, one-third rather depressed and obliquely truncated beneath.

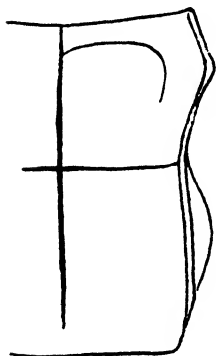


Fig. 7 ( $\times$  ca. 8)  
Right half of the  
pronotum of *Sipyloidea*  
*okunii*

Legs linear, long, without spines or lamellae; front femora longer than the head, pronotum and mesonotum together, the basal curvature moderate; median femora longer than the mesonotum; hind femora as long as the front femora; front, median

and hind tibiae distinctly shorter than the respective femur.

Length of body	♀ 70.0–73.0 mm.
„ „ pronotum	3.5– 4.00 mm.
„ „ mesonotum	11.5–12.0 mm.
„ „ basal tergite	5.7– 5.8 mm.
„ „ 9th tergite	2.9– 3.1 mm.
„ „ subgenital operculum	6.3– 6.9 mm.
„ „ tegmina	5.4– 5.9 mm.
„ „ wings	36.0–39.0 mm.
„ „ front femora	20.0 mm.
„ „ median femora	13.0–15.0 mm.
„ „ hind femora	19.8 mm.

Hab. Formosa—Kotosho (IV). Two females and one male (destroyed) collected by Mr. T. Okuni.

Type in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

3. *Sipyloidea truncata*, sp. nov.

Figs. 8 and 9; Pl. IX [VI] (Figs. 7, 8, 9 &amp; 10);

Pl. X [VII] (Fig. 3 &amp; 4)

This species is very distinct in its short legs, the short head, slightly granulated pleurae, truncated 9th tergite, etc.

♀. Brownish, with the legs and abdomen pale greenish, rather stout. Head very much broader than the pronotum, rather rounded, comparatively short, with the lateral sides moderately curved outwards; front at the frontal margin nearly as wide as the basal joint of the antennae and slightly curved forward, with a rather deep and broad-shaped median furrow; antennal sclerite narrow, slightly elevated; occiput moderately swollen, with three fine longitudinal sulci, of which the median one extends forward, while the lateral ones are very short. Eyes rounded but narrowed forward, fully as long as half the lateral length of the head behind the eye; ocelli more or less distinct. Antennae distinctly shorter than the body; the first joint  $1\frac{1}{2}$  times as long as the second which is very slightly shorter than the third.

Pronotum smooth, hardly  $1\frac{1}{2}$  times as long as the width of the posterior area where it is parallel-sided, the anterior portion before the transversal sulcus distinctly broader than the remaining portion; the transversal sulcus situated on the anterior one-third, straight; the median longitudinal sulcus fine, extending to both the front and hind margin. Mesonotum broader than the pronotum, gradually broadened behind, four times as long as the pronotum, densely granulated, with the longitudinal carina very distinct; mesopleurae more or less granulated.

Tegmina short, rather truncated behind, the whole sparsely reticulated, pale purplish brown, with a pale yellowish green longitudinal streak just beneath the elevated portion where it is blackish, obtusely pointed and placed just before the middle. Wings rather short, reaching to the middle of the 3rd tergite, paler than the tegmina, with a pale yellowish

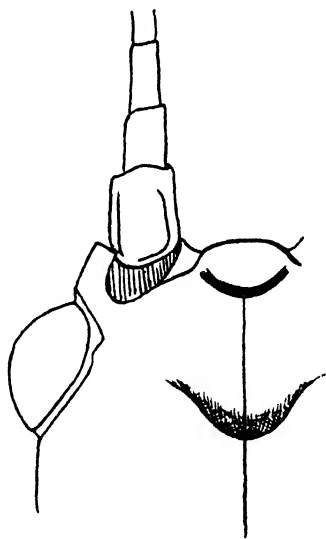


Fig. 8 ( $\times$  ca. 8)  
A part of the head of  
*Sipyloidea truncata*.

green longitudinal streak between the dorsal and lateral area, the streak being short and not reaching to the middle; anal area slightly infuscated; radial vein distinctly bifurcated near the base; median vein single; cubital vein bifurcated at the base; transversal veins rather regular.

Abdomen very much longer than the head and thorax together, cylindrical but the apical portion more or less compressed, the least width being at the sixth and seventh segments; ninth tergite longer than the sixth and seventh tergite, more or less protruding behind, with the apex broadly truncated and never sinuated, and with the lateral margin slightly sinuated posteriorly; supra-anal plate slightly protruding posteriorly, with the apex round; subgenital operculum short, not reaching to the apex of the eighth tergite, carinate, pointed; cerci rather short, straight, moderately exposed behind.

Legs short; front femora nearly as long as the mesonotum, with the basal section strongly bowed; median femora about  $\frac{3}{4}$  as long as the mesonotum; hind femora as long as the mesonotum; each of the tibiae shorter than the respective femur.

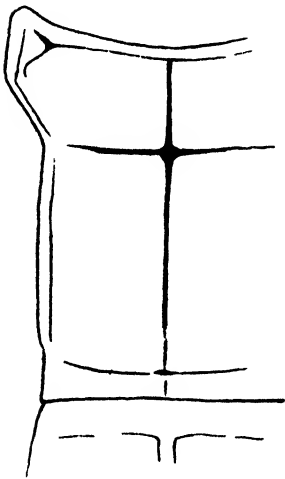


Fig. 9 ( $\times$  ca. 8)

Left half of the pronotum of  
*Sipylodea truncata*.

$\delta$ . Rather small and linear, paler than in the female. Head very much broader than the pronotum, distinctly broadened forward, smooth; frons at the apical margin very slightly narrower than the basal joint of the antennae; occiput less convex than in the female; eyes very prominent, comparatively large, longer than half the lateral length of head behind the eye; ocelli distinct. Antennae shorter than the body, brown; first joint distinctly longer than the second or as long as the third.

Pronotum as in the female. Mesonotum four-times as long as the pronotum, slightly narrowed at the middle, granulose and carinate;

pleurae slightly granulose.

Tegmina as in the female. Wings long, reaching to the 5th tergite, more greenish than in the female, the greenish stripe extending past the middle; radial vein not furcated, single.

Abdomen linear, the least width being at the fifth segment, strongly swollen at the anal portion; ninth tergite strongly swollen, conspicuously

shorter than the preceding one but as long as the seventh, the apex reflexed and its underside distinctly dentate; eighth tergite swollen; about twice as long as the seventh, with a fine median longitudinal carina; supra-anal plate not visible; subgenital plate enormously swollen, the tip reflexed and more or less pointed; eighth sternite nearly as long as the following one, or nearly as long as the preceding one, with a distinct median longitudinal carina throughout; cerci straight and short, barely protruding behind.

Legs entirely pale green, excepting the tip of the front femora blackish; anterior femora longer than the pro- and mesonotum together or the tibiae, the basal curvature being slighter than in the female; median femora a little shorter than the mesonotum, or a little longer than the tibiae; hind femora a little longer than the front femora or the tibiae.

	♂	♀
Length of body	49.0–54.0 mm.	75.0–93.0 mm.
„ „ pronotum	2.2– 2.6 mm.	3.0– 3.8 mm.
„ „ mesonotum	9.0–10.2 mm.	15.0–18.3 mm.
„ „ tegmina	3.0– 3.1 mm.	4.2– 5.2 mm.
„ „ wings	23.8–26.6 mm.	21.0–24.5 mm.
„ „ 9th tergite	1.5– 1.6 mm.	3.3– 4.1 mm.
„ „ subgenital plate or operculum	1.8– 1.9 mm.	4.4– 5.0 mm.
„ „ front femora	12.4–13.5 mm.	15.0–16.5 mm.
„ „ median femora	8.6– 9.8 mm.	10.1–11.8 mm.
„ „ hind femora	13.0–14.6 mm.	14.9–17.2 mm.

Hab. Formosa—Taihoku (Sozan VII), many males and females, collected by Dr. Y. Miwa and Mr. T. Yoshida, feeding on chestnut and cherry trees.

Types in the Entomological Museum of the Government Research Institute, Taihoku, Formosa.

### Literature

- BATES, H. W.: Descriptions of 52 new species of Phasmidae etc. Trans. Linn. Soc. London, Vol. XXV, p. 321 (1865).
- BOISDUVAL, J. ALPH.: Faune entomologique de l'Océan Pacifique, avec l'illustration des Insectes nouveaux, recueillis pendant le voyage de l'Astrolabe etc. Orth. p. 647, (1832–35).
- BOLIVAR, IGNACIO: Sinopsis de los Ortopteros de Espana y Portugal. Madrid (1876).
- „ : Artropodos del Viaje al Pacifico. Ins. Neuropt. y Ortopt. Madrid (1884).
- BRUNNER v. WATTENWYL, C.: Révision du Systeme des Orthopteres et description des especes rapportées par M. Leon Fea de Birmanie. Ann. Mus. Civ. d. Stor. Nat. di Genova, Ser. 2. Vol. XIII ((XXXXIII), 23. No. (1892), 21. April (1893).

- „ : Phasmidae (Nova Guinea Résultats de l'Expédition scient. Néerl. a la Nouvelle Guinée en 1903 (1906).
- „ und REDTENBACHER: Die Insekten Familie der Phasmiden (1906–1908).
- CARL, T.: Phasmides nouveaux ou peu connus du Museum de Geneve. Revue Suisse Zool. Geneve, XXI (1913).
- CAUDELL, A. N.: On a collection of Orthopteroid insects from Java made by Owen Bryant and William Palmer in 1909. Proc. U. S. Nat. Mus., Washington, LXXI, art 3, no. 2675 (1927).
- CHOPARD, L.: Contribution a la faune des Orthopteres de la Guyane francaise. Paris Ann. Soc. Ent., LXXX (1912).
- DE GEER, K.: Mémoires pour servir a l'hist. des Insectes. T. III. Stockholm (1772–1778).
- DOHRN, H.: Beitrag zur Kenntnis der Phasmiden. Stettiner ent. Ztg., LXXI (1910).
- DONOVAN, EDW.: An epitome of the natural history of the insects of India etc. London (1800–1803).
- DRURY, DREW: Illustrations of natural history etc. Insects. Tom. II. London (1773).
- FINOT, A.: Faune de la France. Ins. Orthopt. Paris (1890).
- „ : Faune de l'Algérie et de la Tunisie. Ins. Orthopt. Paris 1897 (Ann. Soc. Ent. d. France 1895/6).
- GERSTÄCKER, A.: Beitrag zur Kenntnis der Orthopterenfauna Guineas. Mitt. d. naturw. Ver. f. Neu-Vorpommern und Rügen (1883).
- GIGLIO-TOS, E.: Boll. Mus. Torino, XXV, no. 625 (1910).
- „ : Specie nuove di Fasmidi raccolti dal Prof. L. Schultze nella nuova Guinea, Ent. Rdsch. Stuttgart, XXIX (1912).
- „ : Zoological Results of the Abor Expedition, 1911–12, XXXI. Orthoptera. III. Mantidae et Phasmidae. Rec. Ind. Mus. Calcutta, VIII (1914).
- GRAY, G. ROBERT: Synopsis of the species of Insects, belonging to the family of Phasmidae. London (1835).
- GÜNTHER, K.: Eine neue Stabheuschrecke aus Sumatra. Konowia, Vienna, VII (1928).
- „ : Die Phasmoiden der Deutschen Kaiserin-Augusta-Fluss-Expedition 1912/13.
- „ : Ein Beitrag zur Kenntnis der Phasmoidenfauna Neu-guineas. Mitt. Zool. Mus. Berlin, XIV (1928).
- „ : Weitere Beiträge zur Kenntnis der Phasmoidenfauna Neu Guineas. Mitt. Zool. Mus. Berlin, XVII (1931).
- „ : Beiträge zur Systematik und Geschichte der Phasmoidenfauna Ozeaniens. Mitt. Zool. Mus. Berlin, XVII (1931).
- „ : Phasmoiden des Kina Balu auf Borneo, aus dem Hamburger Zool. Museum Wien ent. Ztg., XLIV (1932).
- „ : Die von Professor Dr. H. Winkler 1924–25 in Zentralborneo gesammelten Phasmoiden. Zool. Anz., Leipzig, 101 (1932).
- „ : Revision des Genus Lonchodes Gray, Eos, VII, 4 (1932).
- DE HAAN, W.: Bijdragen tot de Kennis der Orthoptera. Verhandl. over de natuurlijke Geschiedenis der Nederlandsche overzeesche Bezittingen (1842).
- HUTTON, FR. W.: Revision of the New-Zealand Phasmidae. Trans. New-Zealand Inst. XXI, p. 40 (1899).
- KARNY, H. H.: Zur Nomenklatur der Phasmoiden, Treubia, III, 2 (1923).
- KIRBY, W. F.: Notes on Phasmidae in the collection of the British Museum, with descriptions of new species. Ann. Nat. Hist., XIII (1904).
- MACLEAY, W. S.: The insects of the Macley-Coast, New-Guinea. Proc. Linn. Soc. New-South-Wales (I) IX, p. 710 (1884).
- PANTEL, J.: Description de Carausius nouveaux et note sur les Carausius de l'Inde meridionale. Ann. Soc. ent. France. LXXXVI (1917).



- REHN, A. G.: Studies in the Orthopterous Family Phasmidae. Proc. Ac. Nat. Sc. Philad. January (1904).
- SAUSSURE, H. DE: Phasmidarum novarum species nonnullae. Rev. et Mag. Zool. (2) Tom. XX, p. 63 (1868).
- „ : Mélanges orthopterologiques. T. I, fasc. 2. 1863-1871. Geneve et Bâle.
- SERVILLE, AUDINET: Partie entomol. du X. Vol. des insectes de l'Encyclop. méthod. Paris. (1825).
- „ : Revue méthodique des Orthopteres. Ann. Sc. Nat. Tom. XXII, p. 28, 134, 262 (1831).
- „ : Histoire naturelle des Insectes. Orthopteres. Paris. (1839).
- SHIRAKI, T.: Phasmiden und Mantiden Japans. Ann. Zool. Japonenses, VII, 5 (1911).
- STÅL, C.: Observations orthopterologiques. I. Sur une Systematisation nouvelle des Phasmides. Bih. till K. Vet. Ak. Förh. III. No. 14 (1875).
- „ : Recensio Orthopterorum. Revue critique des Orthopteres décrits par Linné, de Geer et Thunberg. III. Stockholm (1875).
- „ : Recherches sur le systeme des Phasmides. Bih. till K. Sv. Vet. Ak. Handl. II, Nr. 17 (1875).
- „ : Espèces nouvelles des Phasmides. Ann. Soc. Ent. Belg. XX, p. LXIII (1877).
- „ : Orthoptera nova ex insulis Philippinis. Oefv. K. Vet. Ak. Förh. No. 10, p. 41 (1877).
- THUNBERG, C. P.: Dissertatio entomologica novas insectorum species sistens. Insect. P. III, p. 61 (1784).
- „ : Hemipterorum maxillosorum genera illustrata. Mém. d. l'Acad. imp. de St. Petersbourg, V (1815).
- WERNER, F.: Eine neue Gespenstheuschrecke aus Sumatra. Verh. Zool.-bot. Ges. Wien. LXVIII (1918).
- „ : Notes préliminaires sur les Phasmides recueillis aux Indes orientales néerlandaises au cours du voyage de S.A.R. le Prince Léopold de Belgique. Bull. Ann. Soc. ent. Belg., Brussels, LXX (1930).
- „ : Résultats scientifiques du voyage aux Indes orientales néerlandaises de LL.AA.RR. le prince et la princesse Léopold de Belgique. Phasmidae. Mantidae. Mém. Mus. Hist. nat. Belg., Brussels, IV, fasc. 1 hors serie (1932).
- WESTWOOD, J. OB.: Catalogue of the Orthopterous Insects in the collection of the British-Museum. Phasmidae. Part I. London (1859).
- „ : Rectifications de la nomenclature de plusieurs especes de Phasmides récemment décrits. Ann. Soc. Ent. France (4) IV, p. 201, pl. 6 (1864).
- WILLEMSE, C.: Contribution a la faune des Orthopteres des Nouvelles-Hébrides. Trans. Ent. Soc. London (1925).
- WOOD-MASON, JAMES: On new or little known species of Phasmidae. Journ. As. Soc. Bengal. Vol. XLII, P. II, p. 45 (1873).
- „ : Note on certain species of Phasmidae hitherto referred to the genus Bacillus. Proc. As. Soc. Bengal, July (1873).
- „ : On new or little known species of Phasmidae. Journ. As. Soc. Bengal., Vol. XLIV, P. II, p. 215 (1875).
- „ : Description of a new species of Phasmidae. Ibidem., Vol. XLV, P. II, p. 47 (1876).
- „ : New and little known Insects collected in Upper Tenasserim. Ibidem. Vol. XLVI, P. II, p. 162 (1877).
- „ : Notes on Phasmidae. Ibidem, Vol. XLVI, P. II, p. 342 (1877).
- „ : Description of a new species of Phasmidae from the Malay Peninsula. Ann. Mag. Nat. Hist., London, June (1877).

### Explanation of the plates

All figures are enlarged ( $\times$  ca. 3.6, except of Plate X [VII])

SA = Supra-anal plate; C = Cercus; O = Operculum;

SG = Subgenital plate; OV = Ovipositor; P = Penis;

ME = Median elevation of the 6th sternite.

#### Plate IV [I].

- Fig. 1. Anal segments of *Baculum formosanum* ♀ (Lateral view).
- Fig. 2. Dorsal view of the above.
- Fig. 3. Anal segments of *Baculum granulatus* ♀ (Lateral view).
- Fig. 4. Dorsal view of the above.
- Fig. 5. Anal segments of *Entoria ishigakiensis* ♀ (Lateral view).
- Fig. 6. Anal segments of *Entoria ishigakiensis* ♂ (Lateral view).

#### Plate V [II].

- Fig. 1. Anal segments of *Entoria koshunensis* ♀ (Lateral view).
- Fig. 2. Dorsal view of the above.
- Fig. 3. Anal segments of *Entoria okinawaensis* ♀ (Lateral view).
- Fig. 4. Anal segments of *Entoria koshunensis* ♂ (Lateral view).
- Fig. 5. Anal segments of *Entoria miyakocensis* ♂ (Lateral view).
- Fig. 6. Anal segments of *Entoria banshoryoensis* (Lateral view).
- Fig. 7. Dorsal view of the above.
- Fig. 8. Anal segments of *Entoria taihokuensis* ♀ (Lateral view).
- Fig. 9. Dorsal view of the above.

#### Plate VI [III].

- Fig. 1. Anal segments of *Entoria shinchikuensis* ♀ (Lateral view).
- Fig. 2. Ninth tergite of *Entoria shinchikuensis* ♀ (Dorsal view).
- Fig. 3. Basal part of the antenna of *Entoria shinchikuensis* ♀ (Dorsal view).
- Fig. 4. Anal segments of *Entoria kiirunensis* ♀ (Lateral view).
- Fig. 5. Ninth tergite of *Entoria kiirunensis* ♀ (Dorsal view).
- Fig. 6. Anal segments of *Entoria kiirunensis* ♂ (Lateral view).
- Fig. 7. Anal segments of *Entoria nagoensis* ♀ (Lateral view).
- Fig. 8. Ninth tergite of *Entoria nagoensis* ♀ (Lateral view).
- Fig. 9. Anal segments of *Entoria formosana* ♂ (Lateral view).
- Fig. 10. Anal segments of *Entoria takaocensis* ♀ (Lateral view).

#### Plate VII [IV].

- Fig. 1. Anal segments of *Entoria domonensis* ♀ (Lateral view).
- Fig. 2. Anal segments of *Entoria taitoensis* ♀ (Lateral view).
- Fig. 3. Anal segments of *Entoria taitoensis* ♂ (Lateral view).
- Fig. 4. Anal segments of *Entoria longiopercula* ♀ (Lateral view).
- Fig. 5. Ninth tergite of *Entoria longiopercula* ♀ (Dorsal view).
- Fig. 6. Anal segments of *Phraortes formosanus* ♀ (Lateral view).
- Fig. 7. Anal end of *Phraortes formosanus* ♀ (Dorsal view).
- Fig. 8. End of the operculum of *Phraortes formosanus* ♀ (Ventral view).
- Fig. 9. Anal segments of *Phraortes formosanus* ♂ (Lateral view).
- Fig. 10. Ninth tergite of *Phraortes formosanus* ♂ (Dorsal view).
- Fig. 11. Anal segments of *Phraortes formosanus* ♂ (Ventral view).

## Plate VIII[V].

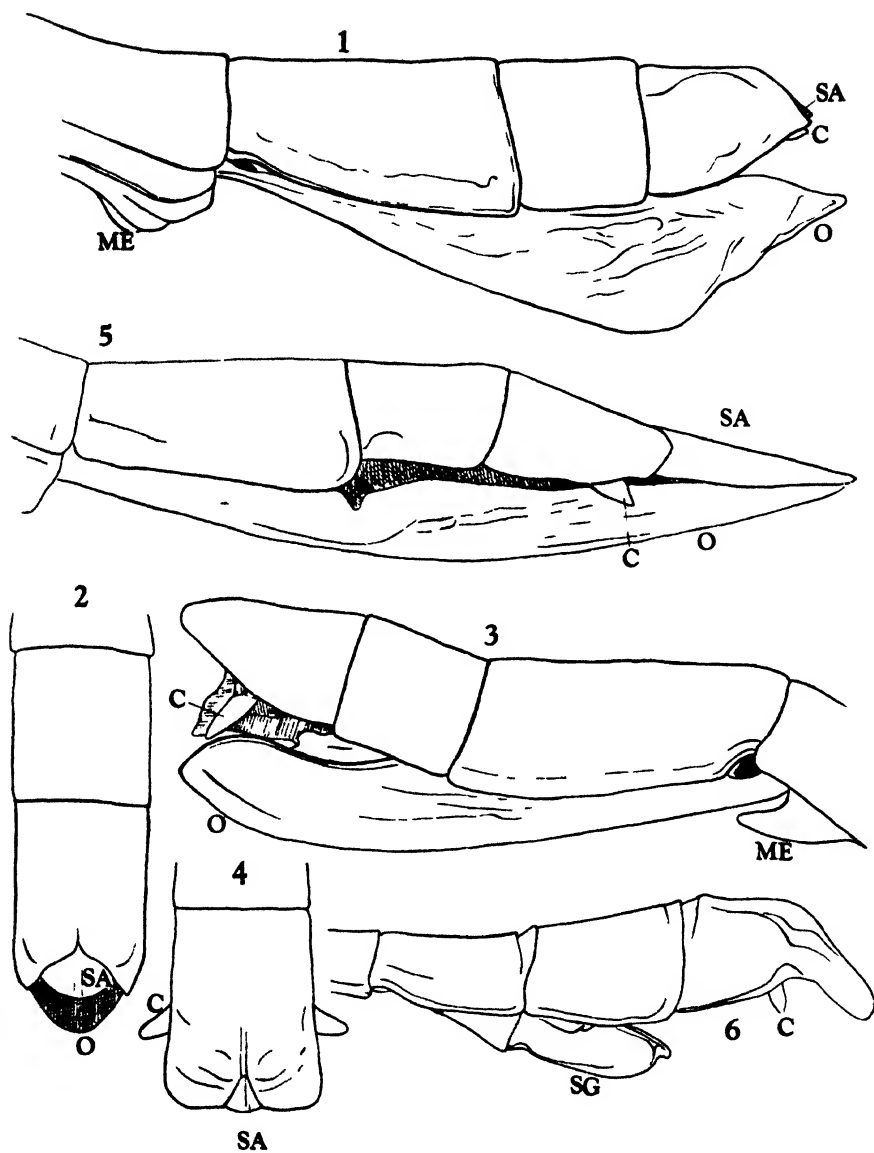
- Fig. 1. Anal segments of *Phaortes koyasanensis* ♀ (Lateral view).
- Fig. 2. Anal segments of *Phraortes kumamotoensis* ♀ (Lateral view).
- Fig. 3. Anal end of *Phraortes kumamotoensis* ♀ (Dorsal view).
- Fig. 4. Anal segments of *Phraortes kumamotoensis* ♂ (Lateral view).
- Fig. 5. Ninth tergite of *Phraortes kumamotoensis* ♂ (Dorsal view).
- Fig. 6. Anal end of *Phraortes kumamotoensis* ♂ (Ventral view).
- Fig. 7. Anal segments of *Phraortes miyakoensis* ♀ (Lateral view).
- Fig. 8. Sixth sternite of *Phraortes miyakoensis* ♀ (Ventral view).
- Fig. 9. Anal segments of *Phraortes miyakoensis* ♂ (Lateral view).
- Fig. 10. Ninth tergite of *Phraortes miyakoensis* ♂ (Dorsal view).
- Fig. 11. Anal end of *Phraortes miyakoensis* ♂ (Ventral view).
- Fig. 12. Anal segments of *Micadina rotundata* ♀ (Lateral view).
- Fig. 13. Anal segments of *Micadina rotundata* ♂ (Lateral view).
- Fig. 14. Ninth tergite of *Micadina rotundata* ♀ (Dorsal view).
- Fig. 15. Anal segments of *Micadina yasumatsui* ♀ (Lateral view).
- Fig. 16. Anal end of *Micadina yasumatsui* ♀ (Dorsal view).

## Plate IX [VI].

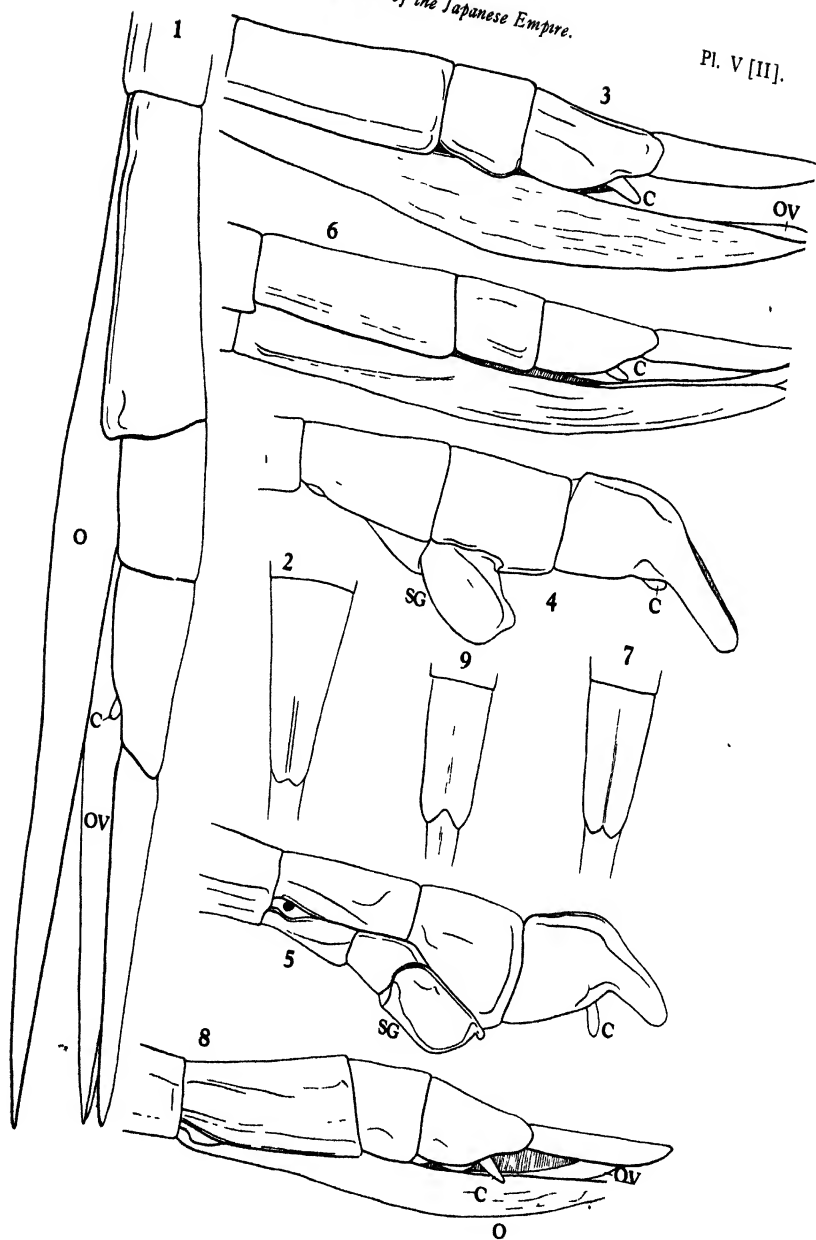
- Fig. 1. Anal segments of *Micadina sonani* ♀ (Lateral view).
- Fig. 2. Anal segments of *Micadina sonani* ♂ (Lateral view).
- Fig. 3. Ninth tergite and cerci of *Micadina sonani* ♂ (Dorsal view).
- Fig. 4. Anal segments of *Trachythorax 6-punctatus* ♀ (Lateral view).
- Fig. 5. Anal segments of *Trachythorax 6-punctatus* ♀ (Ventral view).
- Fig. 6. Ninth tergite of *Trachythorax 6-punctatus* ♀ (Dorsal view).
- Fig. 7. Anal segments of *Sipyloidea truncata* ♀ (Lateral view).
- Fig. 8. Anal end of *Sipyloidea truncata* ♀ (Dorsal view).
- Fig. 9. Anal segments of *Sipyloidea truncata* ♂ (Lateral view).
- Fig. 10. Ninth tergite of *Sipyloidea truncata* ♂ (Dorsal view).
- Fig. 11. Anal segments of *Sipyloidea okunii* ♀ (Lateral view).
- Fig. 12. Anal end of *Sipyloidea okunii* ♀ (Dorsal view).

## Plate X [VII].

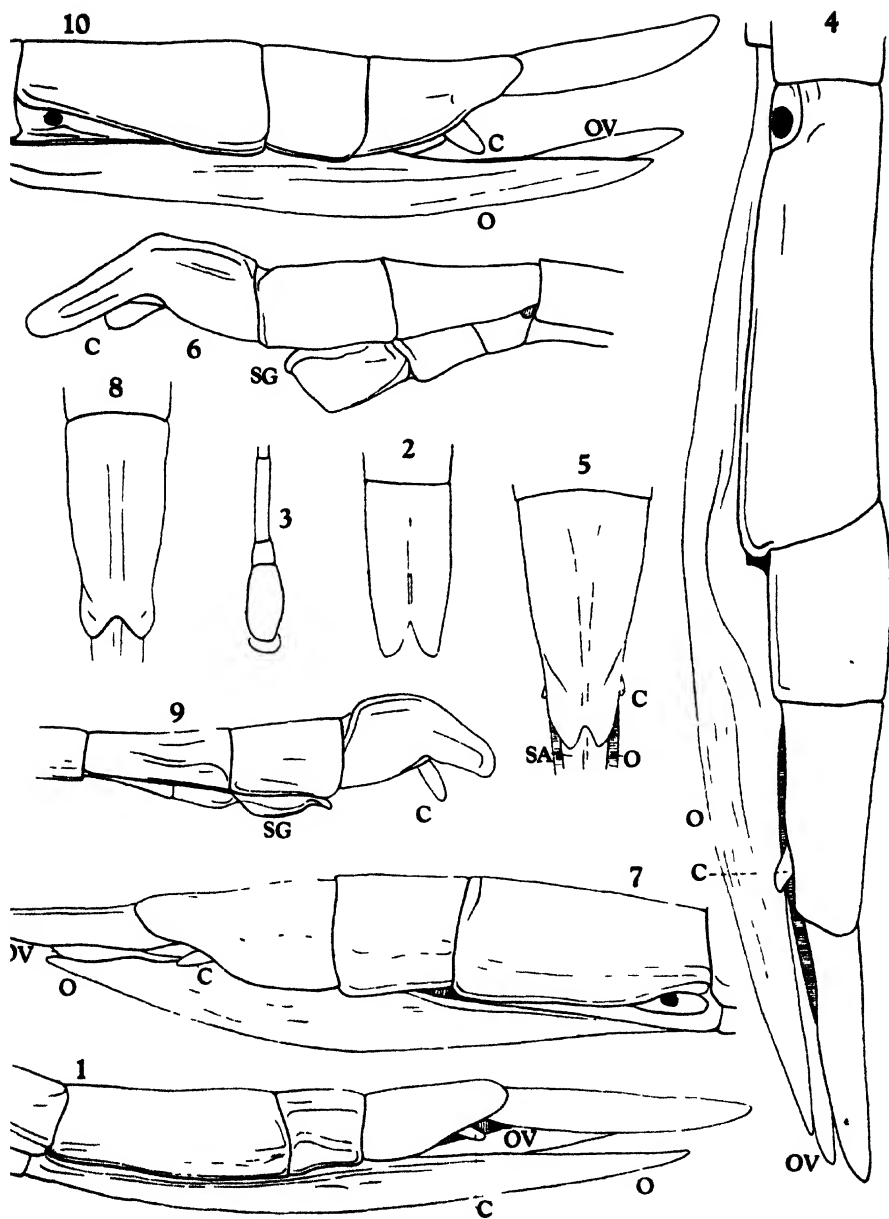
- Fig. 1. *Micadina rotundata* ♂.
- Fig. 2. *Micadina rotundata* ♀.
- Fig. 3. *Sipyloidea truncata* ♂.
- Fig. 4. *Sipyloidea truncata* ♀.
- Fig. 5. *Megacrania tsudai* SHIRAKI ♀.





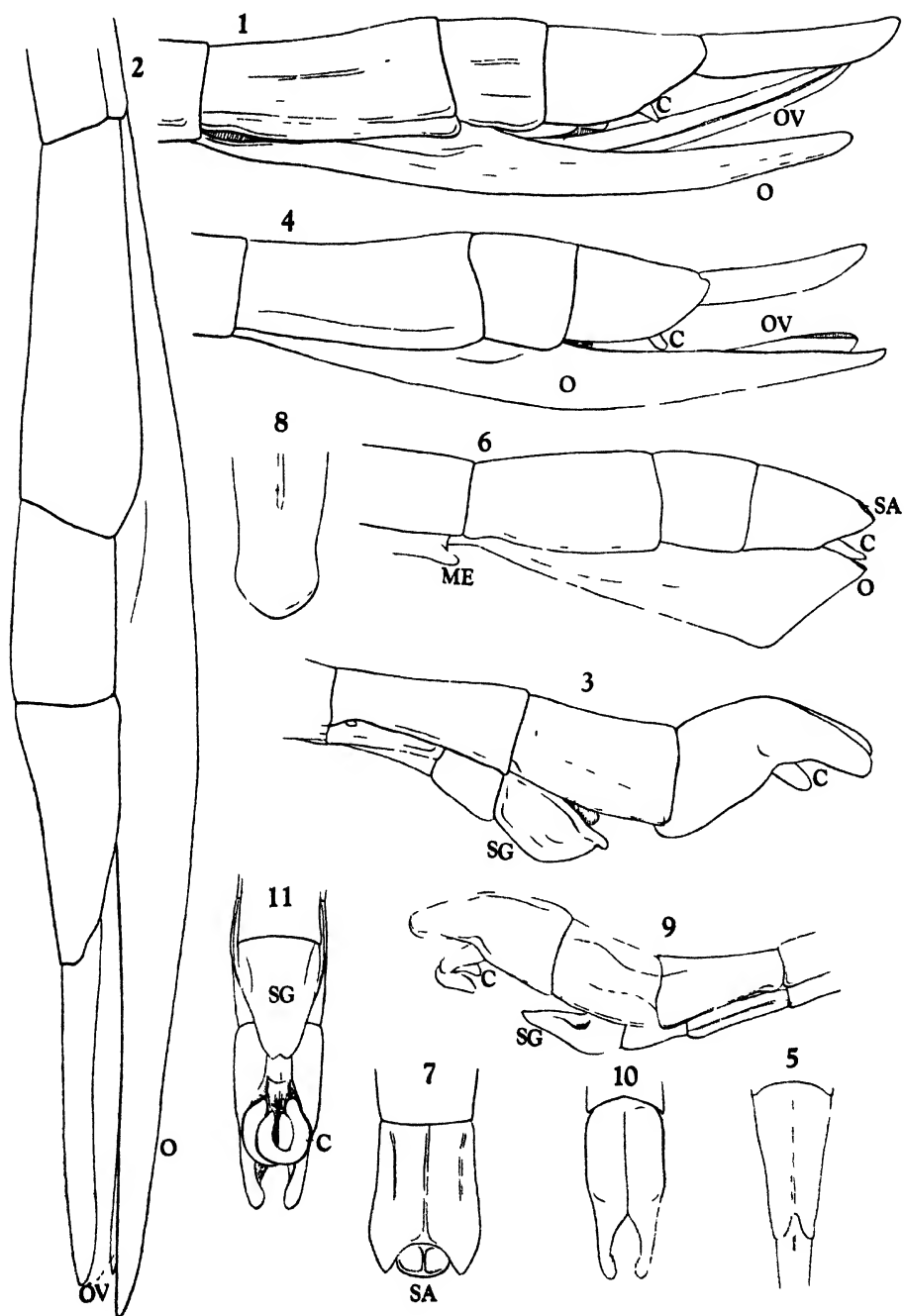




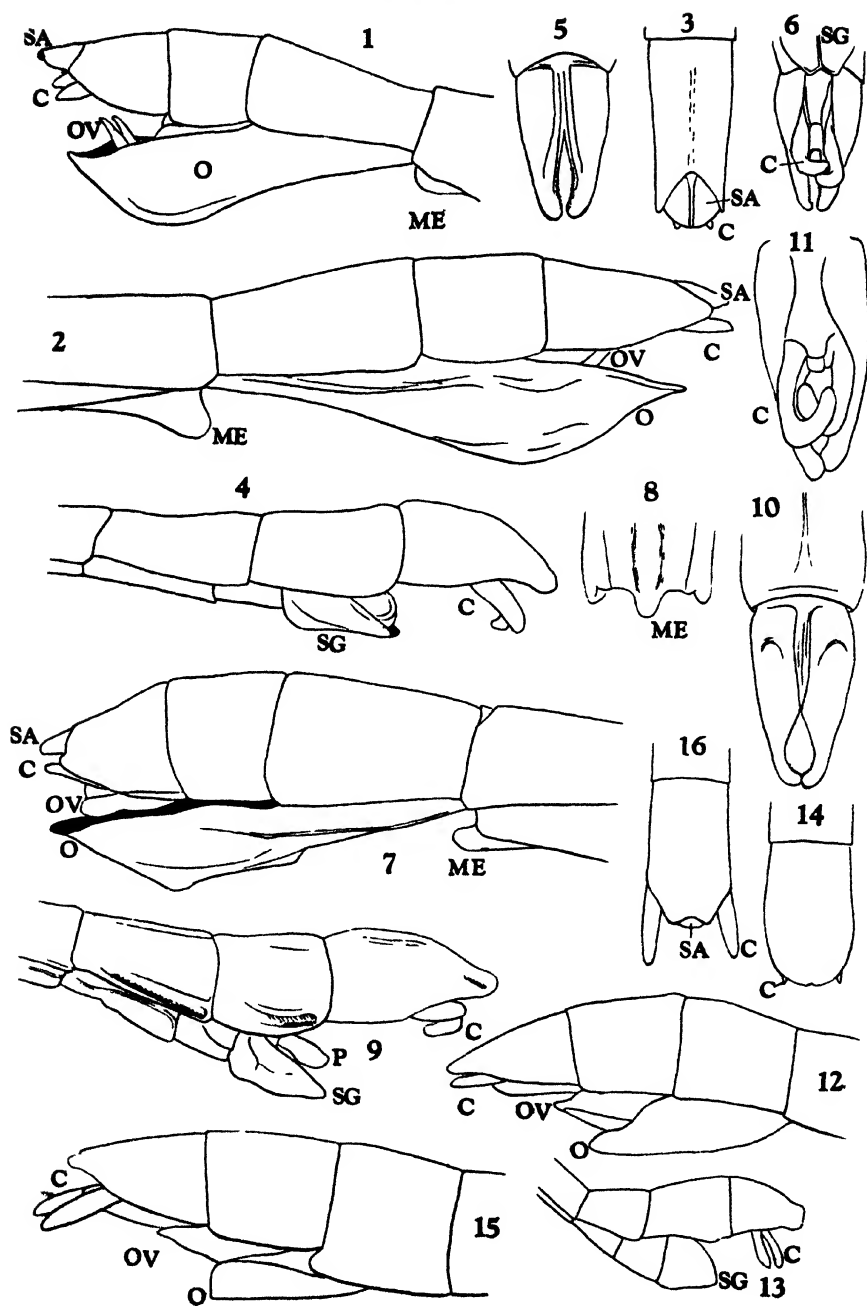




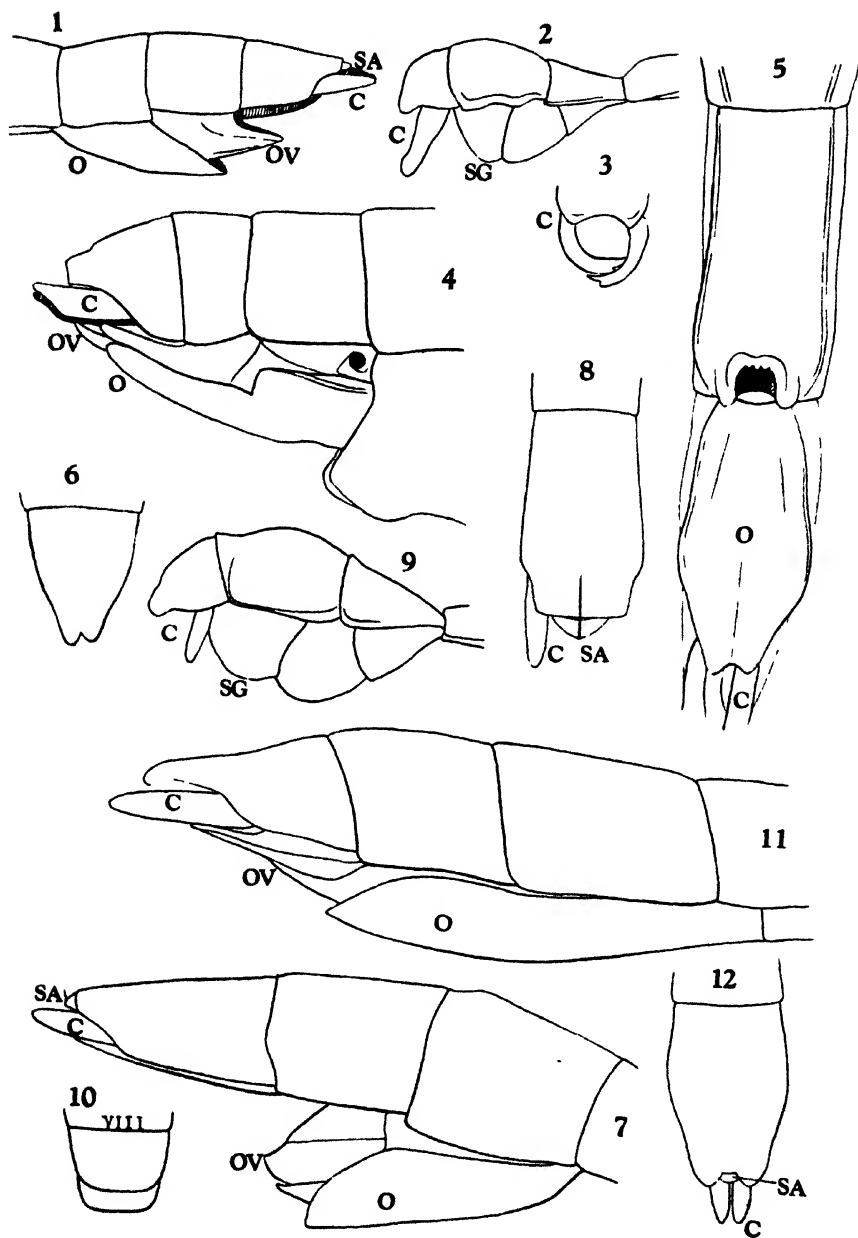




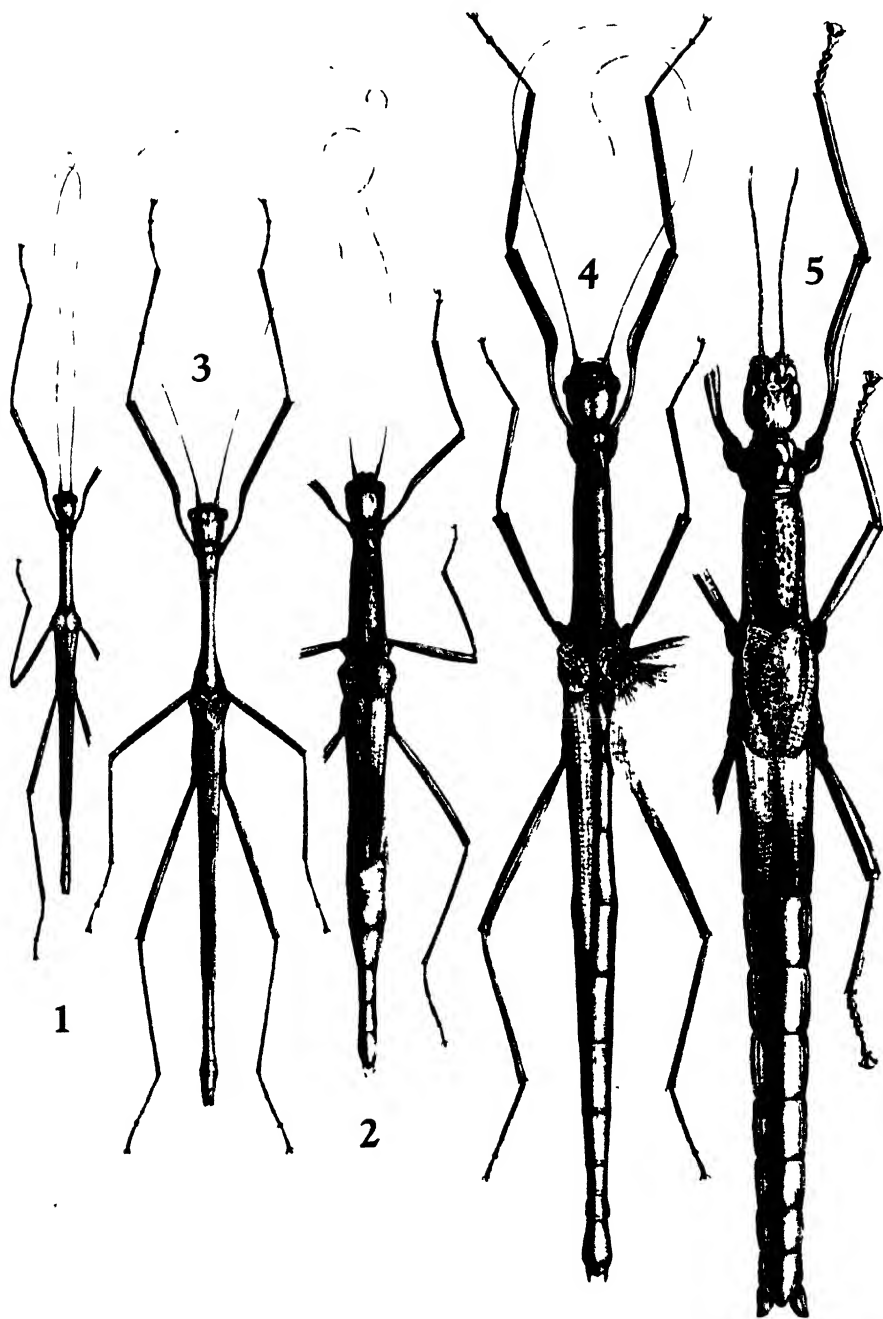
















# ON THE RESPIRATION OF BRANCHIURA SOWERBYI

Siro KAWAGUTI

(Accepted for publication, August 29, 1936)

## CONTENTS

	Page.
Introduction ... ..	91
Localization of external respiration ... ..	92
Effect of temperature on the oscillatory movements ...	92
Effect of temperature on the oxygen consumption, R. Q.	93
Effect of oxygen pressure ... ..	95
Anaerobiosis ... ..	95
Effect of osmotic pressure ... ..	95
Effect of pH ... ..	97
Effect of cations ... ..	99
Effect of anions ... ..	103
Limit of reduction potential of intact animal ... ..	107
Respiratory pigment—Spectrographical studies ... ..	108
Oxygen dissociation curve ... ..	109
Oxidation-reduction potential ... ..	111
Summary ... ..	113
Bibliography ... ..	115

For several years I have been working on the respiration of *Branchiura sowerbyi*. I will treat it here briefly, as some conclusions can be drawn from the data, and also it is a step toward further study.

**Localization of external respiration**—Put a specimen of *Branchiura* in a slide and cover with a diluted solution of phenol red, as has been proposed by FOX<sup>11</sup> for the measurement of respiratory intensity of small aquatic animals. There occurs a colour change of the phenol-red from red to yellow. The area of colour change is more extensive at the branchial portion than at the head, and less at the middle portion of the body.

It is reported by OKADA<sup>23</sup> that there is a great difference of respiratory intensity between the fore and hind parts of the body by using the VAN SLYKE method. But, only slight differences between the three dismembered portions of the body have been proved by the Warburg-Barcroft manometer method<sup>15</sup>. In order to explain this discrepancy of results, the area of body-surface at the fore and hind parts of body are calculated, resulting in the even distribution of body-surface at two portions.

Moreover, when the manometer is left at rest, except for the equilibrium before reading, in my case, there can be seen a definite axial gradient of respiratory exchanges in three portions of body. Then, we may conclude that the respiratory intensity of *Branchiura* in three portions of the body have different values owing to the amount of water which comes into contact with them. In the field, however, the animal lives in mud and inserts his branchial portion into water oscillating to and fro, and the branchial portion seems to be the main region of respiratory exchanges.

**Effect of temperature on the oscillatory movement**—A specimen is placed in a narrow glass tube with mud, cemented on a glass plate perpendicularly. In a mean-time the animal projects its tail and begins to oscillate. This movement has its pace-maker at the tail end and propagates postero-anteriorly. The temperature was changed from 33°C to 10°C, starting at room temperature 23°C. Below 10°C the animal retracts completely into the mud and observations cannot be made. The limit of low temperature depends on the temperature, to which the specimens are adapted previously. To give time for temperature equilibration, 15 minutes are allowed before reading.

The temperature constant, A (see page 94) is calculated for twelve individual experiments. The mean value is  $5.7 \times 10^3$ , and below critical temperature, 18–17°C,  $8.1 \times 10^3$ . These data have been frequently reported in the phenomena concerning oxidative processes, and give one evidence that this oscillation is a respiratory movement.

**Effect of temperature on the oxygen consumption and R. Q.--**

The respiratory exchanges of *Branchiura sowerbyi* are measured at 35°, 30°, 25°, 20°, 15°, and 10°C with a Barcroft-Warburg manometer, as in all other experiments in this paper except especially explained. The procedure is essentially the same as in the previous article<sup>19</sup>. The test medium is usually 2 cc. and five specimens, weighing from 0.12 gm. to 0.17 gm., in total, are immersed. In this section, the experiment is started after the immersion of the specimens in the test temperature for 30 minutes previously.

The medium used has following components; NaCl 45/1000 M; KCl 3/1000 M; CaCl<sub>2</sub> 5/1000 M; pH of the medium is nearly 6.8 with phosphate buffer,  $10^{-3}$  M. This medium is used as a control medium throughout the experiments of this article.

The results of experiments are summarized in table 1. Each datum, excepting for 35 C is the mean value of more than 10 experiments.

TABLE 1.

Effect of temperature on the respiration. Measurements for 30°C were done at the room temperature of about 25°C; all others at 17–20°C. R.Q. here indicated is the mean value of R. Q. for all individual experiments.

Temperature	O <sub>2</sub> consumption per hour per gm.	CO <sub>2</sub> out put per hour per gm.	R. Q.
35°C	0.700 cc.	0.580 cc.	0.83 ± 0.004
30°.0	0.507 ± 0.008	0.400	0.79 ± 0.008
25°.0	0.310 ± 0.006	0.236	0.76 ± 0.008
20°.0	0.225 ± 0.004	0.176	0.77 ± 0.020
15°.0	0.177 ± 0.005	0.129	0.73 ± 0.009
10°.0	0.111 ± 0.001	0.074	0.69 ± 0.019

It is interesting to note that there is a general tendency to decrease the respiratory quotient with the decrease of temperature.

Such decreases of the R.Q. in lower temperatures may be caused by (1) the change of oxidizing substances, directly or indirectly, by temperature changes; (2) the change of mechanism of the oxidation-reduction system at different temperatures; and (3) the change of rate of diffusion for oxygen and carbon-dioxide. The third reason is partly regulated in these cases, owing to the method employed, the CO<sub>2</sub> of tissues may be driven out at the end of the measurement, and the specimen is kept at the test temperature for more than 30 minutes before the experiment to obtain the equilibria of gases.

The logarithms of oxygen consumption, CO<sub>2</sub> out-put and R.Q. are plotted against the logarithm of absolute temperature, and they are found satisfactorily on a straight line respectively. Then the values of A in ARRHENIUS' formula, (YAMAMOTO<sup>23</sup>)

$$f_2/f_1 = e^{A(1/T_1 - 1/T_2)}$$

where  $f_1$  and  $f_2$  are the values at absolute temperature  $T_1$  and  $T_2$ ), are calculated from the data of Table 1. Their values turned out  $6.6 \times 10^3$  for O<sub>2</sub> consumption,  $7.4 \times 10^3$  for CO<sub>2</sub> out put and  $0.67 \times 10^3$  for R. Q., respectively. As has been treated by TANG<sup>25</sup> the A for R. Q. is equal to the value subtracted A for O<sub>2</sub> from that for CO<sub>2</sub>.

Results of several authors on the effect of temperature on R. Q. are not consistent with each other. In some cases the R. Q. increased or remained constant with the decrease of temperature (BELEHRADEK,<sup>5</sup> CRESCITELLI<sup>7</sup>) while in many others it decreased with a decrease of temperature (KLEINMAN<sup>20</sup>). YAMAMOTO, A.<sup>23</sup> reported the maximum R. Q. value at 25°C. for *Aspergillus niger* between 15°C and 35°C. BAUDIN's<sup>4</sup> data, however, gave the minimum value of R. Q. 0.75 at 15°C for *Carassius* and it increased linearly against temperature towards equally above and below of 15°C. reaching 1.2 at 30°C and 0.93 at 7°C. The same relations also found for *Cottus bulalis*.

The temperature constant A of data from literature have fairly different values and no special values could be found worth mention-

ing. Although these results may suggest the multiple reactions concerned with R. Q. changes, we are better to delay our conclusion until sufficient accumulation of data.

**Effect of oxygen pressure.**--Five animals, weighing about 0.13 gm., are kept in five cc. of tap water at 25°C in a respiratory chamber, a 5 cc. syringe. Oxygen contents of the medium is measured by WINKLER's method (KAWAGUTI<sup>16</sup>). The results of several experiments are summarized in figure 1, which shows that the oxygen consumption remained constant until the oxygen pressure of the medium decreased into 1/6 of saturation pressure, that is, about 0.8 cc. per litre. Below that pressure the oxygen consumption decreased very rapidly. The animal lives very well even at the end of 4 hours experiment. Such relations of oxygen pressure on the oxygen consumption have been reported by DAUSEN<sup>9</sup> and HARNISCH<sup>12</sup> in *Tubifex*.

In the manometric method, even at about 3% (20 mmHg) of oxygen in air there occurred no significant change in the oxygen consumption and R. Q. Such discrepancy in both experiments, the WINKLER method and the WARBURG method, is caused by the differences of capacity of oxygen in these experimental systems.

**Anaerobiosis**—The air of Warburg-Barcroft's apparatus is driven out by nitrogen gas, then 0.5 cc of  $\text{CrCl}_2$ -solution is poured into a side chamber. About 20 minutes' shake is sufficient to obtain the anaerobic conditions. The reading of the manometer is followed for 5 hours or more. In such anaerobic conditions the animal body turns pale in colour but the disintegration does not take place. This shows that the disintegration is the result of the oxidation of living matter. The anaerobic  $\text{CO}_2$  production continues for 3 hours in a same rate and decreases later. An actual  $\text{CO}_2$  production during this period is read  $61 \times 10^{-3}$  cc. per hour per gm. at 25°C. in one case.

**Effect of osmotic pressure**—Respiratory exchanges are measured in the solutions of three parts, two parts, one part and one half part of salt concentrations of the control medium, (A. M.) (page 93) without changing the relative salt contents. The results at 30.0°C are summarized in the following table.

Media	O <sub>2</sub> consumption per hour per gm.	R. Q
3×A.M.	0.473 cc.	0.94
2×A.M.	0.538	0.88
1×A.M.	0.515	0.79
1/2×A.M.	0.514	0.76
Distilled water	0.405	0.78

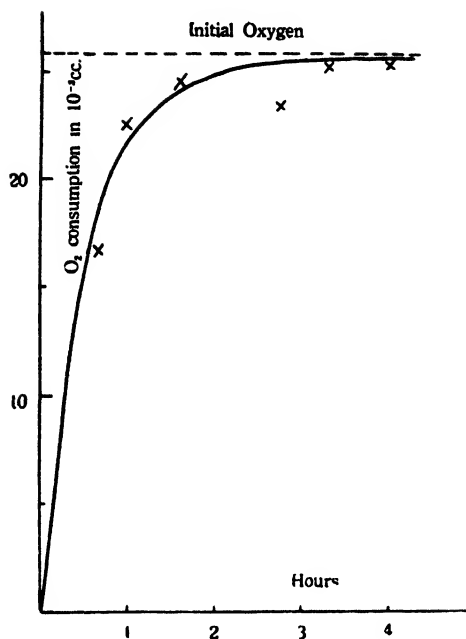


Fig. 1.

Relations between the oxygen consumption and duration of experiment.

Each datum is the mean value of experiments from 5 to 8. In hypertonic solutions especially in 3×A.M. the animal cuts its body at several parts without disintegrating itself into minute fragments and the blood diffuses out. R.Q. increases with the increase of salt concentrations. In strong hypertonic solution the oxygen consumption decreases significantly and the R.Q. increases. This may be caused by the death of the animal. In 2×A.M. there occurs sometimes a slight leakage of blood but not the killing of the specimen. Both oxygen consumption and R.Q. increase significantly. From these data we can see that the control medium increases the respiratory intensity but does not alter the mechanism in comparison with the distilled water. In hypertonic solutions respiratory mechanism is changed significantly. The first is a chemical effect and the second is an osmotic effect on the respiration.

SCHLIEPER<sup>24</sup> reviewed well and discussed the energy expenditure for osmoregulation. In many works the oxygen consumption is taken

as an indicator. But it is more reasonable to attack the problem from quantity and quality factors, that is, oxygen consumption,  $\text{CO}_2$  out put and R.Q.

SCHLIEPER remarked especially on the case in which the oxygen consumption increases or remains constant when the osmotic pressure of external medium is decreased. There are some evidences, however, for fresh-water animals, that show a decreased respiratory intensity in diluted media or distilled water (DURYEE<sup>10</sup>; KAWAGUTI<sup>17</sup>). Such differences may depend partly on the differences of mechanism between sea water and fresh water animals, and partly on the adaptation problem.

**Effect of pH**—Some experiments on the effect of pH have been made by distilled water regulating pH by HCl or NaOH, excepting for pH 6.0 and 8.0, where phosphate buffers are added. The results are summarized in table 3. Each datum shows the mean value of several experiments. These figures show that the pH range of this animal seems to be found at pH 5-9. Although disintegration caused a shift of R.Q. in both high and low pH, it is less remarkable in alkaline solution.

Further experiments have been made by buffered balanced media. Buffers of the control medium (page 93) have been changed by acetate-acetic, phosphate, or boric acid-KCl-NaOH buffers. 10 cc. of mixture from M/5 components is contained in one litre of an experimental medium. pH values tabulated in table 4 are measured against a hydrogen electrode. In such concentrations used in this experiment, their components of buffer solutions have no significant effects on respiration as shown in tables 5 and 6.

Table 4 indicates that (1) increase of pH from neutrality increases oxygen consumption and R.Q., (2) decrease of pH has no fundamental effect on oxygen consumption but R.Q. increases markedly more than in alkaline solution. Such differences in the change of R.Q., by the pH change, might be caused by the accumulation of  $\text{CO}_2$  in medium during the experiment. Alkaline solution has high  $\text{CO}_2$  content and may resist the diffusion of  $\text{CO}_2$  from the body surface. Acidic solution is vice versa. The increases of R.Q. in high alkalinity and



acidity may be partly caused by the toxicity, as already mentioned in previous sections.

Hemoglobin may be considered as a representative in respiratory mechanism and its oxidation-reduction potential decreases with the increase of pH as is given in figure 9. That is, the reduced hemoglobin is more easily oxidized in high pH. This relation also can be seen in the effect of pH on the oxygen dissociation curve of hemoglobin, that is, oxygenation is increased in alkaline solution (ref. BARCROFT<sup>3</sup>). These facts may be applicable to other factors of respiratory mechanism and will be used partly for the explanation of the effect of pH on oxygen consumption.

According to ASCHBEL<sup>2</sup> oxygen consumption in sea-urchin eggs increased towards pH 4, which is an isoelectric point, and decreased by further increase of H-ion. TANG<sup>26</sup> reported that in alkaline solutions, such as boric acid-KCl-NaOH buffer, *Saccharomyces* showed minimum oxygen consumption at the isoelectric point, pH 7.8. The isoelectric point of hemoglobin is found at near neutrality and TANG's idea seems to be applicable in my case, but the mechanism is not clear.

HYMAN<sup>14</sup> reported that *Planaria* consumed less oxygen in acidified natural water, and considered that it was caused by the increase of free CO<sub>2</sub> in the medium. ANDERSON<sup>1</sup> showed an increased oxygen consumption in the same animal when pH of the medium had been increased to 7.6-9.2 by NaOH or NH<sub>4</sub>OH.

TABLE 3.

Effect of pH on the respiration. Temperature 25.0°C. pH determined colorimetrically.

pH	O <sub>2</sub> consumption per hour per gm.	R. Q.	Disintegration
3.3	0.230 cc.	1.11	V
4.2	0.299	0.85	III
6.0	0.343	0.86	I
8.0	0.327	0.87	II
9.5	0.317	0.83	III
10.5	0.171	0.90	VI

TABLE 4.  
Effect of pH on the respiration

pH	Nature of buffer	O <sub>2</sub> consumption per hour per gm.	R. Q.	Disintegration
4.17	Na-acetate-Acetic acid	0.225 cc	1.26	IV 'small sample
4 17	"	0.334	0.98	II
5 00	" "	0.330	0.82	No.
6 00	Phosphate	0.360	0.74	No.
6 80	" "	0.331	0.76	No.
8 03	Boric acid KCl-NaOH	0.345	0.83	No.
9 36	" "	0.374	0.79	No.
10.15	" "	0.400	0.86	II

**Effect of cations\*** - Effect of cations have been followed with different chlorides at  $25^{\circ} \pm 0.02^{\circ}\text{C}$ , which results are summarized in Table 5 and figures 2 and 3.

In NaCl oxygen consumption reaches its minimum at N/32 and increases markedly in hypertonic solution and slightly in more hypotonic solution. R.Q. decreases gradually with the increase of concentration. The oxygen consumption in LiCl records its maximum value at N/16 and decreases in further increase of concentration. R.Q. increases slightly in higher concentrations. In KCl and NH<sub>4</sub>Cl both oxygen consumption and R.Q. increase markedly with the increase of concentration.

The oxygen consumption in Ca-, Mg-, and Mn- chlorides have maximum values at M/32 and rapidly decrease in more concentrated solutions, owing to the killing effect of ions. Such maximum point may be determined by the duration of experiments and length of life in the medium. It is interesting to note that such maximum concentration appears at M/16 in LiCl. This fact also suggests the osmotic effects. R.Q. remains constant in CaCl<sub>2</sub>, but increases in MgCl<sub>2</sub> and MnCl<sub>2</sub> with the increase of the concentration.

The results are not sufficiently compared with a certain concen-

\*A Part of this section was read at the meeting of the Japanese Association for the Advancement of Science at Taihoku, 1934, and published in the proceedings (in Japanese) May, 1935.

tration of chlorides for the following reasons. (1) Owing to the differences of toxicity of salts the actual process of oxygen consumption is not constant for every kind of salts during the whole experiment as is shown in figure 2. And the oxygen consumption here tabulated is calculated from a total sum and duration of the experiment. (2) R.Q. changes during disintegration.<sup>19</sup>

However, in considering such points, Fig. 3 shows some interesting facts. In  $10^{-3}M$  solutions, most of the heavy metal chlorides induce the decreased oxygen consumption and increased R.Q., probably by the killing effect of solutions.

$SnCl_2$  exceptionally decreases R.Q. This might be caused by the reducing nature of the solution, whereas  $FeCl_3$  increases R.Q. and decreases oxygen consumption.

In less toxic mono-valent salts, R.Q. usually increases considerably, and for the effects on the oxygen consumption the following order can be seen,  $Li < Na < K, NH_4$ .

This is the well known HOFMEISTER's or lyotropic series. What is the meaning? Respiration would partly be concerned with the coagulation or solution of the living matter. Another clue may be given by the effect of such salt on the oxygen dissociation curve or on the oxidation-reduction potential of hemoglobin or other such members concerning respiration. But unfortunately we have only few data.

$MgCl_2$  and  $CaCl_2$  have decreased oxygen consumption, but  $CaCl_2$  has the largest decrease.  $MnCl_2$  decreases oxygen consumption and increases R.Q. Such effect might be caused partly by narcotic influence, though the mechanism is unknown, partly by the formation of  $Mn(OH)_2$  in the animal body or at the respiratory surface. This substance modifies the respiratory process or it absorbs the oxygen which will be conveyed to the system from the external medium.  $SrCl_2$  increases markedly both the oxygen consumption and R.Q.

Some attempts have been made to explain the effect of neutral salts on oxygen consumption (HESS<sup>13</sup>) and R.Q. (KAWAGUTI<sup>17</sup>).

DICKENS and GREVILLE<sup>8</sup> found lyotropic series of cation for the

oxygen consumption of brain tissue,  $Mg < Li, Na < K, Rb, Cs$ , (0.1M chlorides) and considered that such effects of neutral salts are ascribed to changes in the colloidal state of the protoplasm.

OKABE<sup>22</sup> reported that the displacement of 1/100 or 1/1000 parts of NaCl in Ringer solution with BaCl<sub>2</sub> and SrCl<sub>2</sub> caused the depression of respiration and acceleration of glycolysis in the cortical tissue of a rabbit.

TABLE 5.

*Effect of chlorides at  $25 \pm 0.02^\circ C$ .* Each datum is the mean value from several experiments. Each solution contains  $10^{-3}M$  phosphate buffer; the same amount of control medium. The last column shows the state of the animal at the end of the experiment. The whole course of disintegration is divided into six stages from I to VI (detail is given in KAWAGUTI<sup>15</sup>). Duration of experiment is one hour, if not especially noted; 2/3, is 2 3 hour.

\*In these cases the measurement has been made primary in distilled water with phosphate buffer for 30 minutes, then concentrated chloride is poured from the side chamber to the experimental fluid, and final concentration thus obtained is indicated. CO<sub>2</sub> production is computed by the reduction of total CO<sub>2</sub> output until the pouring of experimental fluid, by taking R.Q. in distilled water as has been indicated in this table. In some cases, where solution has high H-ion concentration, for example, ZnCl<sub>2</sub> and SnCl<sub>2</sub> white precipitate appears and the consequent concentrations will be reduced from indicated values.

Chlorides	Concentration	O <sub>2</sub> consumption cc per hour per gm.	R. Q.	Disintegration & remarks.
NaCl	M 8	0.403 cc.	0.70	IV or V. 2,3
"	M 16	0.306	0.76	
"	M/32	0.288	0.82	
"	M 64	0.316	0.79	
"	$10^{-3}M$	0.328	0.81	
LiCl	M 8	0.316 cc.	0.83	Narcotized
"	M, 16	0.353	0.84	III
"	M 32	0.313	0.82	
"	M 64	0.304	0.83	
"	$10^{-3}M$	0.311	0.80	
KCl	M, 128	0.376 cc	0.90	V. 2/3
"	M/128 $\times$ 1, 2	0.372	0.83	IV. 2,3
"	M/128 $\times$ 1/4	0.308	0.82	II
"	$10^{-3}M$	0.304	0.82	
NH <sub>4</sub> Cl	M/32	0.397 cc.	0.95	V. 2/3
"	M/64	0.372	0.79(?)	IV. 2,3
"	M, 128	0.327	0.86	IV

Chlorides	Concentration	O <sub>2</sub> consumption cc. per hour per gm.	R. Q.	Remarks.
NH <sub>4</sub> Cl	M/256	0.310	0.84	II
"	10 <sup>-3</sup> M	0.340	0.90	III
CaCl <sub>2</sub>	M/8	0.292 cc.	0.80	
"	M/16	0.297	0.80	
"	M/32	0.326	0.81	
"	10 <sup>-3</sup> M	0.265	0.80	
MgCl <sub>2</sub>	M/8	0.226 cc.	0.88	V 2/3
"	M/16	0.292	0.84	IV 2/3
"	M/32	0.351	0.89	IV 2/3
"	M/64	0.320	0.86	IV
"	10 <sup>-3</sup> M	0.309	0.81	II
MnCl <sub>2</sub>	M/16	0.238	0.88	No. Narcotized
"	M/32	0.303	0.82	
"	10 <sup>-3</sup> M	0.274	0.84	
CoCl <sub>2</sub>	10 <sup>-2</sup> M	0.390	0.82	IV
" "	10 <sup>-3</sup> M	0.319	0.90	I
NiCl <sub>2</sub>	10 <sup>-2</sup> M	0.352	0.90	V 50 minutes.
" "	10 <sup>-3</sup> M	0.355	0.88	V
SrCl <sub>2</sub>	10 <sup>-2</sup> M	0.525	0.92	IV
" "	10 <sup>-3</sup> M	0.494	0.92	III
BaCl <sub>2</sub>	10 <sup>-3</sup> M	0.291	1.05	*VI dark cytolysis 2,3
" "	10 <sup>-5</sup> M	0.367	0.88	II.
FeCl <sub>3</sub>	10 <sup>-3</sup> M	0.255	0.95	*VI. Dark cytl.
" "	10 <sup>-5</sup> M	0.335	0.76	I.
FeCl <sub>2</sub>	10 <sup>-3</sup> M	0.385	0.91	*I
" "	10 <sup>-4</sup> M	0.339	0.83	II.
CuCl <sub>2</sub>	10 <sup>-3</sup> M	0.309	0.94	*V.
" "	10 <sup>-4</sup> M	0.376	0.66	IV.
CdCl <sub>2</sub>	10 <sup>-3</sup> M	0.309	1.21	*V.
" "	10 <sup>-4</sup> M	0.330	0.74	V.
ZnCl <sub>2</sub>	10 <sup>-3</sup> M	0.322	0.99	*V
SnCl <sub>2</sub>	10 <sup>-3</sup> M	0.305	0.61	*V.
" "	10 <sup>-4</sup> M	0.356	0.78	III.
HgCl <sub>2</sub>	10 <sup>-3</sup> M	0.243	0.87	*VI. dark cytl.
" "	10 <sup>-4</sup> M	0.265	1.01	VI.
Distilled water (phosphate buffer 10 <sup>-3</sup> M)		0.329	0.75	No.
Distilled water (phosphate buffer 10 <sup>-2</sup> M)		0.378	0.79	No.

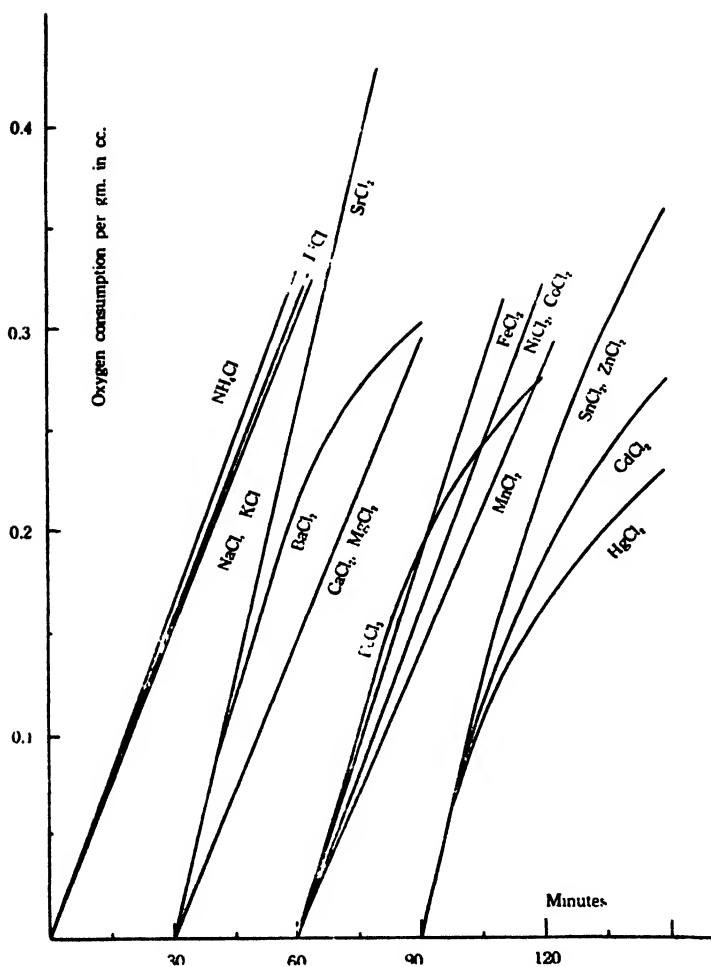


Fig. 2.

Examples of single measurement for chlorides,  $10^{-3}\text{M}$ . All measurements started at 0 of the oxygen consumption.

**Effects of anions**—Results of experiments with sodium salts have been summarized in table 6.  $\text{NaF}$ ,  $\text{NaCl}$ ,  $\text{NaBr}$ , and  $\text{NaI}$  have similar effects. In diluted solutions oxygen consumption has normal value and R.Q. increases significantly. In  $10^{-2}\text{M}$  the order of oxygen consumption is  $\text{F} < \text{Cl} < \text{Br} < \text{I}$ , and for R.Q. it is  $\text{Cl} < \text{Br} < \text{I} < \text{F}$ .

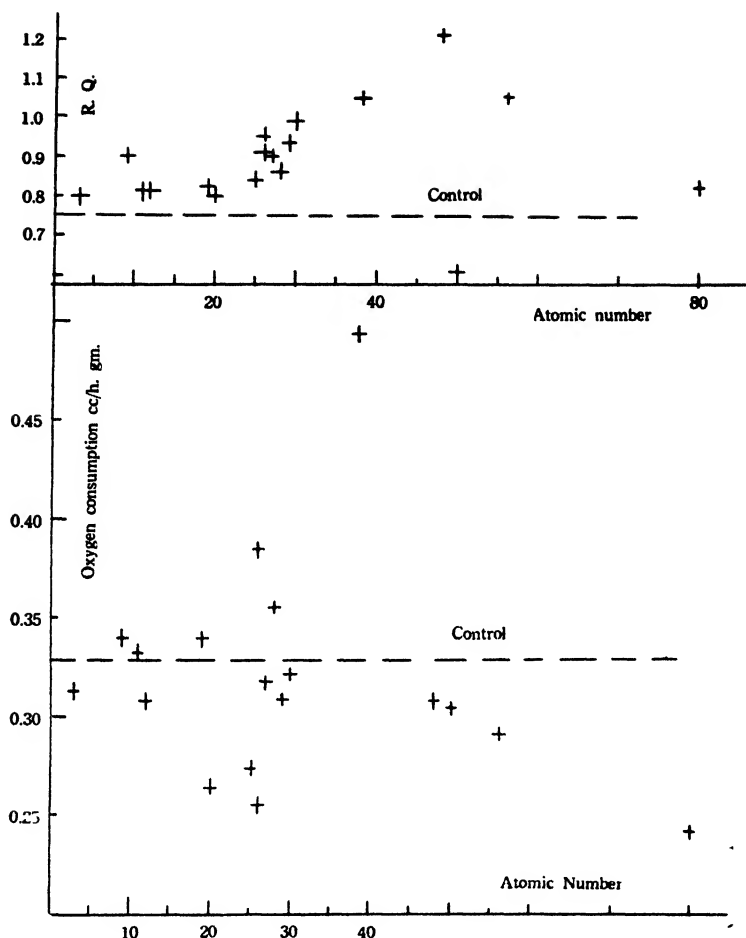


Fig. 3.

Effect of chlorides on the oxygen consumption and R.Q., plotted against the atomic number of cation.  $\text{NH}_4$  is plotted at 9.

Such orders can be explained from the chemical nature of ions and the special action of fluoride on the fermentation.

Na-ferrocyanide decreases oxygen consumption and increases R.Q. A similar effect has been observed in  $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$ . These might be caused by the reducing nature of these substances, in contrast with

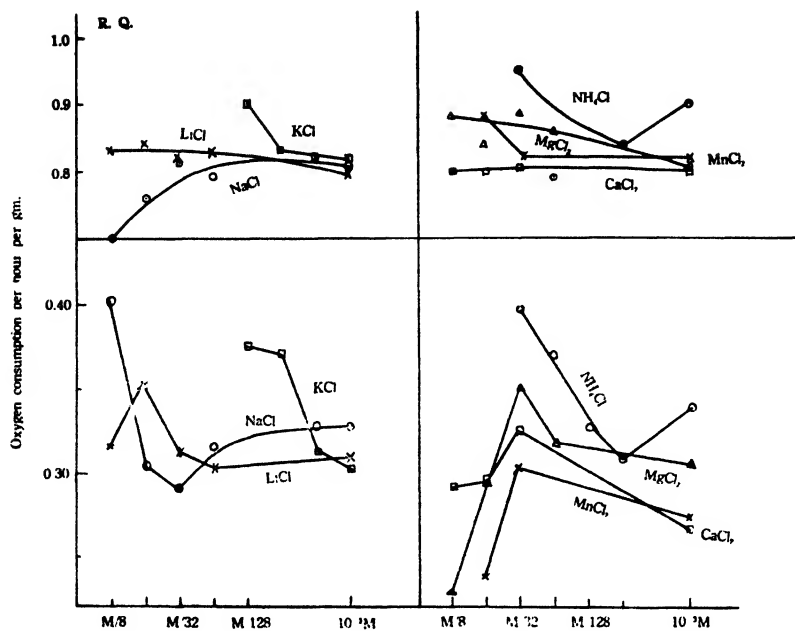


Fig. 4.

Effect of different concentration of neutral salts on the oxygen consumption and R.Q.

the effect of  $\text{FeCl}_3$ . My previous work has failed to show such relations of oxidizing and reducing agents upon respiration.

The specimen in sulfonate shows a slight narcotic effect as in  $\text{MnCl}_2$ ,  $\text{O}_2$  consumption decreases and R.Q. increases.  $\text{NaCN}$  decreases  $\text{O}_2$  consumption and increases R.Q. The  $\text{CO}_2$  measurement of this method is not sufficient for  $\text{NaSH}$ , but in a diluted solution, R.Q. is calculated, and very low value is obtained.

In acetate, lactate, oxalate, tartrate, and citrate we can recognise somewhat regular relations. R.Q. increased linearly with the increase of the molecular weight of chemicals. The same relation is observed in  $\text{LiCl}$ ,  $\text{NaCl}$ , and  $\text{KCl}$ . For these substances having no special actions on respiratory systems the increase of molecular weight induces the increase of R.Q.

It is very regrettable that the specific action of some chemicals



for respiratory process must be accepted by the present available data.

TABLE 6.

Effect of Na-salts at  $25^{\circ}\text{C} \pm 0.02^{\circ}$ . Duration of experiment is one hour excepting the cases specially indicated. Further notice is the same in table 5.

Chemicals	Concentration	O <sub>2</sub> consumption cc. per hour per gm.	R. Q.	Remarks
NaF	$10^{-2}\text{M}$	0.308 cc.	0.98	III
" "	$10^{-3}\text{M}$	0.307	0.85	II
NaBr	$10^{-2}\text{M}$	0.318	0.82	IV
" "	$10^{-3}\text{M}$	0.298	0.86	III
NaI	$10^{-2}\text{M}$	0.387	0.92	V
" "	$10^{-3}\text{M}$	0.317	0.85	IV
NaIO <sub>3</sub>	$10^{-2}\text{M}$	0.310	1.01	V
" "	$10^{-3}\text{M}$	0.310	0.75	III
NaNO <sub>3</sub>	$10^{-2}\text{M}$	0.329		
" "	$10^{-3}\text{M}$	0.282	0.88	III
Na <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	$10^{-2}\text{M}$	0.287	0.97	III narcotized
" "	$10^{-3}\text{M}$	0.282	0.90	II.
Na-Ferrocyanide	$10^{-2}\text{M}$	0.293	0.99	V
" "	$10^{-3}\text{M}$	0.292	0.86	III
NaSH	$10^{-2}\text{M}$	0.861		40 minutes.
" "	$10^{-3}\text{M}$	0.406	0.56	III
Na-silicate	$10^{-3}\text{M}$	0.100	1.36	VI 40 min.
" " "	$10^{-4}\text{M}$	0.282	0.82	V
NaSCN	$10^{-2}\text{M}$	0.353	0.69	I
" " "	$10^{-3}\text{M}$	0.341	0.79	II
Na <sub>2</sub> S <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	$10^{-2}\text{M}$	0.329	0.79	some materials show reversal of I. disintegration
" " "	$10^{-3}\text{M}$	0.287	0.88	
NaCN	$10^{-3}\text{M}$	0.158	0.94	IV
" "	$10^{-4}\text{M}$	0.259	0.95	II
Na-acetate	$10^{-2}\text{M}$	0.291	0.76	II
" "	$10^{-3}\text{M}$	0.300	0.80	I
Na-lactate	$10^{-2}\text{M}$	0.322	0.81	III
" "	$10^{-3}\text{M}$	0.323	0.83	II
Na-oxalate	$10^{-2}\text{M}$	0.263	1.06	IV
" "	$10^{-3}\text{M}$	0.289	0.87	II
Na-tartrate	$10^{-2}\text{M}$	0.321	0.87	IV
" "	$10^{-3}\text{M}$	0.299	0.92	II
Na-citrate	$10^{-2}\text{M}$	0.285	0.96	V
" "	$10^{-3}\text{M}$	0.245	1.01	V

The order of oxygen consumption in  $10^{-3}\text{M}$  is found as

lactate < acetate < tartrate < oxalate < citrate.

Most agents having narcotic effect (in general not only nervous) decrease oxygen consumption and increase R.Q. This suggests that the narcotic agents affect chiefly the oxidase system and not the dehydrogenase system.

**Limit of reduction potential of intact animals** is measured by using THUNBERG's tube. Two cc of distilled water with phosphate buffer pH 6.8 is taken into the tube and one or two drops of  $10^{-3}\text{M}$  dye solution are added. About a gram of the animal specimen is used at a time. The air is driven out by an oil pump for 1.5 minutes and the time for decoloration is measured at  $27^{\circ}\text{C}$ . At the end of the experiment the stopper is open. After shaking, the colour changes are observed. The results are as follows.

TABLE 7.

Dye	Reduction	Reoxidation
Lauth violet	5 min. Complete	Coloured
Methylene blue	10 min. Complete	Coloured
Indigotetrasulfonate	4 hours, very slight	
Indigotrisulfonate	4 hours, very slight	
Indigodisulfonate	4 hours no. turns green	
Nile blue	20 min. slight	
Janus green	No.	
Safranin	No.	
Neutral red	20 min. half-reduction	No recover.

In some cases, as is shown in table 7, probably in well permeable dyes such as neutral red, the dye is decolored without accompanying the colour changes at reoxidation. This may be caused by the absorption of dyes by the body tissues. In non permeable dyes reduction is not visible. But in a long delayed experiment there occurs a slight reduction.

Although the method has several weak points open for criticism, table 7 shows that the limit of anaerobic potential of an intact *Branchiura* lies near or up to that of Nile blue, that is,  $-0.12$  volts.

While the limit of aerobic reduction potential is read from the note in my previous work<sup>18</sup> on the effect of oxidation-reduction potential indicators on the respiration. Phenol blue and the dyes having higher  $E'_0$  than phenol blue are decolorized in the aerobic condition by *Branchiura*. Thus the limit of the reduction potential decreases from aerobic to anaerobic conditions for a considerable range.

As has been discussed by MACHLIS and GREEN<sup>21</sup> the aerobic potential may be the potential of the system in the dynamic state, and it will depend on the potential of the respiratory system and the velocity of respiration. The actual potential of *Branchiura* hemoglobin is found to 0.210 volt at 20°C, pH 6.78 (see p. 112). It corresponds to the aerobic potential. Now, it will be concluded that the aerobic potential of the animal is determined by the strong "buffering capacity" for the oxidation-reduction potential of hemoglobin. In anaerobic conditions the limit of reduction potential is not directly concerned with the hemoglobin but with the potential of actually reducing substances of tissues.

**Respiratory pigment—Spectrographical studies—**The preliminary observation of the absorption spectrum of respiratory pigment in an intact animal is made by a micro-spectroscope from Zeiss, in order to verify the method of preparation for further study. There are two distinct absorption bands and one obscure band in the range of short wave length. The ranges of the absorption bands are 585–565  $\mu\mu$  for  $\alpha$  band and 550–530  $\mu\mu$  for  $\beta$  band and their maxima are found at 575  $\mu\mu$  and 540  $\mu\mu$  respectively.

Further study has been made by the wave-length spectroscope from the Institute of Physical and Chemical Research, Tokyo. Blood pigment is located in plasma as in other annelids, and it is very difficult to obtain sufficient blood directly from vessels as the material is very small. The specimens are washed well with distilled water and the water tipped away by filter paper. Several grams of materials are brought into a test tube and cir. 2N NaCl is poured. Then the specimen is cut into several pieces and the blood diffuses out into the medium. Supernatant solution is separated

and centrifuged. Hemoglobin solution thus obtained is used as a sample.

A modified Baly tube is used as a container of the sample for spectrography. (Fig. 5) In figure 5, 1 is a tube of 5 cc capacity, made of an ordinary injection syringe, 2 is a 10 cc syringe which serves as a sealed movable reservoir, 3 is a gum tubing. For critical work it is better to use a three way stopper instead of gum tubing. When a reducing agent is required, it is injected through the upper part of the gum tubing 3, and after manipulation, 2 is inserted further into 3 in order to protect the pierced gum tubing.

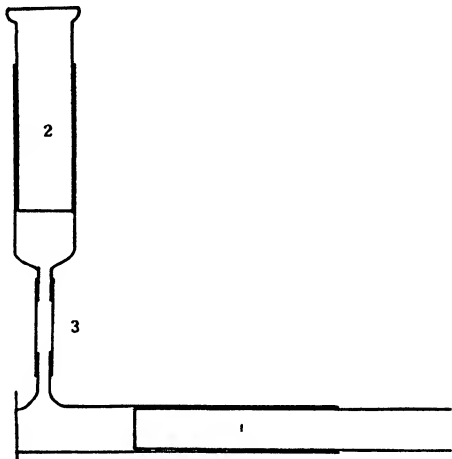


Fig. 5.

A new type of Baly tube. Explanation in text.

The wave-length of the absorption band is read directly or photographically, an example of which, with that of reduced hemoglobin are shown in Fig. 6. The data read for oxyhemoglobin are as follows; Maximum intensity for  $\alpha$  band and  $\beta$  band are  $5760\text{\AA}$  and  $5402\text{\AA}$  respectively. Minimum intensity between  $\alpha$  and  $\beta$  is found at  $5587\text{\AA}$ . Absorption ratio  $\alpha/\beta$  is 0.90. The reduced hemoglobin has a large band between  $5800\text{-}5400\text{\AA}$ . It has two peaks slightly separated, their maxima appear at  $5672\text{\AA}$  and  $5462\text{\AA}$ .

From these data we can conclude that the blood pigment of *Branchiura* is a hemoglobin quite similar to that of *Arenicola* which was reported by VLÈS<sup>27</sup>. Recently KOBAYASHI<sup>21</sup> reported similar hemoglobin from Japanese earthworms, *Pheretima communissima* and *P. hilgendorfi*, and discussions on the various types of hemoglobin have been reported.

**Oxygen dissociation curve**—An oxygen dissociation curve is obtained spectrographically. Two sets of hemoglobin from the same

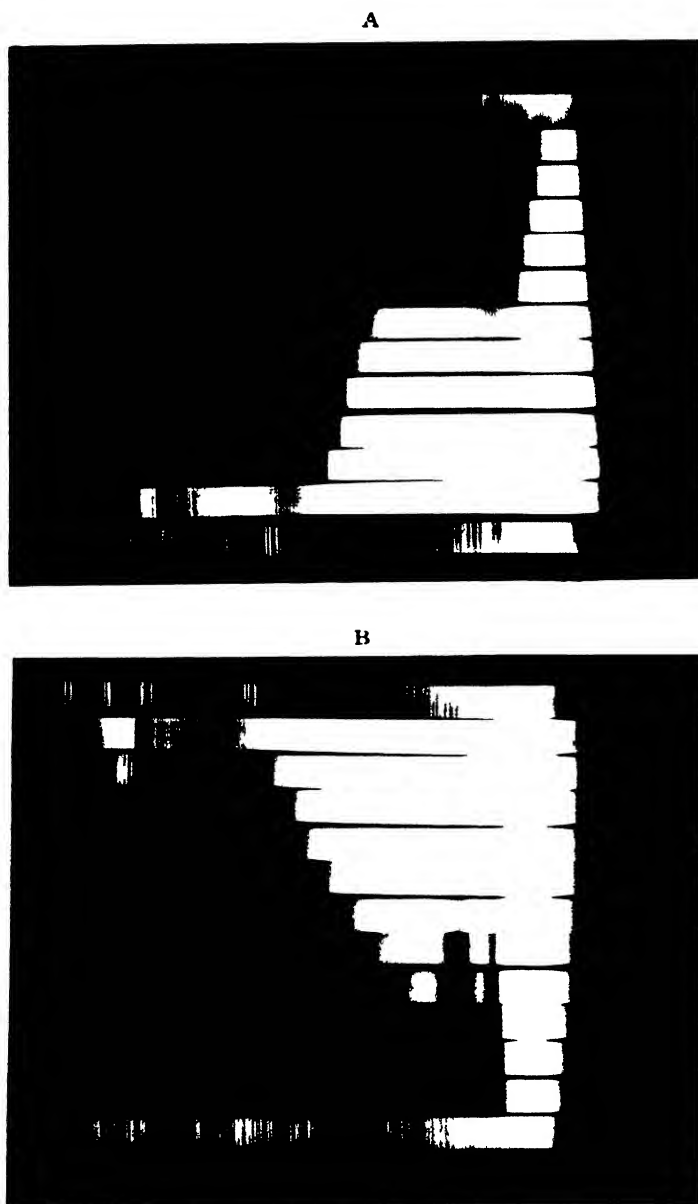


Fig. 6.

Absorption spectra of oxy-hemoglobin (A) and reduced hemoglobin (B) of *Branchinra sowerbyi*. Thicknesses of the solution are 6.0, 5.0, 4.0, 3.0, 2.5, 2.0, 1.5, 1.0, 0.7, 0.4, and 0.2 cm. respectively from up to down for A and reversal for B, respectively. Two extremities are Fe-spectra.

sample are prepared in Baly tubes; one is the standard and the other is for testing. A reservoir of Baly tube (3 of Fig. 5) for the latter is replaced by 100 cc. syringe. The test hemoglobin is reduced by  $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_4$  until the disappearance of the oxyhemoglobin absorption bands. 100 cc of pure  $\text{N}_2$  gas contained in a syringe is injected through 3 as noted in the previous section, then a definite quantity of  $\text{O}_2$  is poured. The whole solution is transferred into 2 and shaken well. Then the length of the standard solution to match with the oxyhemoglobin absorption band of the test is read. By this procedure the curve of Fig. 7 is obtained.

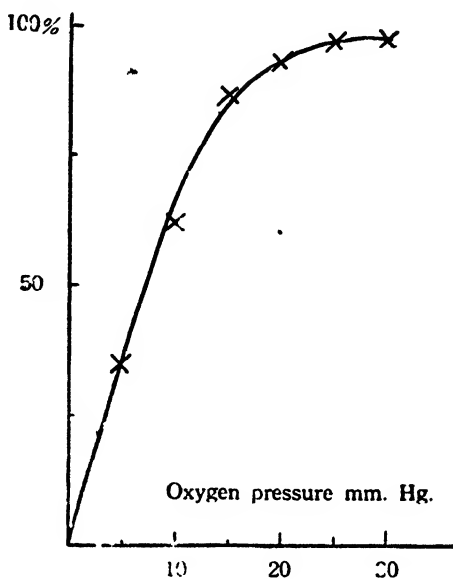


Fig. 7.

Oxygen dissociation curve of *Branchiura* hemoglobin. Ordinate is the percentage of standard. Temperature  $23^\circ\text{C}$ . pH 6.8.

The limit of oxygen pressure which has no effect on the oxygen consumption (page 96) can be explained by the curve. Above the saturation pressure (25 mm Hg) of hemoglobin there was no effect on oxygen consumption, that is to say, hemoglobin plays a main role in the aerobic respiration of this animal.

**Oxidation-reduction potential**—The oxidation-reduction potential of hemoglobin solution is measured by the electrodes of Pt and saturated calomel by using of a k-type potentiometer of Leeds and Northrup. The chamber used is of 60 cc capacity and a 25 cc of M/5 phosphate buffer is added to the sample, prepared as in the previous section. For high pH, a boric acid-KCl-NaOH buffer M/5 is used.

A titration curve of  $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_4$  (about  $10^{-3}\text{M}$ ) is obtained, and the

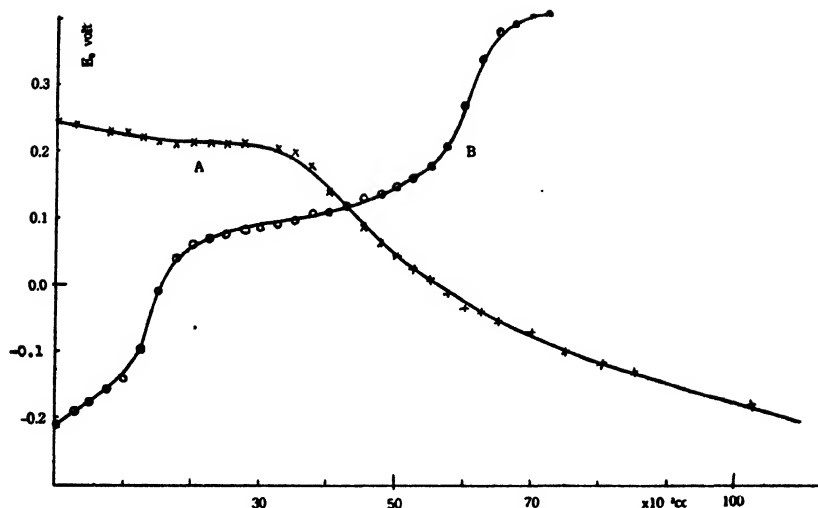


Fig. 8.

Titration curve of *Branchiura* hemoglobin with  $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_4$ , (A), and that of back titration by  $\text{K}_3\text{Fe(CN)}_6$ , (B).

same sample is titrated back by K-ferricyanide. A new type of burette is used for titration. Two syringes are connected to the tip by a three-way stopper. One is a long tube 1 cc. in capacity, for reading; the other is of 10 cc capacity and serves as a reservoir.

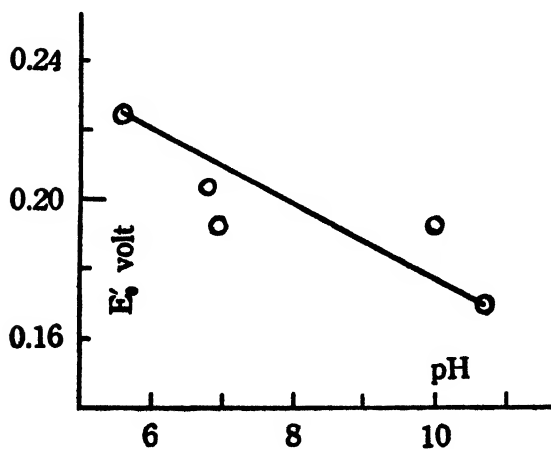


Fig. 9.

Effect of pH on  $E'_0$  of *Branchiura* hemoglobin.

One typical example is shown in Fig. 8.  $E'_0$  is read from the titration curve. It is of 0.21 volts at pH 6.78 temperature  $20^\circ\text{C}$ .

$E'_0$  value for several pH is plotted in Fig. 9. These data significantly differ from the results of CONANT and FIESER<sup>4</sup> for horse hemoglobin. This might be caused

partly by impurities in my case, but partly by the special nature of hemoglobin of this type.

In Fig. 8 the back titration from the reduced system show much lower  $E'_0$ . This is induced by the differences of potentials between the hemoglobin-methemoglobin system (for back titration) and the hemoglobin-oxyhemoglobin system (for first titration), and by the introduction of reducing substances. The second reason will be dealt with elsewhere.

### SUMMARY

1. Respiratory intensity of *Branchiura* seems to depend on the quantity of water which comes in contact with the animal body, and the branchial portion may be taken as a respiratory organ.

2. The temperature constant A of the oscillatory movements of the branchial portion is  $5.7 \times 10^3$  above 18-17°C and  $8.1 \times 10^3$  below it. It is concluded that this oscillation is concerned with respiration.

3. The temperature effect on the oxygen consumption, carbon-dioxide out-put and R. Q. from 35°C to 10°C are measured and their values hold good with the ARRHENIUS' formula, constant A turned out  $6.6 \times 10^3$  for oxygen consumption,  $7.4 \times 10^3$  for CO<sub>2</sub> out put and  $0.67 \times 10^3$  for R. Q. The meaning of constant A for R. Q. is considered.

4. Oxygen consumption shows no decrease until the oxygen pressure reaches one sixth of saturation pressure, by using Winkler's method. About 20 mm.Hg of oxygen is sufficient to maintain the normal respiration. This is also proved from the oxygen dissociation curve of hemoglobin. Anaerobic CO<sub>2</sub> production reaches a considerable amount.

5. R. Q. increases with the increase of hypertonicity. R. Q. in control medium (page 93) has no significant difference from that in distilled water. O<sub>2</sub> consumption decreases in strong hypertonic medium, as well as in distilled water. Mechanisms for the two cases seem to be different.

6. Effects of pH are measured in buffered balanced solution.



Oxygen consumption is increased in alkaline solution and is not changed in acidic solution. R. Q. increases in both extremities of pH, but is especially marked in the acidic solution. The explanation is proposed.

7. Effects of 18 chlorides are studied in several different concentrations. In univalent cations the order of oxygen consumption in a certain concentration is  $\text{Li} < \text{Na} < \text{K}, \text{NH}_4$ ; R. Q. is increased slightly, excepting  $\text{NaCl}$ .  $\text{MnCl}_2$  has high R. Q. and low  $\text{O}_2$  consumption.  $\text{SnCl}_2$  has low R. Q. and high  $\text{O}_2$  consumption.  $\text{FeCl}_3$  has reversal effects to  $\text{SnCl}_2$ . They are explained from the nature of chemicals.  $\text{CoCl}_2$ ,  $\text{NiCl}_2$ ,  $\text{FeCl}_2$ , and  $\text{SrCl}_2$  increase both oxygen consumption and R. Q. Heavy metal chlorides increase R. Q.

8. Among the effect of anions (sodium salt), for halogens the order of oxygen consumption is  $\text{F} < \text{Cl} < \text{Br} < \text{I}$ , and that of R. Q. is  $\text{Cl} < \text{Br} < \text{I} < \text{F}$ . The explanation is considered. The R. Q. increases with the increase of molecular weight in Na-lactate, acetate, tartrate, oxalate, and citrate, and the oxygen consumption has the above mentioned order, largest in lactate.

9. Anaerobic reduction potential of the intact animal is determined colorimetrically by Thunberg tube. It is read about  $-0.12$  volts, and the aerobic reduction potential is about  $0.227$  volts. There is a considerable shift of potential toward negative in anaerobic condition. The aerobic potential is the potential of hemoglobin, and the anaerobic potential is that of tissues.

10. Blood pigment is studied spectrographically. It is similar to the hemoglobin of *Arenicola* reported by VLÈS. This differs in the positions of the maximum absorption band. A new design of Baly tube protected from an air contact is described.

11. The oxygen dissociation curve of the hemoglobin is lined spectroscopically. It is concluded that hemoglobin plays an important role in the respiration.

12. The  $E'_0$  of *Branchiura* hemoglobin is determined from the titration curve with  $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_4$ . It is  $0.21$  volts at pH  $6.78$ , temperature  $20^\circ\text{C}$ . The effects of pH are followed.

## BIBLIOGRAPHY

1. ANDERSON, L. S.; Biol. Bull. 53, 327-42. (1927).
2. ASHBEL, R.; Boll. Soc. ital. sper. 6, 670-3. (Physiol. Abst. 17, 473.) (1931).
3. BARCROFT, J.; The respiratory function of blood, II. Haemoglobin p. 111. (1928)
4. BAUDIN, L.; C. R. de l'Acad. des sc., 192, 637-9. (1931).
5. BELEHRADEK, J.; Temperature and living matter, p. 87. (1935).
6. CONANT, J. B. and FIESER, L. F.; J. Biol. Chem. 62. 595. (1925).
7. CRESTELLI, F.; Jour. Cell. & Comp. Physiol. 4, 221-35. (1934).
8. DAUSEND, K.; Zeits. f. Vergl. Physiol. 14, 557-608. (1931).
9. DICKENS, F. and G. D. GREVILLE; Biochem. J. 29, 1463-83. (1935).
10. DURYEE, W. R.; Anat. Rec. 54, 3. (1935).
11. FOX, H. M.; J. Gen. Physiol. 3, 565-73. (1921).
12. HARNISCH, O.; Zool. Anz. Supp. 8, 55-60. (1935).
13. HESS, O. T.; Physiol. Zool. 3, 1-47. (1930).
14. HYMAN, L. H.; Biol. Bull. 49, 288-322. (1925).
15. KAWAGUTI, S.; This Memoirs 7, 57-69. (1932).
16. ———; J. Fac. Science Tokyo Imp. Univ. IV, 3, 183-8. (1933).
17. ———; Ibid. 3, 189-204. (1933).
18. ———; This Memoirs, 7, 145-153. (1934).
19. ———; This Memoirs, 7, 141. (1934).
20. KLEINMAN, L. W.; J. Cell. & Comp. Physiol. 6, 351-68. (1934).
21. MACHLIS, S., and D. E. GREEN; J. Cell. & Comp. Physiol. 4, 61-78. (1933).
22. OKABE, T.; Report of 13th Japanese Physiol. Cong. 126 (1934).
23. OKADA, T.; Dobutsugaku Zasshi, 41, 416-7. (1929).
24. SCHLIEPER, C.; Biol. Reviews, 10, 350-3, 1935.
25. TANG, P. S.; J. Gen. Physiol. 15, 561-9. (1931).
26. ———; J. Cell. & Comp. Physiol. 7, 475-93. (1936).
27. VLÈS, F.; Arch. physique biol. 2, no. 6. 1923.
28. YAMAMOTO, A.; Acta Phytochimica, 7, 55-92. (1933).
29. YAMAMOTO, T.; J. Fac. Science Imp. Uni. Tokyo IV, 2, 381-8. (1931).
30. KOBAYASHI, S.; Science Rep. Tohoku Imp. Univ. 10, 733-51. (1936).



# Ergänzung zu den Limnologischen Studien auf dem „Sango-Tan“.

(Mit 5 Tabellen und 4 Abbildungen)

Isokiti HARADA

Accepted for publication, December 8, 1937,

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
I. Einleitung ... ..	217
II. Methodik ... ..	218
III. Physikalisch-chemische Verhältnisse	
1) Thermik ... ..	219
2) Durchsichtigkeit ... ..	220
3) Gelöste Gase	
a) Sauerstoff ... ..	221
b) Freie Kohlensäure... ..	223
c) Schwefelwasserstoff ... ..	224
4) Alkalinität ... ..	224
5) Ca- und Mg-Härte... ..	225
6) Wasserstoffionenkonzentration ... ..	225
7) Andere chemische Bestandteile des Seewassers...	227
8) Chemische Zusammensetzung des Seewassers ...	228
IV. Biologische Verhältnisse ... ..	230
V. Beziehung zwischen der Vertikalverteilung der Planktonorganismen und den physikalisch-chemischen Verhältnissen des Seewassers ... ..	235
VI. Zusammenfassung ... ..	237
VII. Literaturverzeichnis ... ..	239

## I. EINLEITUNG.

In der vorherigen Abhandlung veröffentlichte ich (HARADA 1937) die limnologischen Studien auf dem Sango-Tan, wobei die Bevölkerungsverhältnisse des Zooplanktons sowie seine Vertikalwanderungen

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan, Vol. XIV, No. 7, December, 1937.]

im Verlaufe des Tages näher geschildert wurden, während die physikalisch-chemischen Untersuchungen, besonders in der Sommerstagnationsperiode, mangelhaft waren.

In der vorliegenden Arbeit wurden deshalb die physikalisch-chemischen Verhältnisse des Seewassers gerade in der Periode der Sommerstagnation näher studiert, um eine Ergänzung zu meiner vorherigen Abhandlung abzugeben. Zugleich wurden auch die biozoologischen Verhältnisse sowie die Vertikalverteilung der Planktonorganismen festgestellt, um diese in Zusammenhang mit der Vertikalverteilung des Chemismus zu studieren.

Die Untersuchungen wurden am 13. VI, 1936, einem klaren windstillen Tag, auf einem Boot ausgeführt.

## II. METHODIK.

Für die Probeentnahme diente KITAHARA's Wasserschöpfer, welcher mit einem Anhang versehen war (s. HARADA 1937).

Die Temperaturen wurden mit Hilfe von Wasserschöpfer gemessen, wobei das Thermometer eine Zehntelgradeteilung von  $-30^{\circ}$  bis  $+45^{\circ}\text{C}$  besass.

Für die Sauerstoffbestimmung wurde das WINKLER'sche Verfahren angewendet, wobei auch WINKLER's Sauerstoffflasche zur Anwendung kam.

Die freie Kohlensäure wurde nach der von WINKLER (1914) angegebenen Modifikation des TRILLICH'schen Verfahrens und das Karbonat-Ion nach WINKLER's Verfahren (WINKLER 1914) bestimmt.

Der Schwefelwasserstoff wurde nach WINKLER's Methode (WINKLER 1913) durch Farbenvergleich massanalytisch bestimmt.

Alkalinität, bzw. Bikarbonatgehalt und Karbonathärte, (Titration mit  $n/100$  HCl gegen Methylorange als Indikator) wurde gewöhnlich in 100 cc der Wasserprobe bestimmt.

Die Wasserstoffionenkonzentration wurde durch Anwendung von ITANO's Apparat elektrisch bestimmt.

Die Kieselsäure wurde nach der WINKLER'schen Methode (WINKLER

1931), die Phosphorsäure nach der von MAUCHA (1932) angegebenen **Modifikation** des Verfahrens von DENIGÉS und ATKINS, das Sulfat-Ion nach der von WINKLER (1901) modifizierten Methode von ANDREWS und das Chlorid-Ion nach der Methode von MOHR bestimmt.

Der Gehalt von Calcium- und Magnesium-Ion wurde durch Bestimmung von Gesamthärte nach dem von WINKLER (1914) stark modifizierten BLACHER'schen Verfahren und auch durch die Bestimmung von Calciumhärte nach WINKLER (1901) festgestellt.

Das Kalium- und Natrium-Ion wurde nach WINKLER (1916) und das Ferro-Ion auch nach WINKLER (1902, 1910) bestimmt.

Für die Bestimmung der organischen Substanzen und deren Abbauprodukte im Seewasser wurde zuerst das Reduktionsvermögen ( $n/100 \text{ KMnO}_4$ -Verbrauch pro 100 cc Wasserprobe) nach dem WINKLER'schen Verfahren festgestellt.

Die Proteidammoniak-Bestimmung erfolgte nach dem von WINKLER (1902) ausgearbeiteten Verfahren, das Ammonium-Ion ebenfalls.

Das Nitrat-Ion wurde nach WINKLER (1901) auf massanalytischem Wege durch Farbenvergleich bestimmt.

Von den oben angegebenen Bestimmungen wurden dieselben von Phosphorsäure, Sulfat-, Chlorid-, Kalium-, Natrium-, Ferro-Ion, Reduktionsvermögen, Proteidammoniak, und Nitrat-Ion mit den Wasserproben ausgeführt, die ich mit nach Haus genommen habe.

Für die Planktonstudien wurden 2L-Proben einer Tiefenserie (Tiefe: 0, 1, 2, 3, 5, 8, 10, 15, 20, 24 m) um 14<sup>h</sup> entnommen. In jeder Probe wurden alle Planktonorganismen durchgezählt.

### III. PHYSIKALISCH-CHEMISCHE VERHÄLTNISSE.

#### 1) Thermik.

Die Temperaturbestimmungen einer Tiefenserie wurden um Mittag unternommen. Das Zahlenmaterial der Temperaturbestimmungen ist in Tab. 1 enthalten und in Abb. 1 graphisch wiedergegeben.

Ein deutlicher Sprung mit einem Gefälle von  $2,6^{\circ}\text{C}$  wird in der Wasserschicht zwischen 1 und 2 m beobachtet. Unter 2 m Tiefe nimmt der Temperaturwert allmählich ab, bis er in der Tiefe von 24 m den niedersten Wert  $21,0^{\circ}\text{C}$  erreicht. Von da ab zeigt die Wassertemperatur, zu meinem Erstaunen, eine ausgeprägte Inversion, indem sie in dem Bodenschlamm (25 m Tiefe)  $23,5^{\circ}\text{C}$ , also einen Aufstieg von  $2,5^{\circ}\text{C}$ , beträgt. Wiederholte Bestimmungen der Schlammtemperatur wiesen denselben Wert auf. Diese Zunahme der Temperatur im Bodenschlamm ist, soweit ich weiss, sehr merkwürdig.

MiyADI (1937) berichtete bei seinen Untersuchungen auf dem Zitugetu-Tan und dem Sango-Tan im Januar 1937, dass die Temperatur des Bodenschlammes einen höheren Wert als den von Wasserschicht unmittelbar auf dem Grunde aufweist, und dass dies nichts anderes als die aufgespeicherte Wärme im Schlamm während der Sommerstagnation ist.

Dies geht dagegen bei unserem Fall redlich verschieden vor, indem die Untersuchung gerade in der Periode der Sommerstagnation ausgeführt wurde. Ich bin aber der Meinung, dass diese Erscheinung vielleicht ihre Ursache ausschliesslich in der direkten Erwärmung des Bodenschlammes durch die darüber stehende Wassermasse hindurchbohrenden Sonnenstrahlen hat, obgleich für die Beurteilung dieser Erscheinung natürlich eine fortdauernde Beobachtung oder eine experimentelle Untersuchung erforderlich ist.

## 2) Durchsichtigkeit.

Die Durchsichtigkeit des Seewassers betrug nur 67,5 cm. Interessanterweise war das Seewasser in der tiefsten Schicht klarer als das in der oberflächlichen, obgleich die relative Menge des Sestons quantitativ nicht bestimmt wurde. Dieses Verhältnis lässt sich aber z. T. aus der Bestimmung des Reduktionsvermögens leicht annehmen, wie dies später geschildert wird, da das Reduktionsvermögen des Seewassers in der Oberfläche höher als in der Tiefe ist.

### 3) Gelöste Gase.

#### a) Sauerstoff.

Die Sauerstoffbestimmungen wurden von den Wasserproben einer Tiefenserie, welche um 11-12<sup>h</sup> aus der Tiefe von 0, 1, 2, 3, 5, 8, 10, 15, 20, 24 m entnommen wurden, ausgeführt.

Die Resultate sind in Tab. 1 zusammengestellt und in Abb. 1 graphisch wiedergegeben.

Zur Darstellung der Sauerstoffschichtung wendete ich die MAUCHA'sche Formel (MAUCHA 1936),  $d = \frac{O_2}{x} \frac{(b + m\pi - f)}{(b - f)} \frac{S_0'}{S_0} 100$ , an, wo  $O_2$  der gefundene Sauerstoff,  $x$  der absolute Sättigungswert desselben,  $f$  der Dampfdruck des Wassers,  $S_0$  der Volumprozent des Sauerstoffs der Atmosphäre bei der Temperatur und bei dem barometrischen ( $b$ ) und dem hydrostatischen ( $\pi$ ) Druck der Wasserschicht ist.

Tab 1.

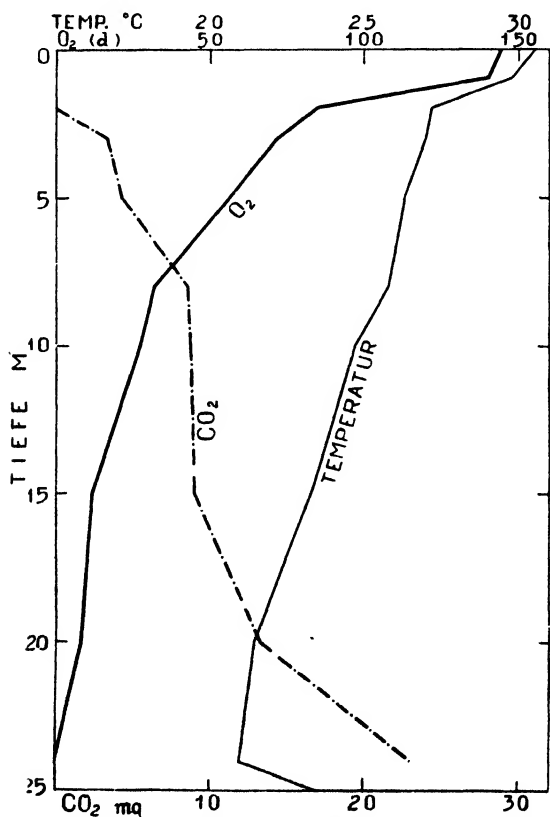
Temperatur und Sauerstoffschichtung im „Sango Tan“.  
Barometerstand  $b$  753,5 mm 13 Juni, 1936.

Tiefe m	Temp. C	O <sub>2</sub> cc L gefunden	$\frac{x}{O_2}$ cc L	$d$	$\frac{O_2}{x} 100$
0	30,5	7,45	5,16	144,38	141,38
1	29,8	7,34	25,12	140,30	29,22
2	27,2	4,66	28,92	81,87	16,11
3	27,0	3,97	31,67	72,05	12,54
5	26,3	3,16	37,47	56,53	8,43
8	25,8	1,78	45,92	31,56	3,90
10	24,7	1,56	52,31	27,09	2,98
15	23,3	0,69	68,01	11,63	1,01
20	21,5	0,05	84,48	0,82	0,06
24	21,0	0	95,32	0	0
25	23,5	-	-	-	-



Der gelöste Sauerstoff stellte, wie dies aus der Tabelle 1 und der Abbildung 1 zu ersehen ist, eine deutliche Stratifikation dar. Wir finden nämlich in der Oberfläche eine starke Übersättigung (144,4% der absoluten Sättigung), dann einen sehr ausgeprägten Sprung mit einem Gefälle von 2,68 cc O<sub>2</sub> pro L zwischen 1 und 2 m Tiefe. In der Tiefe von 2 m abwärts nimmt der Sauerstoffgehalt allmählich ab und zeigt ein starkes O<sub>2</sub>-Defizit schon in der Tiefe von 20 m, bevor sein vollkommenes Verschwinden in der Tiefe von 24 m stattfindet.

Abb. 1.



Temperatur-, Sauerstoff- und freie CO<sub>2</sub>-Schichtung im „Sango-Tan“. 12. Juni, 1936.

Bei dieser Gelegenheit muss ich eine Erörterung über die Übersättigung des Sauerstoffs in der oberflächlichen Wasserschicht geben. Der Sango-Tan ermangelt, wie ich in der letzteren Abhandlung angegeben habe, des pflanzlichen Netzplanktons gänzlich.

Glücklicherweise habe ich diesmal die Wasserprobe aus der Oberfläche mit nach Haus genommen und konnte ich in ihr als Zentrifugenplankton zahlreiche Zellen von *Ankistrodesmus* sp. und *Planktonema* sp. ? feststellen. Der Übersättigungsgrad des Sauerstoffs in unserem See beruht also zweifellos auf dem Vorkommen von diesen Zentrifugenplanktern.

Die Wasserschicht von 1 bis 2 m Tiefe, wo die Sauerstoffschichtung einen Sprung aufweist, entspricht wohl der thermischen Sprungschicht.

Für die Bezeichnung der Charakteristik des Sees empfahl MAUCHA (1936), dass man Mittelwert  $\delta = \frac{\sum d}{n}$  sämtlicher sich auf das Hypolimnion beziehenden Werte von  $d$  anwendet, wo  $n$  die Zahl der Einzelbestimmungen ist. Berechnet man diesen Mittelwert in unserem See, so ist  $\delta = 35,6$ . Der See ist also nach LUNDBECK (1926) eutroph und kann in die *Bathophilus-Plumosus*-Type eingereiht werden.

#### b) Freie Kohlensäure.

Die Bestimmungen der freien Kohlensäure wurden etwa um Mittag in den Schöpfängen einer Tiefenserie ausgeführt.

Das Resultat ist in Tab. 2 enthalten und in Abb. 2 graphisch wiedergegeben. Das Vorkommen der freien Kohlensäure wird erst in der Tiefe von 3 m beobachtet. Die freie Kohlensäure in der oberflächlichen Wasserschicht wird also in unserem See durch eine dem Zentrifugenplankton zukommende Assimilation aufgebraucht. In der Wasserschicht von 5–8 m setzt eine rasche Zunahme ein, die bis 15 m nur allmählich erfolgt und darunter nahe an dem Seeboden, wo das annähernd völlige oder vollkommene Sauerstoffdefizit stattfindet, wieder steiler wird.

## c) Schwefelwasserstoff.

Von den Wasserproben, welche aus der tiefsten Wasserschicht entnommen wurden, war der  $H_2S$  Geruch nicht bemerkbar. Die  $H_2S$ -Bestimmung nach WINKLER'scher Methode war auch negativ.

## 4) Alkalinität.

Die Vertikalschichtung der Alkalinität steht in innigem Zusammenhang mit der  $CO_2$ -Ausscheidung durch die Fäulnis im Wasser.

In unserem See bleibt die Alkalinität im Epilimnion, wo die freie Kohlensäure zu der Assimilation angewendet wird, in einem geringen Wert. Von Metalimnion bis zu 15 m Tiefe, wo die freie Kohlensäure verhältnismässig gering ist, aber gegen die Tiefe zu eine allmähliche Zunahme aufweist, wird eine rasche Zunahme der Alkalinität bemerkt. Unter 15 m Tiefe ist dagegen die Zunahme der Alkalinität sehr gering, wenn die freie Kohlensäure auch in dieser Wasserschicht eine starke Zunahme aufweist.

Tab. 2.

Vertikalverteilung von freier Kohlensäure, Alkalinität, Harte (Karbonat, Gesamt, Ca, Mg) und Wasserstoffionenkonzentration im Sango Tan.

Tiefe m	Freie $CO_2$ mg/L	Alkali- nitat	Harte				pH	
			Kar- bonat	Gesamt	Ca	Mg	gefund.	berechn.
0	0	1,77	4,96	7,20	2,78	4,42	7,70	—
1	0	1,92	5,33	—	—	—	7,58	—
2	0	1,94	5,43	—	—	—	7,48	—
3	3,44	2,00	5,60	—	—	—	7,23	7,93
5	4,34	2,09	5,85	—	—	—	7,18	7,85
8	8,55	2,28	6,38	—	—	—	7,23	7,59
10	8,70	2,41	6,75	—	—	—	7,27	7,61
15	8,92	2,61	7,31	—	—	—	7,32	7,63
20	13,38	2,66	7,45	—	—	—	7,32	7,46
24	23,00	2,68	7,50	9,60	5,12	4,48	7,49	7,23

Unter diesen Umständen scheint es mir sehr plausibel anzunehmen, dass die Zunahme der Alkalinität, d. h. dieselbe der Hydrokarbonate, in dieser Stagnationsperiode schon in der Wasserschicht unter 15 m beinahe den höchsten Grad erreicht hat. Der höchste Alkalinitätswert (=2,68) in der tiefsten Wasserschicht erreicht aber nicht denjenigen in der Zirkulationsperiode im Januar 1934 in dem See, weil hier die ganze Wassermasse über 2,8 Alkalinität aufwies. Eine weitere Zunahme der Alkalinität lässt sich deshalb im Laufe der Sommerstagnation leicht vermuten.

Das Zahlenmaterial der gefundenen Alkalinität bzw. der Karbonathärte ist in Tab. 2 enthalten, und die Alkalinität in Abb. 2 graphisch wiedergegeben.

#### 5) Ca- und Mg-Härte.

Hier wurden die Ca- und Mg-Härte nur von den Wasserproben in der Oberfläche und in der tiefsten Wasserschicht unmittelbar auf dem Grunde festgestellt (Tab. 2).

Vergleicht man die beiden Bestimmungen, so ist Ca-Härte in der Tiefe, im Gegenteil zu der in der Oberfläche, stark erhöht, obgleich die Zunahme der Mg-Härte in der Tiefe nur schwer erkennbar ist. Dies beruht zweifellos auf der Zunahme von  $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$  in der Tiefe, wie ich es schon in dem Abschnitt der Alkalinität erwähnt habe.

Hier ist noch anzunehmen, dass die Gesamthärte stets höher als die Karbonathärte ist. Die Differenz zwischen der Gesamthärte und der Karbonathärte ist 2,24 (deutsche Härtegrade) in der Oberfläche und 2,10 in der Tiefe unmittelbar auf dem Grunde. Sie bedeutet nämlich, dass der Ca- oder Mg-Ionen mehr vorhanden ist, als dem Äquivalentgewicht von  $\text{HCO}_3'$  entspricht. Diese Mehrionen scheinen mit  $\text{SO}_4'$  im Gleichgewicht zu stehen, wie dies aus der chemischen Zusammensetzung des Seewassers (Tab. 4) vermutet werden kann.

#### 6) Wasserstoffionenkonzentration.

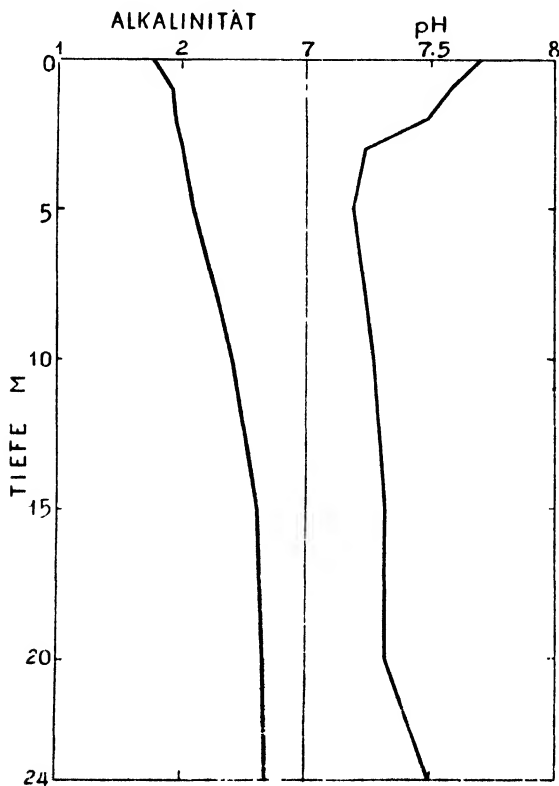
Die Bestimmungen der Wasserstoffionenkonzentration des Seewassers ergaben, im allgemeinen, ziemlich höhere pH-Werte und

alle Wasserproben reagierten alkalisch.

Eine deutliche Vertikalschichtung der pH-Werte wurde bemerkt, indem eine rasche Abnahme in der oberflächlichen Wasserschicht (von der Oberfläche bis zur Tiefe von 5 m) und dann eine sehr allmähliche Zunahme nach dem Grunde zu stattfindet. Solche Inversion von pH-Werte wird besonders in der tiefsten Wasserschicht (20-24 m), ungeachtet der stetigen Zunahme der freien Kohlensäure gegen den Grund hin, steiler.

Diese Befunde widersprechen insoweit den Ergebnissen von

Abb. 2.



Vertikalverteilung von Alkalinität und Wasserstoff-ionenkonzentration im Sango-Tan- 12. Juni, 1936.

MIYADI (1935), als er keine solche Inversion der pH-Werte in der Tiefe bemerkte, obgleich seine Untersuchung in unserem See bei der Stagnationsperiode im April 1935 ausgeführt wurde. Bezüglich der Vertikalverteilung von pH werden auch die Ergebnisse von UENO (1936) zitiert, welche er bei der Untersuchung im Juli 1935 im Sango-Tan erlangt hat. Nach ihm zeigen die pH-Werte auch in der Tiefe eine Inversion. YOSHIMURA (1932) hat auch die dichotomische Vertikalverteilung von Wasserstoffionenkonzentration in verschiedenen japanischen Gewässern mit dem Hypolimnion von hohem Puffervermögen angegeben.

Berechnet man die Wasserstoffionenkonzentration in unserem See nach TILLMANS' Formel (TILLMANS 1919), so weist der pH-Wert auch in der Tiefe eine Zunahme auf, wie dies aus der Tab. 2 zu ersehen ist. Die dichotomische Vertikalverteilung von pH, mit einem niedersten pH-Wert (=7,18) in der Tiefe von 5 m, in unserem See scheint auch von dem höheren Puffervermögen des Seewassers im Hypolimnion herzurühren.

## 7) Andere chemische Bestandteile des Seewassers.

Die Bestimmungen von Kieselsäure, Phosphorsäure, Schwefelsäure, Chlorid-, Kalium-, Natrium-, Ferro-, Nitrat-Ion, Proteidammoniak, Ammoniak und Reduktionsvermögen des Seewassers wurden mit den Wasserproben aus der Oberfläche und der Wasserschicht unmittelbar auf dem Grunde ausgeführt. Die Resultate sind in Tab. 3 enthalten.

In der ernährungsbiologischen Hinsicht ist der P+N-Gehalt im Seewasser sehr bedeutsam. Berechnet man den Phosphor- und Stickstoffgehalt in unserem See, so enthält das Wasser 55 mg  $P_2O_5$  und 1474 mg  $N_2O_5$  pro cbm in der Oberfläche, und 100 mg  $P_2O_5$  und 2014 mg  $N_2O_5$  pro cbm in der Tiefe unmittelbar auf dem Grunde.

Tab. 3.

Der Gehalt von  $\text{SiO}_2$ ,  $\text{P}_2\text{O}_5$ ,  $\text{SO}_2$ ,  $\text{Cl}$ ,  $\text{K}_2\text{O}$ ,  $\text{Na}_2\text{O}$ ,  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ,  $\text{N}_2\text{O}$ , Proteidammoniak und Ammoniak; und das Reduktionsvermögen des Seewassers in der Oberfläche und in der Wasserschicht unmittelbar auf dem Grunde.

	Oberfläche	Grund
$\text{SiO}_2$	6,5 mg p. L	7,8 mg p. L
$\text{P}_2\text{O}_5$	0,055 „	0,100 „
$\text{SO}_2$	62,50 „	50,41 „
$\text{Cl}$	6,6 „	7,4 „
$\text{K}_2\text{O}$	0,59 „	2,78 „
$\text{Na}_2\text{O}$	36,28 „	36,15 „
$\text{Fe}_2\text{O}_3$	0,043 „	0,086 „
Nitrit- + Nitration ( $\text{N}_2\text{O}_5$ )	0,87 „	0,87 „
Proteidammoniak (H N)	0,19 „	0,36 „
Ammoniak (H N)	0	0
Reduktionsvermögen ( $\text{KMnO}_4$ )	15,18 „	8,85 „

### 8) Chemische Zusammensetzung des Seewassers.

Die ökologischen Verhältnisse des Sees scheinen mit der chemischen Zusammensetzung des Seewassers in innigem Zusammenhang zu stehen.

Zunächst sind die Elektrolyte des Seewassers nach der Analyse ionisch angegeben und dann in Äquivalentprozenten aufgestellt, um die ionische Zusammensetzung des Seewassers nach der Methode von TELKESSY (in MAUCHA 1932) graphisch darzustellen. Hier handelt es sich um die Wasserproben in der Oberfläche und in der Wasserschicht unmittelbar auf dem Grunde.

Das Zahlenmaterial der ionischen Zusammensetzung des Seewassers ist in Tab. 4 enthalten und in Abb. 3 graphisch wiedergegeben.

Die beiden Proben weisen, im grossen und ganzen, ein ähnliches Bild in der ionischen Zusammensetzung auf.

Tab. 4.

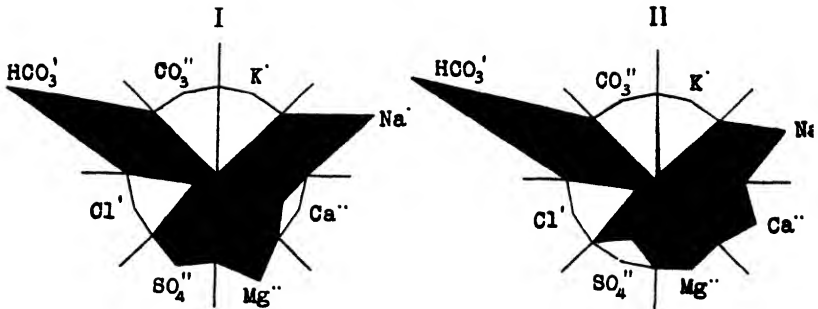
Die chemische Zusammensetzung des Seewassers im „Sango-Tan“.

	Dualistisch mg p. L	Ionisch mg p. L	Zahl der Äquivalenten	Äquivalent- prozenten
Oberfläche (I)	K <sub>2</sub> O : 0,59	K' : 0,49	0,013	0,53
	Na <sub>2</sub> O : 36,28	Na' : 26,91	1,170	47,40
	CaO : 27,80	Ca'' : 19,86	0,496	20,09
	MgO : 31,86	Mg'' : 19,23	0,789	31,96
	Fe <sub>2</sub> O : 0,043	Fe'' : 0,03	0,0005	0,02
	Summe	66,52	2,4685	100,00
	Cl : 6,60	Cl' : 6,60	0,186	6,79
	SO <sub>4</sub> : 62,50	SO <sub>4</sub> '' : 75,00	0,785	28,64
	Karbonat-CO <sub>2</sub> : 0	CO '' : 0	0	0
	Hydrokarb. CO <sub>2</sub> : 77,92	HCO ' : 107,99	1,770	64,57
	Summe	189,59	2,741	100,00
Grund (II)	K <sub>2</sub> O : 2,78	K' : 2,31	0,059	2,01
	Na <sub>2</sub> O : 36,15	Na' : 26,80	1,165	39,64
	CaO : 51,20	Ca'' : 36,57	0,914	31,10
	MgO : 32,87	Mg'' : 19,49	0,800	27,22
	Fe <sub>2</sub> O : 0,086	Fe'' : 0,06	0,001	0,03
	Summe	85,23	2,939	100,00
	Cl : 7,40	Cl' : 7,40	0,209	5,93
	SO <sub>4</sub> : 50,41	SO <sub>4</sub> '' : 60,50	0,627	17,84
	Karbonat-CO <sub>2</sub> : 0	CO '' : 0	0	0
	Hydrokarb.-CO <sub>2</sub> : 117,92	HCO ' : 163,51	2,680	76,23
	Summe	231,41	3,516	100,00

Eine Zunahme von K' und Ca'', bzw. HCO<sub>3</sub>' ist aber in der Wasserschicht unmittelbar auf dem Grunde sehr ausgeprägt, und zwei-



Abb. 3.



Ionische Zusammensetzung des Seewassers in der Oberfläche (I) und in der Wasserschicht unmittelbar auf dem Grunde (II) im Sango Tan.

fellos beruht die des letzteren auf dem Auflösen des festen  $\text{CaCO}_3$  durch die sich dort bildende aggressive Kohlensäure.

#### IV. BIOLOGISCHE VERHÄLTNISSE.

Um die biologischen Verhältnisse in dieser Jahreszeit festzustellen, wurden Planktonproben einer Tiefenserie, welche um 14<sup>h</sup> entnommen wurden, untersucht.

Folgendes ist die Übersicht der Arten, welche im Zooplankton aus dem Sango-Tan im Juni vertreten sind :

1. *Ceratium hirundinella* MÜLLER
2. *Trichocerca capucina* (WIERZ. u. ZACHAR.)
3. *Brachionus pala* EHRENBERG
4. *B. forficula laevis* APSTEIN
5. *Schizocerca diversicornis* DADAY
6. *Keratella cochlearis* (GOSSE)
7. *K. valga* (EHRENBERG)
8. *Asplanchna priodonta* GOSSE
9. *Pedalia mira* (HUDSON)
10. *Pompholyx complanata* GOSSE
11. *Diaphanosoma brachyurum* (LIEVIN)
12. *D. paucispinosum* BREHM
13. *Ceriodaphnia cornuta* SARS

14. *Mongolodiptomus formosanus* KIEFER
15. *Mesocyclops thermocyclopoides* HARADA
16. *M. taihokensis* HARADA
17. *Ergasilus japonicus* HARADA
18. Freilebende Nematoden.

Wir finden nämlich mindestens 18 Arten im Zooplankton im Juni. Biocoenotisch stehen also unsere Ergebnisse denjenigen im August 1932 sehr nahe, weil hier nur der Arten, *Peridinium* sp., *Polyarthra platyptera*, *Diurella stylata*, *Tetramastix taiwanensis* und *Ceriodaphnia rigaudi*, ermangelt werden.

Unter den oben angegebenen 18 Arten war das Vorkommen von *Mesocyclops taihokensis* (Adultstadien), *Ergasilus japonicus*, *Keratella cochlearis* und freilebenden Nematoden sehr geringfügig. Es ist besonders merkwürdig, dass das Vorkommen von *M. taihokensis* in diesem Monate als Adultstadium sehr geringfügig und durch starke Massenfaltung von *M. thermocyclopoides* unterdrückt wird, was den früheren Ergebnissen (HARADA 1937) entgegengesetzt ist.

Es ist noch anzunehmen, dass die Copepoditen (*Mesocyclops*) hier, im Gegensatz zu den Ergebnissen in der früheren Arbeit, viel stärker entfaltet sind. Dies bedeutet nämlich eine starke Massenfaltung von *Mesocyclops* in nächster Zukunft.

*Ceriodaphnia* wurde diesmal nur durch *cornuta* repräsentiert. Diese Art wurde nur in dem Hypolimnion gefunden.

Die gesamte Individuenzahl beträgt diesmal 83,6 pro L. In produktionsbiologischer Hinsicht ist also die Biocoenose in diesem Monate armseliger als dieselbe in der früheren Arbeit.

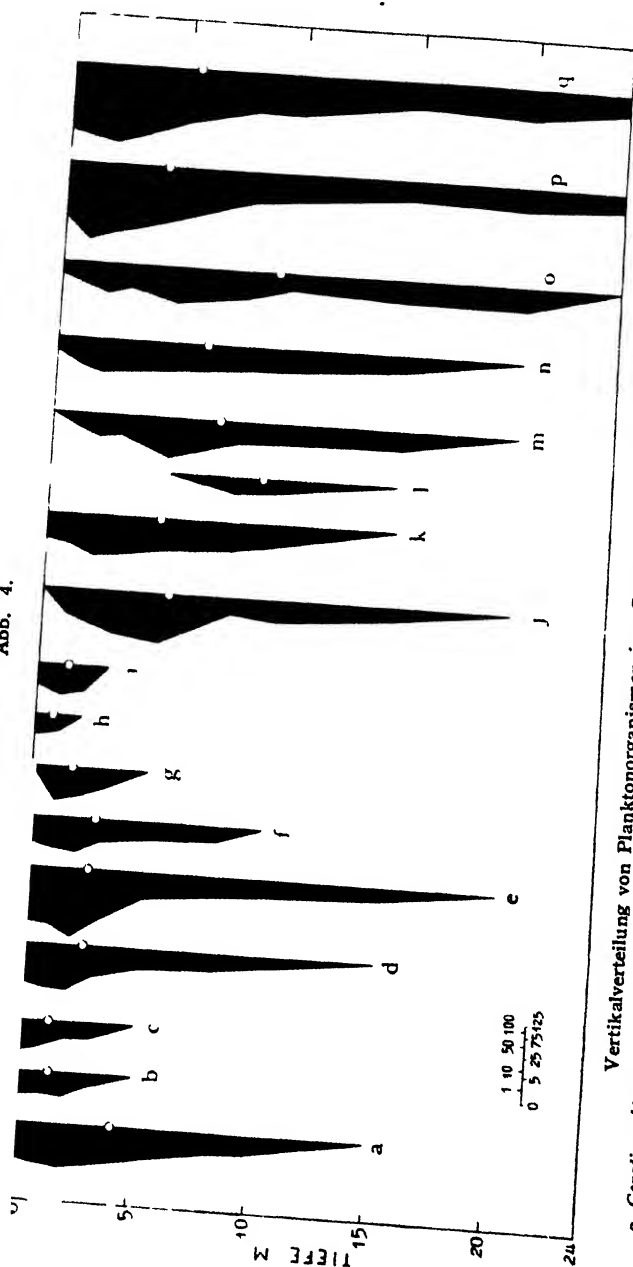
Betreffs der Vertikalverteilung von Planktern, sind die Zahlen in Tab. 5 zusammengestellt und nach LOHMANN'scher Methode in Abb. 4 graphisch wiedergegeben. In der Abbildung ist auch die mittlere Tiefe der Vertikalverteilung der Planktonorganismen, welche nach NABER'scher Formel berechnet wurde, angegeben (in der Abbildung mit der Marke ○ bezeichnet).

In der Tabelle sowie in der Abbildung sind die Copepoditen von *Mesocyclops* und die Nauplien jedes für sich als ein einheitliches

Tab. 5.  
Vertikalverteilung und mittlere Tiefe der Vertikalverteilung der Planktonorganismen im „Sango-Tan“.

	TIEFE IN M											Mittl. Tiefe in M
	0	1	2	3	5	8	10	15	20	24	Mittl. Indiv.- zahl pro L.	
<i>Ceratiurn hirundinella</i>	8,0	12,0	17,0	14,0	8,0	4,5	1,5	0	0	0	3,8	4,16
<i>Trichocerca capucina</i>	3,0	2,0	3,0	0,5	0	0	0	0	0	0	0,3	1,43
<i>Brachionus pala</i>	7,0	3,5	1,0	1,0	0	0	0	0	0	0	0,4	1,32
<i>B. forficula laevis</i>	12,5	20,5	21,0	7,0	2,0	1,5	0,5	0	0	0	2,9	2,59
<i>Schizocerca diversicornis</i>	35,5	41,5	76,0	33,5	4,5	2,0	1,5	0,5	0	0	8,7	2,63
<i>Keratella valga</i>	3,5	7,5	9,5	3,0	1,5	1,0	0	0	0	0	1,2	2,80
<i>Asplanchna priodonta</i>	0	9,5	5,5	2,0	0	0	0	0	0	0	0,8	1,72
<i>Pedalia mira</i>	2,0	1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,1	0,75
<i>Pompholyx complanata</i>	2,0	7,0	4,0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	1,29
<i>Diaphanosoma brachyurum</i>	0	3,5	8,5	18,5	23,0	1,0	2,5	0,5	0	0	5,2	5,34
<i>Diaphanosoma paucispinosum</i>	4,0	7,0	16,0	14,5	8,0	5,5	2,5	0	0	0	3,7	4,82
<i>Ceriodaphnia cornuta</i>	0	0	0	0	0	1,0	0,5	0	0	0	0,2	9,14
<i>Mongolodiplomus formosanus</i>	0	0,5	3,0	2,0	15,5	2,5	2,0	1,5	0	0	2,8	7,12
Do. Copepoditen	0,5	5,0	9,5	8,0	6,0	3,5	3,0	1,0	0	0	2,8	6,45
<i>Mesocyclops thermocyclopoides</i>	0,5	2,5	6,5	3,0	11,5	5,5	1,0	3,0	3,0	0	3,7	9,30
<i>Mesocyclops</i> Copepoditen	40,5	114,0	81,0	65,5	36,0	8,0	5,5	2,0	3,5	1,5	19,8	4,27
Nauplien	78,0	94,5	114,5	87,5	42,0	16,5	17,5	5,0	7,5	2,0	27,1	5,41
Summe	197,0	331,5	379,0	260,0	163,0	52,5	38,0	13,5	15,0	4,0	84,0	

Abb. 4.



Vertikalverteilung von Planktonorganismen im „Sango-Tan“ 13. Juni, 1936 (um 14<sup>h</sup>).

a. *Ceratium hirundinella*, b. *Trichocerca capricornis*, c. *Brachionus pala*, d. *B. forficula laevis*, e. *Schizocerca diversicornis*, f. *Keratella vulga*, g. *Asplanchna priodonta*, h. *Pedalia mira*, i. *Pompholyx complanata*, j. *Daphnosoma brachyurum*, k. *D. paucispinosum*, l. *Ceriodaphnia cornuta*, m. *Mongolodiplomus formosus*, n. Do. Copepoditen o. *Mesocyclops thermocyclopoides*, p. Copepoditen (*Mesocyclops*), q. Nauplien.

○ Durchschnittstiefe.

Ganzes behandelt. Die Copepoditen (*Mesocyclops*) sind also hauptsächlich durch *M. thermocyclopoides* und *M. taihokensis* vertreten, die Nauplien durch *Mongolodiptomus formosanus*, *Mesocyclops thermocyclopoides* und *M. taihokensis*.

Vergleicht man diese Ergebnisse mit den der früheren Arbeit, so entsprechen die Verteilungsverhältnisse, im allgemeinen, denselben im August.

*Ceratium hirundinella* bewohnt hauptsächlich die Wasserschicht von Epi- bis Metalimnion, fehlt aber im Hypolimnion.

Die Rotatorien bewohnten, wie es gewöhnlich bei der Stagnationsperiode in unserem See der Fall ist, meist das Epilimnion, mit Ausnahme von *Brachionus forficula*, *Schizocerca diversicornis* und *Keratella valga*, bei welchen der Verteilungsraum bis zum oberen Hypolimnion erreicht.

Die Vertikalverteilung von Diaphanosomen war dieselbe wie in der früheren Untersuchung. Die bedeutendste Volksdichte findet sich im Metalimnion.

Die Vertikalverteilung der Copepoditen und der Geschlechtstiere von *Mongolodiptomus formosanus* erstreckt sich über die Wasserschicht von Epi- bis Hypolimnion. Die Hauptvolksdichte findet sich aber bei beiden Formen im Metalimnion. Das Vorkommen in der Oberfläche wurde nur bei den Copepodidstadien beobachtet.

*Mesocyclops thermocyclopoides* ist sehr charakteristisch in seiner Vertikalverteilung, indem diese Species tief in das Hypolimnion eindringt, wo es am gelösten Sauerstoff beinahe gänzlich fehlt.

Es ist höchst merkwürdig, dass die Copepoditen (enthaltend dieselben von *M. thermocyclopoides* und *M. taihokensis*) und die Nauplien (enthaltend dieselben von *Mongolodiptomus formosanus*, *Mesocyclops thermocyclopoides* und *M. taihokensis*) noch tiefer in die Wasserschicht unmittelbar auf dem Grunde hineindringen, wo sich das vollkommene O<sub>2</sub>-Defizit findet. Der Prozentsatz der Individuenzahl in dieser Wasserschicht beträgt, im Gegensatz zu dem in der Oberfläche, etwa 3,7% bei den Copepoditen und 2,6% bei den Nauplien. Das gleiche Verhältnis wurde auch in der Untersuchung im August 1932 bei den Jungen und Adultstadien von *Mesocyclops* beobachtet. Es kommt hier

in Frage, ob diese Werte des Prozentsatzes als die innerhalb der Fehlerquelle von Methodik liegenden betrachtet werden soll oder nicht. Dies scheint aber eine grundlose Angst zu sein, weil *Ceratium hirundinella*, *Schizocerca diversicornis*, *Diaphanosoma paucispinosum* u. s. w., welche in der Oberfläche eine verhältnismässig grosse Volksdichte aufweisen, in den Proben aus dem Hypolimnion vollkommen fehlen. Es ist deshalb anzunehmen, dass die *Mesocyclops*-Copepoditen und die Nauplien, im allgemeinen, ein starkes O<sub>2</sub>-Defizit und einen hohen Gehalt der freien Kohlensäure aushalten können.

Was die Durchschnittstiefe der Vertikalverteilung betrifft, so zeigt sie bei meisten Arten ein ähnliches Verhältnis wie die im August 1932.

Hier ist aber zu bemerken, dass die Durchschnittstiefe bei einigen Rotatorien eine seichtere Lagerung als die oberen Grenzlage der Durchschnittstiefen im August 1932 zeigt, wie dies bei *Brachionus pala*, *Keratella cochlearis* und *Pedalia mira* deutlich zu ersehen ist. Bei *Diaphanosoma paucispinosum* wird auch eine seichtere Lagerung bemerkt.

Bei den Nauplien wird dagegen eine etwas tiefere Lagerung der Durchschnittstiefe festgestellt, worüber ich hier keine genügende Erklärung zu geben vermag.

## V. BEZIEHUNG ZWISCHEN DER VERTIKALVERTEILUNG DER PLANKTONORGANISMEN UND DEN PHYSIKALISCH-CHEMISCHEN VERHÄLTNISSEN DES SEEWASSERS.

Es ist wohl bekannt, dass die Lichtintensität im See einen starken Einfluss auf die Vertikalverteilung der Planktonorganismen ausübt. In dieser Beziehung spielt die Durchsichtigkeit des Seewassers eine grosse Rolle in der Vertikalverteilung der Planktonorganismen. In unserem See ist es sehr charakteristisch, dass die verschiedenen Planktontiere in verhältnismässig grosser Individuenzahl in der Oberfläche auftreten, was zweifellos auf der geringen Durchsichtigkeit des Seewassers beruht, denn diese beträgt nur 67,5 cm (Tab. 5 u. Abb. 4).

Die Schichtungsverhältnisse des Chemismus des Seewassers, welche

infolge der Stagnation des Sees hervorgerufen werden, sind auch von grosser Bedeutung für die Vertikalverteilung von Planktonorganismen im See. Die erste chemische Veränderung im See während der Sommerstagnation besteht in dem Sauerstoffdefizit, und entsteht durch Fäulnis in der Tiefe. Als begleitende chemische Veränderungen finden die  $\text{CO}_2$ -Ausscheidung, die Zunahme der Alkalinität, pH-Veränderung u. s. w. statt. In dieser Weise werden die chemischen Schichtungen im See gebildet.

Es ist sehr interessant, aber von besonderer Schwierigkeit, die Vertikalverteilung der Planktonorganismen in Zusammenhang mit derselben des Chemismus zu erklären, weil dabei stets auch andere physikalische Faktoren, z. B. die Temperatur, die Durchsichtigkeit, die Lichtintensität im Wasser, zu berücksichtigen sind.

Nach HARRING und MYERS (1927) steht die Verbreitung von Rotatorien mit der Wasserstoffionenkonzentration der Gewässer in direktem Zusammenhang, d. h. gedeihen die Rotatorien in Gewässern von  $\text{pH} > 7$ , dagegen gehen sie stark zurück, wenn  $\text{pH} < 7$  ist.

Bei unserem Fall scheint es auch, dass die Vertikalverteilung von meisten Rotatorien von dem pH-Wert in der Wasserschicht abhängig ist, da z. B. *Trichocerca capucina*, *Brachionus pala*, *Asplanchna priodonta*, *Pedalia mira* und *Pompholyx complanata* unter der Wasserschicht von 5 m Tiefe mit einem niederen pH-Wert ( $=7,18$ ) vollkommen fehlen. Das bei der Untersuchung im Januar 1934 beobachtete Vorkommen von *Brachionus pala* und *Asplanchna priodonta* in allen Wasserschichten unmittelbar von der Oberfläche bis zum Grunde wird auch in der gleichen Weise erklärt, weil dabei das ganze Seewasser einen höheren pH-Wert (um 7,5) aufwies.

Der Gehalt des Sauerstoffs und der freien Kohlensäure scheinen dabei keine direkte Rolle zu spielen, weil in der Tiefe von 5 m der Sauerstoff noch reichlich vorhanden war und die freie Kohlensäure schon in ziemlicher Menge ausgeschieden war, während bei der Untersuchung im Januar 1934 das Wasser aller Schichten reichlichen Sauerstoff, aber keine freie Kohlensäure enthielt.

Unter Rotatorien können *Brachionus forficula*, *Schizocerca diversi-*

*cornis* und *Keratella cochlearis*, bis zu einem Grade, das Sauerstoffdefizit, den Gehalt an freier Kohlensäure und die pH-Erniedrigung ertragen, wenn die bedeutendste Volksdichte auch in der thermischen bzw. der chemischen Sprungschicht stattfindet.

Die Plankton-Crustaceen scheinen ein ziemlich grosses Sauerstoffdefizit und einen Gehalt der freien Kohlensäure des Seewassers zu ertragen, also in einem verhältnismässig weiteren pH-Bereich vorzukommen. Diese Eigenschaft wird bei den Copepoditen weiter erhöht. *Mesocyclops thermocyclopoides* und die Jungen der Cyclopiden können, im allgemeinen, ein starkes oder gänzlich Fehlen des Sauerstoffs ertragen, obgleich ihre grösste Volksdichte sich meist in der Wasserschicht nahe an der Oberfläche findet. Hier ist aber anzunehmen, dass die Vertikalverteilung von Plankton-Crustaceen viel stärker von der Lichtintensität im Seewasser (also von physikalischen Faktoren) beeinflusst werden, wie dies von der starken täglichen Vertikalwanderung von Plankton-Crustaceen zu ersehen ist.

*Ceratum hirundinella* scheint auch, bis zu einem gewissen Grade, das Sauerstoffdefizit, den  $\text{CO}_2$ -Gehalt des Seewassers zu ertragen, obgleich das Vorkommen in der Wasserschicht nahe am Grunde vollständig verweigert wird.

## VI. ZUSAMMENFASSUNG.

1) Die physikalisch-chemischen sowie die biologischen Verhältnisse im „Sango-Tan“ wurden gerade in der Stagnationsperiode im Juni 1936 untersucht.

2) Die physikalisch-chemische Sprungschicht wurde in der Wasserschicht zwischen 1 und 2 m Tiefe festgestellt, indem die Temperatur-, Sauerstoff- und pH-Kurve in dieser Wasserschicht einen Sprung mit starkem Gefälle aufwies. Diese seichte Lagerung der Sprungschicht scheint ihre wichtigste Ursache in der ausserordentlich geringfügigen Durchsichtigkeit unseres Sees zu haben.

3) Die Temperatur des Bodenschlammes betrug einen höheren Wert als die Wassertemperatur unmittelbar auf dem Grunde. Über



diese merkwürdige Erscheinung bin ich der Meinung, dass sie vielleicht ihre Ursache in der direkten Erwärmung des Bodenschlammes durch die darüber stehende Wassermasse dringende Sonnenbestrahlung hat.

4) Bezüglich des Sauerstoffgehalts wurde eine starke Übersättigung (144,4% der absoluten Sättigung) in der Oberfläche beobachtet, welche zweifellos auf dem reichlichen Vorkommen von Zentrifugenplanktern beruht. Ein starkes Sauerstoffdefizit (0,06% der absoluten Sättigung) findet sich schon in der Tiefe von 20 m statt, welchem endlich in der Tiefe von 24 m das vollkommene Fehlen des Sauerstoffs folgt. Der See ist nach LUNDBECK eutroph und kann in die *Bathophilus Plumosus*-Type eingereiht werden, weil in unserem See  $\delta=35,6$  ist.

5) Die Wasserstoffionenkonzentration bezeichnete eine dichotomische Vertikalverteilung mit einem niedersten pH-Wert ( $=7,18$ ) in der Tiefe von 5 m, trotz des verhältnismässig reichlichen Gehalts der freien Kohlensäure im Hypolimnion, was seine Ursache vielleicht in dem höheren Puffervermögen des Seewassers in der Tiefe hat. Die Alkalinität beträgt 2,68 in der Tiefe unmittelbar auf dem Grunde, während sie in der Oberfläche 1,77 beträgt.

6) Die Konzentration der gelösten Phosphorverbindungen betrug 55 mg in der Oberfläche und 100 mg im Grunde (dualistisch als  $P_2O_5$  pro cbm); und die der gelösten Stickstoffverbindungen 1474 mg in der Oberfläche und 2014 mg im Grunde (dualistisch als  $N_2O_5$  pro cbm).

7) Die ionische Zusammensetzung des Seewassers wurde in der Oberfläche und in der Tiefe unmittelbar auf dem Grunde studiert und ist in Figuren dargestellt.

8) Biocoenotisch ist das Verhältnis in dieser Jahreszeit sehr ähnlich demjenigen im August 1932, obgleich *Peridinium* sp., *Polyarthra platyptera*, *Diurella stylata*, *Tetramastix taiwanensis* und *Ceriodaphnia rigaudi* fehlen. Es sei noch erwähnt, dass hier *Mesocyclops thermocyclopoides* in Adultstadien reichlich gefunden wurde und *M. taihokensis*, im Gegenteil, ausserordentlich gering war. Weiter ist zu bezeichnen, dass die Copepoditen von *Mesocyclops* in dieser Jahreszeit

ausgeprägt entfaltet sind, was nämlich eine starke Massenfaltung von *Mesocyclops* in nächster Zukunft bedeutet.

9) Betreffs der Vertikalverteilung von Planktonorganismen waren die Verhältnisse, im grossen und ganzen, denselben im August 1932 gleich. Nur eine etwas seichtere Lagerung der Durchschnittstiefe der Vertikalverteilung wurde bei *Brachionus pala*, *Keratella cochlearis*, *Pedalia mira* und *Diaphanosoma paucispinosum* festgestellt. Eine tiefere Lagerung wurde dagegen bei Nauplien beobachtet. Bei meisten Arten sind die Durchschnittstiefe der Vertikalverteilung innerhalb der täglichen Schwankungsgrenzen derselben im August 1932.

10) Die Vertikalverteilung von meisten Rotatorien scheint in der Stagnationsperiode mit der Vertikalverteilung von pH in innigem Zusammenhang zu stehen. Der Gehalt des Sauerstoffs und der freien Kohlensäure scheint dabei keinen direkten Einfluss auszuüben.

11) Die Plankton-Crustaceen scheinen ein ziemlich starkes O<sub>2</sub>-Defizit und den reichlichen CO<sub>2</sub>-Gehalt des Seewassers zu ertragen, also in einem verhältnismässig weiteren pH-Bereich vorzukommen. *Mesocyclops thermocyclopoides* und die Jungen der Copepoden überhaupt können selbst ein bedeutendes bis gänzlich Fehlen des Sauerstoffs aushalten.

## VII. Literaturverzeichnis.

- HARADA, I. Limnologische Studien auf dem Sango-Tan, einem tropischen See von Formosa, unter besonderer Berücksichtigung der Vertikalverteilung des Zooplanktons. Mem. Fac. Sci. & Agr. Taihoku Imp. Univ. XIV (6): 143-215 (1937'.
- HARRING, H. K. & MYERS, F. J. The Rotifer fauna of Wisconsin. IV. The Dicranophorinae. Trans. Wisc. Acad. Sci. Madison. 23: 667-808 (1927'.
- MAUCHA, R. Hydrochemische Methoden in der Limnologie (Die Binnengewässer XII) Stuttgart. (1932).
- Über die Sauerstoffschichtung der Seen. Arch. f. Hydrobiol. XXIX (4): 695-707 (1936).
- MIYADI, D. Taiwan no Kosyo to sono Seibutu. (Japanisch). Jap. Journ. Limnol. 5 (3): 71-86 (1935).
- General features of some Formosan Lakes in Winter. (Japanisch) Jap. Journ. Limnol. 7 (2): 55-63 (1937'.
- UENO, M. Preliminary Report on the Second Limnological Expedition to Formosa. Jap. Journ. Limnol. 6 (1): 33-47 (1936).
- YOSHIMURA, S. On the dichotomous Stratification of Hydrogen Ion Concentration of some Japanese Lake Waters. Jap. Journ. Geol. & Geogr. XI (3/4): 155-185 (1932).



臺北帝國大學理農學部紀要

第十五卷 第一號

昭和拾年四月

---

MEMOIRS  
OF THE  
FACULTY OF SCIENCE  
AND  
AGRICULTURE

TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

VOL. XV, No. 1-14

April, 1935

Katsuyoshi SHIRATORI:  
Ionic Spectrum of Air

PUBLISHED  
BY THE  
TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY  
FORMOSA, JAPAN

## **PUBLICATION COMMITTEE**

Professor **Bunichirô AOKI**, Dean of the Faculty (*ex officio*)

Professor **Ichirô HAYASAKA**

Professor **Takashi MATSUMOTO**

Professor **Kichimatsu MATSUNO**

Professor **Tokuichi SHIRAKI**

Professor **Tyôzaburô TANAKA**

The MEMOIRS OF THE FACULTY OF SCIENCE AND AGRICULTURE, Taihoku Imperial University, are published occasionally by the University, which exchanges them with the publications of other learned bodies and institutions throughout the world. Separate series will be sent to individual research institutions, and complete series to the central libraries of universities and larger institutions. Copies of the Memoirs may also be obtained from MARUZEN COMPANY LTD., Tôkyô, Japan, and THE TAIWAN NICHİ-NICHİ SHIMPÔ-SHA, Taihoku, Formosa, Japan.

All communications regarding the Memoirs should be addressed to the Dean of the Faculty of Science and Agriculture, Taihoku Imperial University, Taihoku, Formosa, Japan.

臺北帝國大學理農學部紀要

第十五卷

昭和十年—昭和十一年

MEMOIRS  
OF THE  
FACULTY OF SCIENCE  
AND  
AGRICULTURE  
TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

---

Volume XV.

---

1935-1936

TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY  
FORMOSA, JAPAN



# CONTENTS

---

*Page.*

MATSUMURA, Sôji:—Über Flächen und Kurven (VIII): Über Mittel- punktfläche. ... ..	39
MATSUMURA, Sôji:—Über Flächen und Kurven (IX): Eilinen und Eiflächen. ... ..	57
MATSUMURA, Sôji:—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (X)... ..	71
MATSUMURA, Sôji:—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XI). ... ..	87
MATSUMURA, Sôji:—Über Flächen und Kurven (IX)... ..	113
MATSUMURA, Sôji:—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XII). ... ..	131
MATSUMURA, Sôji:—Über Flächen und Kurven (X): Über Parameter der ebenen Kurven... ..	151
MATSUMURA, Sôji:—Über Flächen und Kurven (XI): Zur relativen und natürlichen Geometrie. ... ..	181
MATSUMURA, Sôji:—Über Flächen und Kurven (XII). ... ..	193
MATSUMURA, Sôji:—Über Flächen und Kurven (XIII). ... ..	205
MATSUMURA, Sôji:—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XIII). ... ..	221
MATSUMURA, Sôji:—Über Flächen und Kurven (XIV). ... ..	245
MATSUMURA, Sôji:—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XIV). ... ..	257
MATSUMURA, Sôji:—On a Pair of Surfaces Mutually Related. I. ... ..	265
MATSUMURA, Sôji:—Über Flächen und Kurven (XV)... ..	283
MATSUMURA, Sôji:—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XV). ... ..	295
MATSUMURA, Sôji:—On a Pair of Surfaces Mutually Related. II... ..	307
OTA, Yoritsune:—Studies on the Hydrogen Isotope $H^2$ by the Electro- lysis of Water. Part II. The Production of Heavy Water and its Apparatus. ... ..	165
OTA, Yoritsune:—On the Emission Band Spectrum of the O D Molecule. ... ..	181
SHIRATORI, Katsuyoshi:—Ionic Spectrum of Air. ... ..	1





# IONIC SPECTRUM OF AIR

(With 3 Text Figures)

Katsuyoshi SHIRATORI

(Accepted for publication, September 10, 1934)

## 1. Introduction

In the atmosphere the primary electric carriers produced directly by many sources of ionizations, such as principally radioactive radiation, penetrating radiations and other subordinate actions,<sup>\*)</sup> become small ions under a certain stable condition of a size about  $3 \times 10^{-8}$  cm radius; their mobility is confined to the region from about 1 to several centimeters per second per volt per centimeter. The accretion of small ions on the uncharged nuclei of different kinds and sizes in the lower atmosphere produces intermediate ions, Langevin ions and also large ions. Intermediate ions have been found in SYDNEY by POLLOCK<sup>1)</sup> and asserted by K. KÄHLER<sup>2)</sup> and ISRAEL<sup>3)</sup> even though they are thought to be variable by locality and by meteorological conditions. These secondary ions have the mobility over the region from about 0.1 to a value less than  $10^{-4}$  cm<sup>2</sup>/volt. sec.

The numerical distribution of ions along the mobility spectrum is not uniform and from the study of aerosol by A. SCHMAUES and WIGAND it may lead us to probably expect a continuous spectrum of ions in lower air, which is in fact for certain regions of mobilities clearly preferred. KÄHLER<sup>2)</sup> has discussed the regular increases for gross of carriers in atmosphere. Whether ionic spectrum is continuous or discontinuous is not yet determined decisively; but as a matter of fact the assumption that the region from intermediate ions to large ions is continuous can fit the true condition fairly well with a certain degree of probability and the continuity of the region from small ions to the intermediate ions is uncertain at present even though sometimes a gap may be supposed to exist between in this region.

The studies of large ions along the mobility-distribution which are recently tried by NOLAN,<sup>5)</sup> ISRAEL,<sup>6)</sup> BOOJI<sup>7)</sup> and STORM,<sup>8)</sup> are in a certain

---

<sup>\*)</sup> Lenard effect, ultraviolet light and photo electric effect.

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agr. Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. XV  
No. 1, April, 1935.]

sense the key to the large part of the atmospheric-electric causal relationships, and the spectral composition of the ionic air may be of essential importance in considering ionic equilibrium of the lower atmosphere which has not yet been fully explained. The ions in the atmosphere seem to be always variable and the variation of the distributions of ions over the mobility spectrum as well as their variability depending on meteorological conditions are the object of the present work.

## 2. Method of Analysis

The well known principle for the determination of the mobility-spectrum of ions is the flow-method. Air containing ions flows through a cylindrical condenser which maintains a definite potential difference between the two electrode-elements and the ionic current caught by the condenser is determined. Under the given apparatus and the given experimental conditions, a certain definite limiting mobility ( $kg$ ) is associated with each value of the ratio between the rate ( $\Phi$ ) of air-flow and the applied potential ( $v$ ), as given by the equation

$$kg = \Phi / 4\pi cv$$

where "c" is the condenser capacity.

The limiting mobility is so defined that in the apparatus all ions of the mobility ( $k$ ) greater than or equal to " $kg$ " will be caught by the condenser and for other ions only the percentage ratio ( $k/kg$ ) of them will be caught by it. Thus the characteristic relation of the ionic current and " $kg$ " must be determined, from which the distribution of the mobility-spectrum of ions can be given. If  $\Phi$  is kept as a constant, then the " $kg$ " depends on the potential ( $v$ ) only, so that ISRAEL<sup>9)</sup> has shown the current-potential characteristic which gives a picture of the ion-distribution among each mobility. The disturbance of the electric field at the inlet of the condenser disturbs some parts of ions when about to enter into the condenser and accordingly the " $kg$ " may be changed into a slightly different one as described by ITIHARA<sup>10)</sup> and SCHOLTZ<sup>11)</sup> and treated fully by ISRAEL.<sup>12)</sup> This end effect is due to the inhomogeneity of the field at the entrance for the ionic measurement which acts as an additional field in the case of the discharging method and as an opposing field in the case of the charging method, and may be avoided by using the front condenser which is always earthed. The flow of air must be laminar. In our case this was tested by smoke in glass-models of similar sizes with the condensers, and the air-flow was kept within this limit.

The ionic current ( $I$ ) produced in the condenser under a given experi-

mental condition is consisted from the two parts according to "kg"—one part is by all of ions of the mobility greater than or equal to "kg", and the other part is by the fraction ( $K/kg$ ) of the ions of the mobility less than it.

If the number of ions caught by the condenser is  $Z$  per unit volume of air, then

$$Z = f / \Phi \varepsilon$$

where  $\varepsilon$  is the elementary charge of ion, known as  $4.77 \times 10^{-10}$  Cgs.

The numerical value ( $dn$ ) of ions due to the region of mobility between " $k$ " and " $k + dk$ " may be expressed by the equation

$$dn = f(k) dk$$

Then the following relation may be written.

$$Z = \int_{k_0}^{\infty} f(k) dk + \frac{1}{k_0 g} \int_0^{k_0} k f(k) dk$$

$$\text{put } kg = \left( \frac{1}{4\pi C} \cdot \frac{\Phi}{V} \right) = C \frac{1}{V}$$

where  $C$  is constant and the " $V$ " may be said the equivalent voltage, as the  $k_0 g$  can be varied by changes of either  $v$  or  $\Phi$ ; then

$$dk_0 = -\frac{C}{V^2} dV = -\frac{k_0^2}{C} dV$$

Differentiate  $Z$  with  $k_0 g$ .

$$\frac{dZ}{dk_0} = -\frac{1}{k_0^2} \int_0^{k_0} k f(k) dk$$

and

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dV} &= \frac{C}{k_0^2 V^2} \int_0^{k_0} k f(k) dk \\ &= \frac{1}{C} \int_0^{k_0} k f(k) dk \end{aligned}$$

then,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z}{dV^2} &= \frac{d}{dk_0} \left( \frac{dZ}{dV} \right) \cdot \frac{dk_0}{dV} \\ &= -\frac{C}{V^3} f(k_0) \end{aligned}$$

or

$$f(k_0) = -\frac{V^3}{C} \frac{d^2 Z}{dV^2}$$

\*) Along Bendorf (Phys. ZS. 25. 60. 1924) here the designations of electro. s.u. and electro m.u. as Cgs, and Cem.

Therefore

$$f(k)dk = dn = V \frac{d^2 Z}{dV^2} dV$$

This is the fundamental principle of the ion-spectrum. Suppose two limiting mobilities  $k_g$  and  $K_g$ , and let  $k_g > K_g$  then the numbers of ions ( $N$ ) between these two mobilities  $k_g$  and  $K_g$  may be

$$\begin{aligned} N &= \int_{K_g}^{k_g} f(k)dk = \int_{K_g}^{\infty} f(k)dk - \int_{k_g}^{\infty} f(k)dk \\ &= \left( Z_{K_g} - \frac{1}{K_g} \int_0^{K_g} k f(k)dk \right) - \left( Z_{k_g} - \frac{1}{k_g} \int_0^{k_g} k f(k)dk \right) \\ &= \left( Z_{K_g} - V_g \left( \frac{dZ}{dV} \right)_g \right) - \left( Z_{k_g} - V_g \left( \frac{dZ}{dV} \right)_g \right) \\ &= \left( Z_{K_g} + K_g \left( \frac{dZ}{dk} \right)_g \right) - \left( Z_{k_g} + k_g \left( \frac{dZ}{dk} \right)_g \right) \end{aligned}$$

put  $k \frac{dZ}{dk} = Z'$ , and then as  $\frac{dZ}{dk}$  is negative  $Z'$  may be negative.

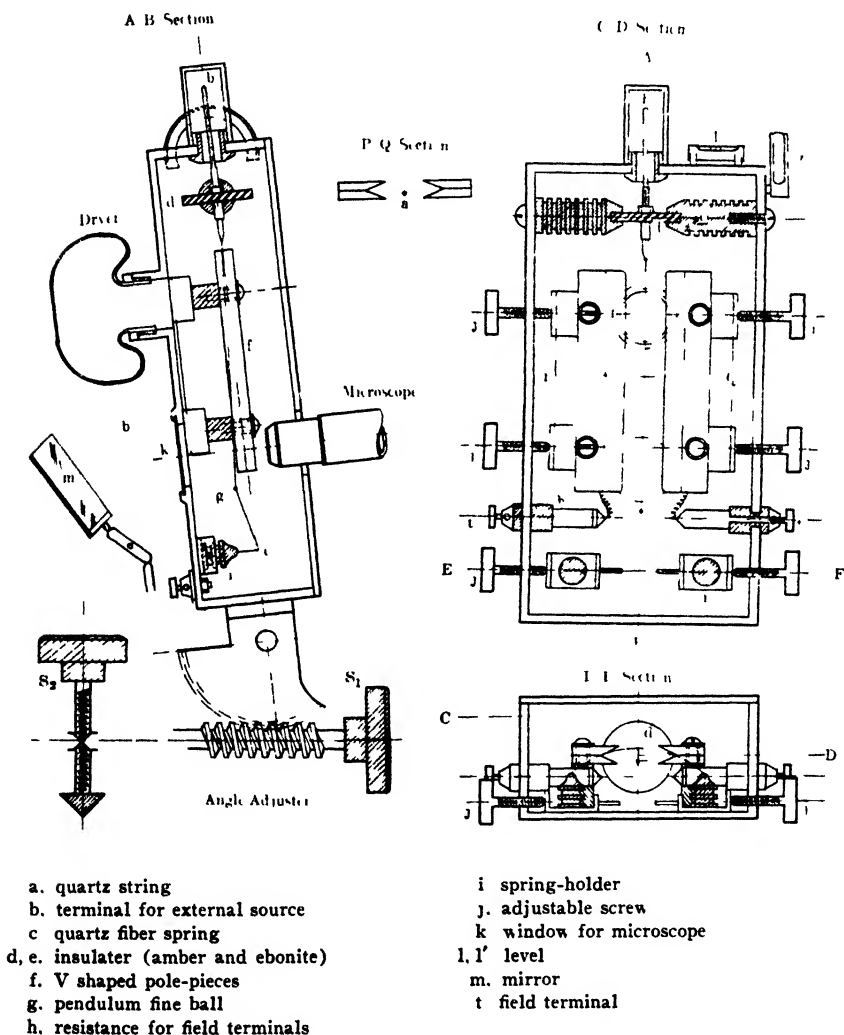
$$\therefore N = \left| (Z + Z') \right|_{k_g}^{K_g}$$

This is the expression of the numerical value of ions which belongs to the ion-group of the mobility between  $k_g$  and  $K_g$ . Such group should be selected from the point at which the gradient  $(dZ/dk)$  takes a rapid change.

### 3. Apparatus and Measurements

The variation of the numerical distribution of ionic groups due to the meteorological conditions as well as the change of the total number of ions depending on time-interval are very important questions in the measurement of the ionic spectrum. The greatest difficulty in connection with the measurement of the true distribution of ions over the mobility-spectrum is to get the result free from the influence of changes of ionic and meteorological conditions during the measurement. Therefore, assuming the constancy of the relative composition of ion-groups ISRAEL who devised the double condenser method, showed percentage distributions over the individual mobility divided by the so-called controlling value. But in our measurements we modified the ordinary Zeleny-flow-method and special attentions were paid on a quick measurement as possible by constructing a new sensitive stable electrometer which was set on the anti-vibration-stand, and using two cylindrical condensers for the different ranges of the mobility at the same time. The construction of this electrometer is

shown in figure 1. The two pole-plates which faced each other at the side of V-shaped surface and insulated by combinations of amber and ebonite, can be adjusted by the four adjustable screws. The two quartz-fine-fibers of about 0.002 mm. diameter are jointed together by the very small ball of sealing-wax which makes a horizontal pendulum. One of these fibers suspended in the pole-space by the insulation of ebonite and amber, is silbered and can be connected from an external source to be measured, but the other fiber is used as an insulator itself and lets the ball



move along the circular orbit, around the axis of the pendulum between the pole plates.

This action of the pendulum-type of the string and the special form of the pole-plate can avoid the contact of the string with the pole-pieces, so that the stability of the electrometer is easily controlled. By the screws  $S_1$  and  $S_2$  the tilt of the electrometer can be adjusted until the silvered fiber becomes parallel with the gravity-field at zero position and thus the pendulum-ball suspends freely in the gravitational field. The sensibility can be varied according to the alteration of the tilt and the pole-potential. The capacity is about 3.2 cm and by using the micrometer of the magnitude 26, we are able to get a sensibility about 1200 divisions per volt in the case of the pole-potential of 200 volt.

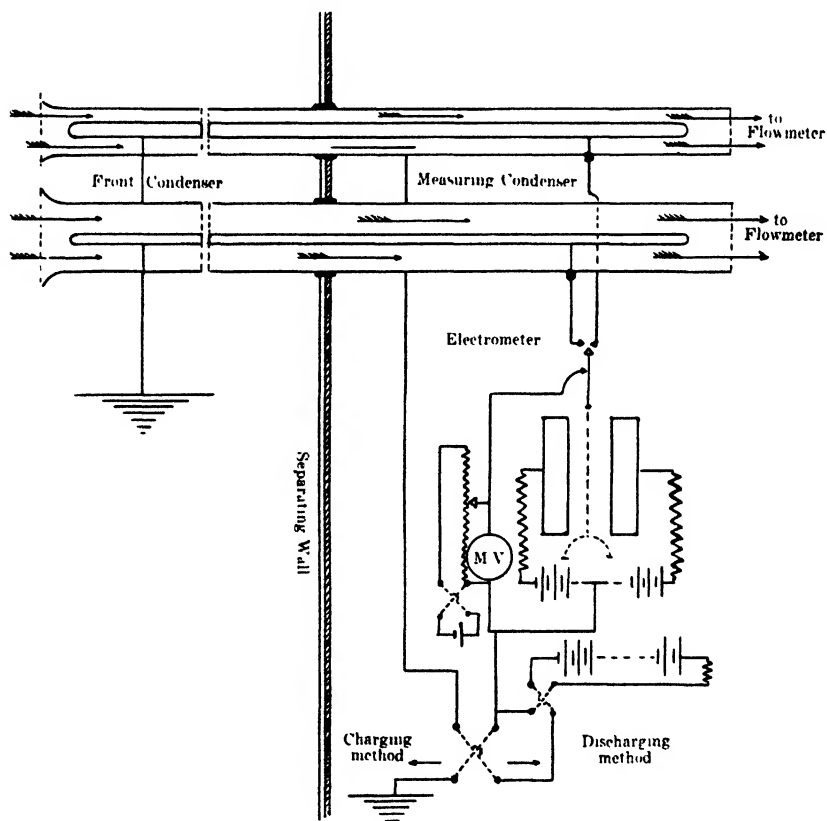
In our experiment the sensibility is kept from 300 divisions to 500 divisions per volt and in this range the indication is nearly linear within the micrometer scale. This electrometer is so well insulated from its stand by ebonite that it can be used for both the charging method and also the discharging method, though in the latter case the electrometer must be inserted at "v" potential from earth. During measurements the meter was set on the anti-vibration-stand for the purpose of making it free from instability due to mechanical shocks.

The forms of the both cylindrical condensers are similar, but different in sizes. Special attention is given to the insulation of the condenser as it is very difficult to keep good insulation in moist air of the tropical zone. The insulation of the inner electrode consists of amber with ebonite and dried by metallic sodium. The condenser is made of brass. The front condenser which has the same radius with the measuring condenser and 12 cm in length is always connected to earth in order to avoid the effect of the disturbance of the entrance-field. The dimensions of the measuring condensers are, that one condenser is constructed with a inner cylinder of 1.35 cm in diameter, 150 cm in length and an outer cylinder of 2.50 cm in diameter, whose capacity is determined as 117 cm by the measurement, and also the other condenser is constructed with a inner cylinder of 0.65 cm in diameter, 86 cm in length, and an outer cylinder of 5.00 cm in diameter and the capacity is 21.0 cm.

The larger elements is used for the range of mobility over 0.05 cm/sec. volt/cm, and the smaller one for the range of mobility less than 0.5 cm<sup>2</sup>/volt. sec. During the measurement the aspiration velocity is always carefully kept within the limit of laminar flow in order to avoid the influence of the turbulence.

The experiment has been carried out in the small cottage which is the same as in the case of the conductivity-observation.<sup>18)</sup> The inside is wholly covered with the earthed tin-plates except the window. One part of the room is separated independently from the other part by a metallic wall, where the electrometers, flow-meters, aspirating-fun and all other equipments of the measuring apparatus are set in and the observer is able to treat all the apparatus only in this separated part of the cottage, and therefore, any possible fault due to the presence of the observer and the electrical sources used for the measurement may not be considered at all. The condensers are set in the center of the room and through the separated wall they are connected to the electrometers. Fig. II is the outline of the arrangement of the experiment.

Before experimenting the room-air is made fresh and then during the measurement the window is kept very slightly opened, and the aspirated air is exhausted outside the room.





Both condensers are used at the same time and their readings are simultaneously operated in order to get measurements for the wide-range of mobility as quickly as possible and also to avoid the influence due to the change of the air-nature during the time of the experiment by measuring as quick as possible.

Some of the results are taken by the discharging method, and some of them by the charging method, but both methods show always similar results. Before and after each measurement we test the residual effect or apparent charging when there is no air-flow or no applied potential of the condenser-field, this effect is very small in our case and much smaller in the case of discharging method than in that of the charging method. Each set of the spectrum is finished within an interval of or about 15 to 20 minutes.

#### 4. Ionic spectrum

The measurements of the distribution of the mobility-spectrum have been done for the range from 2 to far as  $0.0001$  cm per sec. volt per cm, covering over the wide parts from small ions to large ions.

Table A at the end of this paper gives the twenty-six spectrums of the experimental results which were obtained in various weathers during December(1933) and January(1934). The meteorological conditions in the table are the mean values in the interval just before and after each measurements.

As clearly seen from these materials, the distribution of ions along the mobility-spectrum showed large variations each other,—really one may vary from others by weather conditions or the distribution may differ by the time observed ISRAEL and SCHULTZ<sup>14)</sup> tried to find the characteristic difference of the distributions for his four regions of the spectrum from locality to locality. It is proposed by ISRAEL that the total ions are divided arbitrarily into four regions such as

Ultra-large ions (mobility  $k \leq 2.5 \times 10^{-4}$  cm/sec. volt/cm)

Langevin ions (mobility  $2.5$  to  $10 \times 10^{-4}$  cm/sec. volt/cm)

Large intermediate ions (mobility  $10$  to  $100 \times 10^{-4}$  cm/sec. volt/cm)

Small intermediate ions (mobility  $k \geq 100 \times 10^{-4}$  cm/sec. volt/cm)

But BOOJ<sup>15)</sup> or his co-worker<sup>16)</sup> also used some little differences in limits of these regions for the results at Insbruck and Leiden (Holland).

Now selecting arbitrarily " $k_g$ " and " $K_g$ " in the equation of " $N$ ", the total spectrum are divided into eleven regions belonging to four groups, which are given as follows:—

Group	Region	Limits of Mobility $kg$ & $Kg$
Small ions	a	$>2.0000 \times 10^{-4}$
	b	1.5000
	c	1.0000
	d	5000
Intermediate ions	e	1000
	f	500
	g	100
	h	50
Langevin ions	i	10
	j	5
Ultra-large ions	k	1

Now, if we assume the existence of the normal distribution of the ionic spectrum for the winter condition of this locality, then such a normal spectrum might be able to be represented by the mean spectrum-distributions of all individual observations in just the same way as in the climatology for finding the normal value of the meteorological elements; and the variance of each of the regions in the normal spectrum may be deemed to be a measure of the stability of the region for various conditions of weather in the season.

By such a method, the following table gives the normal distribution of the ionic spectra for the winter type.

Normal ion-spectra (winter type)

Group	Normal Distribution		Variance (%)		Regions	Normal Distribution		Variance (%)	
	Pos.	Neg.	Pos.	Neg.		Pos.	Neg.	Pos.	Neg.
Small ions	213	204	42	39	a	76	91	79	59
					b	36	27	73	89
					c	42	36	79	83
					d	60	50	62	83
Intermediate ions	621	717	51	50	e	147	159	58	66
					f	95	91	94	65
					g	227	237	82	65
					h	179	239	103	103
Langevin ions	4049	4645	81	100	i	1326	1039	94	106
					j	2696	3633	99	113
Large ions	10740	11010	64	65	k	10740	11010	64	65

Temperature	17.5	23
Pressure	765.6	5
Humidity	82	14
Wind vel.	3.2	74
Cloudiness	9	31

The numerical value of the column of Variance in the table is the percentage standard deviation of the ionic number of the normal spectrum. From the table we may briefly see the fact that in winter the ionic distribution of each region in the mobility can not be found so great a difference between the positive ion-spectrum and the negative ion-spectrum; and that the small-ion-group the positive slightly exceeds the negative, though in the other groups the negative is rather in excess than the positive. The numerical values of each ionic distribution are about 210 for the small-ion-group, about 670 for the intermediate, about 4300 for Langevin-ion-group and about 11000 for the large-ion-group, so that each of them correspond roughly to  $1\frac{1}{2}$ , 4,  $26\frac{1}{2}$  and 68 respectively in percentages of the whole ionic content from small ions to large ions. The deviational variances give significant differences for each region. In comparison with this result, it is noted that in the a-region the negative may be said to be much more stable, as the positive variance is much larger than the negative, but in the regions "b", "c" and "d" the positive variances are far less than the negative, therefore in these regions the negative ions are more unstable than the positive; that the e-region is comparatively steady, showing a small variance and for the regions "f" and "g" the positive variance is much less than the negative; that the variance is maximum for both positive and negative in the regions "h", "i" and "j", hence the ions of these regions are most unstable; and that the k-region has nearly the same variance for both positive and negative which is comparatively small.

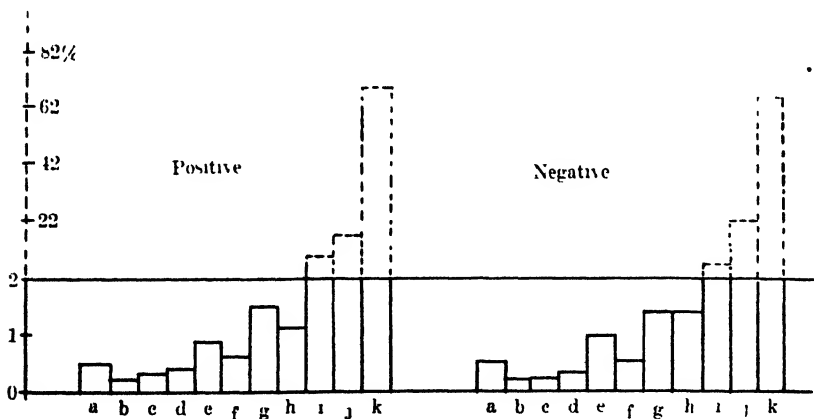
Even though each region shows such a rather large variance as above, if we will only consider the whole of each group covering each region, then the deviational variance is reduced to a far smaller value as seen in table. The smallest variance is for the group of small-ions and the largest is for the group of Langevin-ions; in respect to this result it may be regarded that the small-ion-group is comparatively steady and the group of Langevin-ions are most fluctuable in both positive and negative ion-spectrum; but it must be noticed that, especially in the Langevin-ion-group the negative variance is far larger than the positive.

For the percentage distribution of the normal ion-spectrum see the following table.

Percentage Construction of the Normal Spectrum (winter)

Region	Percentage Distribution		Group	Percentage Distribution	
	Pos.	Neg.		Pos.	Neg.
a	0.5	0.5	Small ion	1.4	1.2
b	0.2	0.2			
c	0.3	0.2			
d	0.4	0.3			
e	0.9	1.0	Intermediate-ion	4.1	4.3
f	0.6	0.5			
g	1.5	1.4			
h	1.1	1.4			
i	8.5	6.3	Langevin-ion	25.7	28.3
j	17.2	22.0			
k	68.8	66.2	Large ion	68.8	66.2

The Fig. 3 is the graphical representations of these percentage constructions of the normal spectrum.



From the table A we may pick up some of characteristic spectrums which correspond to the conditions of the weather as described below.

The spectrum no. 2 was a typical one of the fine warm dry day type as in summer time when the weather conditions were temperature 22.4°C,

humidity 58%, wind velocity 4.5 E, and cloudiness 2 K. In this case the regions "e", "f", "g"), were very small and the negative increased from the h-region and the positive increased from the i-region; and as a characteristic feature the negative is far larger than the positive for the a-region though the positive exceeds the negative for the other regions in the small-ion-group—this excess of negative ions of the a-region may agree with the typical conductivity of summer<sup>17)</sup> type.

The whole ionic number is 2580 for the positive and 2530 for the negative, so that these contents are comparatively very poor. For the percentage distributions of groups, the small-ion-group is relatively predominated, and especially in the positive it exceeds far the intermediate-ion-group as seen in the following result.

Percentage distribution (fine, warm dry day)

Whole ionic contents ( $Z_+ = 2580$   
 $Z_- = 2530$ )

Region	Pos.	Neg.	Group	Pos.	Neg.
a	1.6	4.3	Small ion	7.1	6.4
b	2.3	0.0			
c	0.9	0.4			
d	2.3	1.7			
e	0.9	0.6	Intermediate-ion	3.7	8.3
f	1.0	0.1			
g	0.3	0.3			
h	1.0	7.3			
i	21.9	4.6	Langevin ion	24.2	33.3
j	2.3	28.4			
k	65.0	52.0	Large ion	65.0	52.0

The no. 22 is the ionic spectrum such as in the case of a NE monsoon windy evening when it becomes fine after a few cloudy days of monsoonic weather. The temperature is low, humidity is considerable high and wind is about 7 m/sec. As the distributions of ions in percent shows here as below, the positive predominate in these regions "e", "f" and "g" and inversely the negative exceeds significantly in the k-region. For the positive there are two gaps at the regions "h" and "d", but for the negative one of them at the "h" is vanished.

Percentage Distribution (NE monsoon windy fine day)

Whole ionic contents ( $Z_+ = 10600$   
 $Z_- = 9800$ )

Region	Pos.	Neg.	Group	Pos.	Neg.
a	0.8	0.9	Small ion	1.4	1.8
b	0.1	0.4			
c	0.3	0.2			
d	0.2	0.3			
e	1.3	0.6	Intermediate-ion	4.7	4.9
f	1.0	0.5			
g	1.9	2.8			
h	0.5	1.0			
i	9.0	6.1	Langevin ion	51.0	13.2
j	42.0	7.1			
k	42.0	80.7	Large ion	42.0	80.7

The group of intermediate-ions predominated much more than the small-ion-groups and for the positive Langevin ions exceed Large ions.

The spectrum no. 20 is the case of that of a slight foggy day in which weather temperature is very low, and humidity very high.

The distribution is as follows:—

Percentage Distribution (cold wet foggy day)

Whole ionic contents ( $Z_- = 16700$   
 $Z_+ = 17730$ )

Region	Pos.	Neg.	Group	Pos.	Neg.
a	0.2	0.6	Small ion	1.3	0.7
b	0.4	0.0			
c	0.3	0.1			
d	0.4	0.0			
e	0.9	0.5	Intermediate-ion	5.3	5.1
f	0.1	1.1			
g	4.3	2.1			
h	0.0	1.4			
i	3.0	2.0	Langevin-ion	3.0	70.2
j	0.0	68.2			
k	90.4	24.0	Large ion	90.4	24.0

As above seen, for the positive the regions "h" and "j" are vanished and the region "k" is distinctly predominated; but for the negative there are no such gaps like the positive between the regions from "d" to "k", and most significant is the region "j" in the Langevin-ion-group. These characteristic may be due to the effect of foggy weather.

The spectrum no. 26 is the case of that of a rainy day. It was a moderate rain-fall and the rain-drops were comparatively rather larger as a winter rain, which was caused by cold air mixing with a tropical hot air mass, but a few hours after the measurement it became fine. The temperature was very low. The whole ionic content was very large as like  $Z \pm 20000$ , and the percentage distribution was as follows.

Percentage Distribution (rainy day)  
Whole ionic contents ( $Z_+ = 20000$ )  
( $Z_- = 20000$ )

Region	Pos.	Neg.	Group	Pos.	Neg.
a	0.5	0.7	Small ion	1.5	1.0
b	0.1	0.1			
c	0.4	0.1			
d	0.5	0.1			
e	1.2	2.2	Intermediate-ion	5.8	5.4
f	0.6	0.6			
g	2.5	1.2			
h	1.5	1.4			
i	5.7	4.4	Langevin-ion	22.7	15.2
j	17.0	10.8			
k	70.0	78.4	Large ion	70.0	78.4

For the positive the b-region was so small as to make a gap and the distribution became larger toward the large-ion-group.

The spectrum no. 9 was just taken at end of the moderate rainy weather, and two and a half hours after this we got another spectrum no. 10. The weather condition of no. 9 was calm, high humidity (98%) and low temperature; but for no. 10 it became dry (humidity 63%) hot (temperature 24.1°C and wind velocity 3.0 m/sec.) and the air was very clean for good sightness.

Regarding these results they are very interesting because the whole ion number was doubly increased in the latter, especially there was much

increase in the negative, just as the positive exceeded the negative in the former and inversed in the latter.

Percentage Distribution

Whole ionic content	No. 9		No. 10	
	+	-	+	-
	16000	13250	298000	32400
Region a	0.4	0.1	0.9	0.4
b	0.1	0.1	0.0	0.3
c	0.1	0.1	0.0	0.3
d	0.1	0.1	0.1	0.1
Small-ion-group	(0.7)	(0.4)	(1.0)	(1.1)
e	0.2	0.8	0.4	0.9
f	0.4	0.3	0.3	0.0
g	0.9	1.6	1.1	1.2
h	0.9	2.9	0.7	1.2
Intermediate-ion-group	(2.4)	(5.6)	(2.5)	(3.3)
i	13.1	15.3	13.6	10.2
j	12.0	6.5	3.7	4.9
Langevin-ion-group	(25.1)	(21.8)	(17.3)	(15.1)
k	72.0	72.0	79.2	80.6

As these percentage distributions over each region are shown in the above table, we can note that in the former spectrum the regions "a", "b", "c", "d" were rather very small though in the latter the "d" was still smaller and that in 2½ hours after rain as a relative value a comparatively large increasing occurred in the region "a", "e" of the positive and in the region "a", "b", "c" of the negative and a significant decreasing was in the region "j" of the positive and the region "h", "j" of the negative; therefore when the weather became fine after rain the small-ion-group increased and the Langevin-ion-group decreased for the both signs.

The spectrum no. 12 was taken in the monsoonic drizzle weather of a considerable strong NNE wind. The whole ionic content was very large like  $Z_+ 29700$  and  $Z_- 35700$ , especially large in the negative; the distribution being as follows.

There were two gaps at "b" and "h" for the positive and one gap at "b" for the negative. The small-ion-group for the negative was relatively small in spite of that in the region "a" the negative was larger than the positive.

The spectrums no. 14 to no. 19 were the observational results at



## Percentage Distribution (NNE windy monsoonic drizzle)

Whole ionic contents ( $Z_+ = 29700$   
 $Z_- = 35700$ )

Region	Pos.	Neg.	Group	Pos.	Neg.
a	0.3	0.4	Small ion	1.0	0.5
b	0.1	0.0			
c	0.2	0.0			
d	0.4	0.1			
e	0.6	0.4	Intermediate-ion	2.7	1.9
f	0.6	0.3			
g	1.3	0.6			
h	0.2	0.6			
i	10.8	7.3	Langevin-ion	34.7	30.3
i	23.9	23.0			
k	61.6	67.3	Large ion	61.6	67.3

midnight and in the early morning of monsoonic drizzly weather, and thus we may be able to treat as one example of the change of the mobility spectrum during the night from the next table of the percentage distribution.

## Percentage Distribution (monsoon night)

	Time (Jan. 1-2)	h m	h	h	h	h m	h m
		23 40	2	4	6	7 20	8 30
Pos.	Whole ion contents	15300	13400	10600	8200	8600	6500
	Region a	0.3	1.3	1.9	1.5	0.4	2.1
	b	0.7	0.3	0.0	0.1	0.6	0.4
	c	0.8	0.3	0.1	0.3	0.3	0.2
	d	0.7	0.6	0.2	0.5	0.6	0.8
	(Small ion group)	(2.5)	(2.5)	(2.2)	(2.4)	(1.9)	(3.5)
	e	0.4	1.0	1.0	0.9	1.5	1.5
	f	1.1	0.4	0.8	0.7	0.7	0.5
	g	0.5	0.3	1.8	2.4	2.1	3.5
	h	0.2	0.4	6.1	0.6	0.9	3.5
	(Intermediate ion) group	(2.2)	(2.1)	(9.7)	(4.6)	(2.2)	(9.0)
	i	11.0	11.2	0.7	2.8	2.2	1.2
	j	1.3	15.7	6.1	14.2	10.4	18.3
	(Langevin ion group)	(12.3)	(26.9)	(6.8)	(17.0)	(12.6)	(19.5)
	k	83.0	68.5	81.3	75.0	80.3	67.0

Time (Jan. 1-2)		h m 23 40	h 2	h 4	h 6	h m 7 20	h m 8 30
	Whole contents	15200	15400	12000	9800	14100	7300
	Region a	1.7	1.2	1.0	0.9	0.6	1.2
	b	0.0	0.3	0.2	0.2	0.2	0.1
	c	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.4
	d	0.1	0.5	0.2	0.7	0.4	0.3
	(Small ion group)	(1.9)	(2.2)	(1.6)	(2.0)	(1.3)	(2.0)
	e	2.2	0.7	1.3	1.6	1.1	1.1
Neg.	f	0.4	0.8	0.8	0.9	0.7	1.1
	g	1.7	2.1	1.7	1.1	1.0	1.7
	h	1.6	0.6	0.6	1.0	1.5	0.7
	(Intermediate ion) group	(5.9)	(4.2)	(4.4)	(4.6)	(4.3)	(4.6)
	i	0.7	6.5	3.1	0.6	1.7	0.3
	j	14.5	12.3	6.7	6.1	1.7	13.6
	(Langevin ion group)	(15.2)	(18.8)	(9.8)	(6.7)	(3.4)	(13.9)
	k	77.0	74.7	84.2	86.7	91.0	79.5

These experimental observations were done during the monsoonic cloudy weather almost always with drizzle rain when temperature, pressure and cloudiness did not vary so much and from early morning it became rather windy, having shown decreases of humidity; therefore the weather conditions except wind velocity and humidity might be seemed remain nearly unchanged. And still a considerable regular variation of the distribution of the ionic mobility-spectrum during midnight and morning can be found as seen from the above table.

### 5. Ionic groups and meteorological conditions

Supposing these 26 results in the table A be perfectly random ionic-spectrums, the relationship between each group can be examined by statistical correlations as shown in the table below.

From these findings we may see that the distributions of both signes in the same group correlate very high positively, whose coefficients being all over 60 percent, thereby the positive and the negative can be seemed to vary almost in parrallel; that the correlations between different groups are comparatively not much large, as among of them the coefficients greater than 50 percents are only for the relations of those large-ion-groups with the negative intermediate-ion-group and the Langevin-ion-groups with the opposite sign of the large-ion-groups, and almost of the coefficients between different groups are positive except few of those like the positive Langevin-ion with small-ion-group, the negative Langevin-ion-group with

Correlation coefficient between  
each groups (no. of individuals=26)

		Small-ion-group		Intermediate-ion-group		Langevin-ion-group		Large-ion-group	
		Pos.	Neg.	Pos.	Neg.	Pos.	Neg.	Pos.	Neg.
Small-ion-group	Pos.	100	64	2	-14	-0	5	22	19
	Neg.	64	100	1	4	-4	-12	13	14
Intermediate-ion-group	Pos.	2	1	100	66	38	30	25	32
	Neg.	-14	4	66	100	35	28	51	53
Langevin-ion-group	Pos.	-0	-4	38	35	100	67	43	54
	Neg.	5	-12	30	28	67	100	50	10
Large-ion-group	Pos.	22	13	25	51	43	50	100	75
	Neg.	19	14	32	53	54	10	75	100

the negative small-ion and the negative intermediate-ion-group with the positive small-ion which are negative; and that the large-ion-group correlate positively with all other groups, therefore in general all groups tend to become rich when the large-ions are plenty. Important is the fact that it is only the small-ion-groups that are in a weak irregular relation with other groups when compared with the correlational closeness of each ionic group.

The correlations between each group and meteorological elements are as follows:—

Correlation coefficients between ion-group and meteorological  
conditions (in%) (no. of individuals=26)

		Temp.	Wind vel.	Humid.	Press	Cloud.
Small-ion-group	Pos.	-43	34	23	40	33
	Neg.	-28	24	-0	32	6
Intermediate ion-group	Pos.	-8	-14	8	2	24
	Neg.	22	-29	-4	-25	23
Langevin-ion-grup	Pos.	12	3	11	-32	-1
	Neg.	5	3	6	-17	18
Large-ion-group	Pos.	1	-14	6	-22	33
	Neg.	4	-22	-3	-21	12
Temperature		100	-45	-82	-88	-39
Wind velocity		-45	100	40	43	-19
Humidity		-82	40	100	68	66
Pressure		-88	43	68	100	39
Cloudiness		-39	-19	66	39	100

Regarding the meteorological elements during these experiments, the temperature correlates negatively with other elements—especially high negative relation with humidity and pressure, and wind velocity takes a weak negative coefficient with cloudiness, but all other coefficients between elements are positive.

Temperature takes considerable strong negative coefficients with the small-ion-groups and also a very weak negative one with the positive intermediate-ion-group, but positive coefficients with other ionic groups. Wind velocity is in positive relation with the small-ion-group and also with Langevin-ion-group though very weak within the limit of probable error, and in negative relation with intermediate-ion-group and large-ion-group. Relative humidity gives negative coefficients with the negative ionic groups except the Langevin-ion-group even though all these coefficients are very small within the limit of probable errors, but relatively much larger positive coefficients with each positive ionic group than the negative coefficient with the negative group. The coefficients of pressure are strong positive for small-ion-group and negative for the other three ionic groups with exception of the positive intermediate-ion-group for which it is slightly positive. Cloudiness seems to act in positive correlation for each ionic group in this season with one weak exception for the positive Langevin-ion-group.

As already described, it may be noted that in general the influences of these meteorological elements excluding cloudiness look opposite for small-ion-group and for other ionic groups; this relationship may be expected from the theory of ionic balance and may explain one of the causes that only small-ion-group shows a weak irregular relation in case of correlation between each ionic groups.

An extremely strong influence of the meteorological conditions for ionic groups seems to appear upon the small-ion-groups, particularly for which the positive group gives relatively larger coefficient than the negative. The fact that the coefficients of the small-ion-group are negative with temperature and positive with wind velocity and pressure, looks to be in good agreement with the case of the atmospheric electrical<sup>(16)</sup> conductivity in this season; because the conductivity is mainly due to small-ions and correlations of the conductivity in this locality in winter is found by our previous<sup>(19)</sup> study to be negative with temperature and positive with wind velocity and pressure.

For the intermediate-ion-groups the negative ions correlate more intense with weather conditions than the positive.

The coefficients of the Langevin-ion-groups are almost very weak and

among them only the one between pressure and positive ions is apparently significant.

Large-ion-groups are just opposite to the small-ion-group and gives negative correlation with pressure and wind velocity, positive correlation with cloudiness in spite of very weak correlations with temperature and humidity within their probable errors.

Regarding these coefficients between ionic groups and meteorological elements they are of course not the relationship between absolutely pure influences of each single factors, but include implicitly the resultant influences of other factors therefore by eliminating these influences of the other factors by a partial correlation we will try the relational influence of a pure single meteorological element upon ionic groups as below.

#### Partial Correlations

(Fourth order correlation coefficient eliminating influence of the other 4 meteorological elements)

		Temp.	Wind vel.	Humid.	Press.	Cloud.
Small-ion-group	Pos.	-0.760	0.894	-0.912	-0.716	0.916
	Neg.	-0.494	0.561	-0.683	-0.218	0.593
Intermediate-ion-group	Pos.	-0.230	0.053	-0.202	0.014	0.171
	Neg.	0.040	-0.042	0.012	-0.138	0.175
Langevin-ion-group	Pos.	-0.008	-0.000	0.298	-0.362	-0.129
	Neg.	-0.232	0.336	0.244	-0.401	0.388
Large-ion-group	Pos.	-0.580	0.476	-0.576	-0.707	0.685
	Neg.	-0.364	0.034	-0.233	-0.431	0.257

From this result we may find that the small-ion-groups have the largest partial coefficients with weather-conditions and the large-ion-groups have the next large coefficients; and that for the fourth order of the partial correlational relationship the temperature, pressure and humidity show almost negative coefficients, and wind-velocity and cloudiness show positive coefficients.

(1934-3-28)

#### References:—

1. POLLOCK, K.: *Le Radium* 4, 1907. *Phil. Mag.* 29, 1915.
2. KAHLER, K.: *Met. Zeitschr.* 47, 1930.
3. ISRAEL, H.: *Gerl. Beitr.* 31, 1931.
4. SCHMAIES, A. and WIGAND, A.: *Die Atmosphere als Kolloid*, 1929.
5. NOLAN, P. J.: *Phil. Mag.* 1, 1926.
6. ISRAEL, H.: *Beitr. z. Geophy.* 34, 1931.
- ISRAEL, H. and SCHULZ, L.: *Terr. Mag. and Atm. Elect.* 38, 1933.

7. BOOJI, J.: Beitr. z. Geophy. 37, 1932.
8. STORM, W. von LEENWAN: Beitr. z. Geophy. 37, 1932; 38, 1933.
9. ISRAEL, H.: Beitr. z. Geophy. 31, 1931.
10. ITIHARA: Physik. Z. S. 32, 1931.
11. SCHOLTZ, J.: Beitr. z. Geophy. 29, 1931.
12. ISRAEL, H.: Beitr. z. Geophy. 35, 1932.
13. SHIRATORI, K.: Proc. of the 5th Pan-Pacific Science Congress.
14. ISRAEL, H. and SCHULZ, L.: Terr. Mag. 38, 1933.  
ISRAEL, H.: Beitr. z. Geophy. 34, 1931.
15. BOOJI, J.: Beitr. z. Geophy. 37, 1932.
16. BOOJI, J.; STORM, A. J. von LEENWAN: Beitr. z. Geophy. 37, 1932.
17. SHIRATORI, K.: Memoir of Taihoku Imp. Univ. 1934.
18. SHIRATORI, K.: Memoir of Taihoku Imp. Univ. 1934.
19. SHIRATORI, K.: Memoir of Taihoku Imp. Univ. 1934.

Table A. Ionic Spectrum

(Z' was taken by a graphical method)

No. 1 Dec. 26, 1933. 17h55m

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	Z	Z+z'	N
2.0	117	57	--	118	78	—
1.5	135	75	18	138	78	0
1.0	160	100	25	172	92	14
0.5	230	130	30	210	135	43
(0.3)	(275)	(185)	(55)	(240)	(192)	(57)
0.1	340	290	(105) 160	295	245	(53) 110
0.05	388	308	18	318	293	48
0.01	500	330	22	392	332	39
(0.007)	(558)	(348)	(18)	(500)	(360)	(28)
0.005	650	350	(2) 20	550	400	(40) 68
(0.004)	(725)	(365)	(15)	(600)	(480)	(80)
0.001	1700	700	(335) 350	2100	600	(120) 220
0.0005	4580	1830	1130	4700	700	100
0.0001	6680	4480	2650	10980	8980	8280

Temperature 19.3°

Humid. 80%

\*Pressure 763.5 mm

Wind 0.6 W

Cloud 3 K

(Weather:—Calm clody, later fine.)

No. 2 Dec. 27, 1933. 11h10m

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	Z	Z+z'	N
2.0	140	40	—	129	109	—
1.5	160	100	60	134	110	1
1.0	184	124	24	142	122	12
0.5	208	183	59	180	165	43
(0.3)	(218)	(200)	(17)	(180)	(180)	(15)
0.1	235	205	(5) 22	180	180	(0) 15
0.05	255	(230)	25	188	183	3
0.01	290	250	20	210	190	7
(0.007)	(330)	(260)	(10)	(240)	(205)	(15)
0.005	400	275	(15) 25	390	375	(170) 185
(0.004)	(460)	(300)	(25)	(395)	(383)	(8)
0.001	900	840	(540) 565	700	500	(117) 125
0.0005	1700	900	60	1720	1220	720
0.0001	2850	2580	1680	2880	2530	1310

Temperature 22.4°

Humid. 59%

Pressure. 764.0 mm

Wind 4.5 E

Cloud 2 K

(Weather:—Warm and dry, fine.)

No 3 Dec 27, 1933 15h2m

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	Z	Z+z'	N
2.0	249	29	—	160	60	—
1.5	304	124	95	178	103	43
1.0	360	260	136	187	137	34
0.5	416	356	96	195	170	33
(0.3)	(440)	(404)	(48)	(210)	(180)	(10)
0.1	493	433	(29) 77	250	200	(20) 30
0.05	522	497	64	270	255	55
0.01	565	515	18	320	260	5
(0.007)	(573)	(538)	(23)	(420)	(280)	(20)
0.005	578	563	(25) 48	550	350	(70) 90
(0.004)	(583)	(571)	(8)	(640)	(480)	(130)
0.001	760	660	(89) 97	1150	950	(470) 600
0.0005	1930	930	270	2130	1130	180
0.0001	3820	3400	2470	3420	3100	1970

Temperature 21.1°

Humid. 69%

Pressure 761.5 mm

Wind 31 E

Cloud 9 SK

(Weather —Warm and dry )

No 4 Dec 28, 1933 12h5m

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	Z	Z+z'	N
2.0	96	56	—	148	58	—
1.5	105	75	19	220	126	68
1.0	132	82	7	290	130	4
0.5	190	100	18	415	280	150
(0.3)	(250)	(115)	(15)	(478)	(388)	(108)
0.1	470	270	(155) 170	580	480	(92) 200
0.05	560	410	140	600	580	100
0.01	1330	930	520	1380	630	50
(0.007)	(1560)	(1000)	(70)	(1580)	(1230)	(600)
0.005	1700	1300	(300) 370	1720	1570	(340) 940
(0.004)	(1800)	(1440)	(140)	(1800)	(1640)	(70)
0.001	3700	2200	(760) 900	4450	1950	(310) 380
0.0005	5500	3500	1300	9400	5400	3450
0.0001	7600	7000	3500	9700	9520	4120

Temperature 22.5

Humid. 70%

Pressure 763.1 mm

Wind Calm

Cloud 9 KC

(Weather —Calm, very warm cloudy )



No. 5 Dec. 28, 1933. 14<sup>h</sup>10<sup>m</sup>

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	Z	Z+z'	N
2.0	110	10	—	130	70	—
1.5	138	63	53	144	99	29
1.0	165	115	52	160	130	31
0.5	192	152	37	178	158	28
(0.3)	(250)	(166)	(14)	(218)	(173)	(15)
0.1	395	305	(139) 153	304	254	(81) 96
0.05	440	390	85	437	302	48

Temperature 23.9°

Humid. 58%

Pressure 762.8 mm

Wind Calm

Cloud 10 SK

No. 6 Dec. 28, 1933 15<sup>h</sup>10<sup>m</sup>

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	Z	Z+z'	N
2.0	128	8	—	150	70	—
1.5	155	65	57	172	112	42
1.0	183	123	58	195	155	43
0.5	245	185	62	275	155	0
(0.3)	(320)	(200)	(15)	(340)	(226)	(71)
0.1	618	458	(258) 273	450	396	(170) 241
0.05	1045	615	157	495	450	54

Temperature 23.2°

Humid. 62%

Pressure 761.0 mm

Wind 0

Cloud 10

No. 7 Dec. 28, 1933. 16<sup>h</sup>10<sup>m</sup>

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	Z	Z+z'	N
2.0	122	11	—	120	20	—
1.5	158	43	32	170	20	0
1.0	193	123	80	220	120	100
0.5	245	145	22	270	220	100
0.1	927	457	312	710	500	280
0.05	1165	930	473	800	695	195

Temperature 22.5°

Humid. 71%

Pressure 761.5 mm

Wind 0.5

Cloud 10

No 8 Dec 28, 1933 17h15m

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z	N	Z	Z+z'	N
2.0	46	6	—	80	40	—
1.5	55	25	19	90	60	20
1.0	65	45	20	103	83	23
0.5	75	65	20	160	90	7
(0.3)	(90)	(75)	(10)	(170)	(149)	(59)
0.1	116	88	(13) 23	360	160	(11) 70
0.05	130	115	27	460	360	200
0.01	1280	280	165	1600	600	240
(0.007)	(1825)	(565)	(285)	(1870)	(1170)	(570)
0.005	2500	900	(335) 620	2050	1550	(380) 950
(0.004)	(2830)	(1550)	(650)	(2130)	(1730)	(180)
0.001	8050	6300	(4750) 5400	7520	2020	(290) 470
0.0005	24200	8200	1900	22600	7600	5580
0.0001	35800	32600	24400	41200	36900	29300

Temperature 21.6°  
 Pressure 760.7 mm  
 Cloud 10 SK

Humid 78%  
 Wind 0

No 9 Dec 29 1933 11h10m

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	Z	Z+z	N
2.0	85	61	—	43	15	—
1.5	91	73	12	50	29	14
1.0	97	85	12	62	48	19
0.5	120	95	10	85	60	12
(0.3)	(130)	(115)	(20)	(115)	(70)	(10)
0.1	186	126	(11) 31	200	160	(90) 100
0.05	240	190	64	345	200	40
0.01	357	327	137	760	415	215
(0.007)	(674)		(247)	(980)	(455)	(40)
0.005	970	470	(223) 143	1180	805	(350) 390
(0.004)	(1100)	(700)	(230)	(1310)	(1010)	(205)
0.001	3270	2570	(1870) 2100	3600	2840	(1830) 2035
0.0005	9480	4480	1910	9200	3700	860
0.0001	18200	16000	11520	14600	13250	9550

Temperature 18.2°  
 Pressure 760.2 mm  
 Cloud 10 N

Humid 98%  
 Wind 0

(Weather —just at end of Rainfall)

No 10 Dec 29, 1933 13h45m

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	Z	Z+z'	N
2.0	279	259	—	310	130	—
1.5	286	266	7	354	219	89
1.0	294	280	14	402	302	83
0.5	330	295	15	470	320	18
(0.3)	(378)	(306)	(11)	(550)	(424)	(104)
0.1	500	400	(94) 105	695	615	(191) 295
0.05	590	490	90	820	620	5
0.01	900	820	330	1350	1000	380
(0.007)	(1250)	(872)	(52)	(1650)	(1020)	(20)
0.005	1630	1030	(158) 210	1850	1400	(380) 400
(0.004)	(1810)	(1090)	(60)	(1950)	(1590)	(190)
0.001	6200	5100	4070	6110	4710	(3120) 3310
0.0005	18700	6200	1100	16300	6300	1590
0.0001	33500	29800	23600	37400	32400	26100

Temperature 24.1°

Humid. 63%

Pressure 756.9 mm

Wind 3.0 E

Cloud 3 SK. KC.

(Weather —Fine (after rain))

No 11 Dec 30, 1933 14h

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	Z	Z+z'	N
2.0	195	55	—	190	30	—
1.5	235	115	60	230	80	50
1.0	280	180	65	267	147	67
0.5	315	240	60	320	245	98
(0.3)	(380)	(290)	(50)	(360)	(270)	(25)
0.1	550	450	(160) 210	520	390	(120) 145
0.05	610	510	60	655	455	65
0.01	860	560	50	1060	910	455
(0.007)	(1050)	(630)	(70)	(1100)	(925)	(15)
0.005	1350	700	(70) 140	1250	1050	(125) 140
(0.004)	(1650)	(1050)	(350)	(1450)	(1210)	(160)
0.001	6300	1800	(750) 1100	5150	2150	(940) 1100
0.0005	12900	5900	4100	19200	14700	12550
0.0001	28300	26000	20100	22800	21900	7200

Temperature 17.3°

Humid. 82%

Pressure 764.2 mm

Wind 6.7 ENE

Cloud 10 N

(Weather :—Monsoon)

No 12 Dec 30, 1933 16<sup>h</sup>10<sup>m</sup>

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	Z	Z+z'	N
2.0	220	80	—	190	150	—
1.5	255	105	25	210	165	15
1.0	325	175	70	230	180	15
0.5	430	305	130	260	210	30
(0.3)	(510)	(390)	(85)	(315)	(210)	(0)
0.1	690	480	(90) 175	500	350	(140) 140
0.05	810	660	180	615	465	115
0.01	1250	1050	390	1020	670	205
(0.007)	(1300)	(1090)	(40)	(1220)	(800)	(130)
0.005	1600	1100	(10) 50	1500	900	(130) 230
(0.004)	—	—	—	(1800)	(1000)	(100)
0.001	7300	4300	3200	5500	3500	(2500) 2600
0.0005	19400	11400	7100	18700	11700	8200
0.0001	34200	29700	18300	40700	35700	24000

Temperature 15.5°

Humid. 88%

Pressure 764.2 mm

Wind 5.6 NNW

Cloud 10

(Weather — Monsoonic drizzle)

No 13 Dec 31 1933 14<sup>h</sup>20<sup>m</sup>

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	Z	Z+z'	N
2.0	135	75	—	180	40	—
1.5	150	75	0	215	65	25
1.0	190	90	15	255	15	90
0.5	270	170	80	305	245	90
(0.3)	(300)	(270)	(100)	(325)	(290)	(35)
0.1	320	300	(30) 130	475	325	(45) 80
0.05	340	320	20	700	500	175
0.01	720	420	100	1300	800	300
(0.007)	(900)	(480)	(60)	(1500)	(1080)	(280)
0.005	1100	500	(20) 80	1630	1230	(150) 430
(0.004)	(1300)	(700)	(200)	(1720)	(1320)	(90)
0.001	4400	1400	(700) 900	3700	1700	(380) 470
0.0005	14600	6600	5200	12100	7100	5400
0.0001	27000	24500	17900	16300	15500	8400

Temperature 15.2°

Humid 88%

Pressure 768.1 mm

Wind 5.6 ENE

Cloud 10 N

(Weather — Monsoonic)

No. 14 Jan. 1, 2, 1934. 23<sup>h</sup>40<sup>m</sup>

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	Z	Z+z'	N
2.0	253	53	—	320	260	—
1.5	310	160	107	340	265	5
1.0	380	280	120	360	280	15
0.5	460	385	105	440	290	10
(0.3)	(520)	(430)	(45)	(560)	(350)	(60)
0.1	590	440	(10) 55	730	630	(280) 340
0.05	760	610	170	810	685	55
0.01	840	690	80	1250	950	265
(0.007)	(880)	(705)	(15)	(1400)	(1190)	(240)
0.005	1220	720	(15) 30	1500	1200	(10) 250
(0.004)	(1400)	(800)	(80)	(1550)	(1270)	(70)
0.001	3400	2400	(1600) 1680	2800	1300	(30) 100
0.0005	8100	2600	200	9500	3500	2200
0.0001	17800	15300	12700	17200	15200	11700

Temperature 14.6°

Humid. 94%

Pressure 770.7 mm

Wind 2.8 E

Cloud 10

(Weather.—Slight drizzle)

No. 15 Jan. 2, 1934. 2<sup>h</sup>

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z	N	Z	Z+z'	N
2.0	280	180	—	290	190	—
1.5	310	220	40	315	240	50
1.0	335	255	35	340	270	30
0.5	390	330	75	390	340	70
(0.3)	(430)	(370)	(40)	(450)	(360)	(20)
0.1	510	460	(90) 130	600	450	(90) 110
0.05	550	510	50	750	575	125
0.01	600	550	40	1100	900	325
(0.007)	(640)	(570)	(20)	(1150)	(940)	(40)
0.005	800	600	(35) 50	1250	1000	(60) 100
(0.004)	(100)	(720)	(120)	(1350)	(1070)	(70)
0.001	3100	2100	(1380) 1500	3500	2000	(930) 1000
0.0005	8700	4200	2100	8900	3900	1900
0.0001	14600	13400	9200	17800	15400	11500

Temperature 13.2°

Humid. 94%

Pressure 770.2 mm

Wind 3.6 NE

Cloud 10

(Weather :—Monsoon weather slight drizzle)

No. 16 Jan. 2, 1934. 4h

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	Z	Z+z'	N
2.0	240	200	—	180	120	—
1.5	250	205	5	190	145	25
1.0	265	215	10	210	170	25
0.5	290	240	25	250	190	20
(0.3)	(330)	(240)	(0)	(300)	(255)	(65)
0.1	450	350	(110) 110	450	350	(95) 160
0.05	540	440	90	545	445	95
0.01	730	630	190	720	650	205
(0.007)	(1300)	(1195)	(565)	(760)	(676)	(26)
0.005	1350	1275	(80) 645	800	725	(49) 75
(0.004)	(1400)	(1320)	(45)	(850)	(770)	(45)
0.001	2350	1350	(30) 75	2300	1100	(330) 375
0.0005	5500	2000	650	6900	1900	800
0.0001	11800	10600	8600	13200	12000	10100

Temperature 13.0°

Humid. 93%

Pressure 770.2 mm

Wind 4.9

Cloud 10

(Weather — Monsoonic)

No 17 Jan 2, 1934 6h

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	S	Z+z'	N
2.0	165	125	—	150	90	—
1.5	175	130	5	170	110	20
1.0	205	155	25	210	130	20
0.5	270	195	40	270	195	65
(0.3)	(345)	(255)	(60)	(320)	(230)	(35)
0.1	470	370	(115) 75	435	355	(125) 160
0.05	550	425	75	500	440	85
0.01	675	625	200	585	545	105
(0.007)	(700)	(644)	(19)	(700)	(630)	(85)
0.005	720	670	(26) 45	720	645	(15) 100
(0.004)	(750)	(670)	(0)	(750)	(670)	(25)
0.001	2200	900	(230) 230	1600	700	(30) 55
0.0005	4550	2050	1150	4800	1300	600
0.0001	10200	8200	6150	11400	9800	8500

Temperature 12.9°

Humid. 92%

Pressure 770.2 mm

Wind 6.1 NE

Cloud 10

(Weather :— Monsoonic slight drizzle)

No 18 Jan 2, 1934 7<sup>h</sup>20<sup>m</sup>

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	Z	Z+z'	N
2.0	135	35	—	160	80	—
1.5	160	85	50	180	105	25
1.0	190	110	25	200	120	15
0.5	225	165	55	250	175	55
(0.3)	(270)	(195)	(30)	(305)	(215)	(40)
0.1	370	290	(95) 125	445	325	(110) 150
0.05	450	350	60	560	435	110
0.01	630	530	180	695	575	140
(0.007)	(660)	590	(60)	(850)	(745)	(170)
0.005	685	610	(20) 80	900	800	(55) 225
(0.004)	(700)	620	(10)	(950)	(850)	(50)
0.001	1400	800	(180) 190	2450	1050	(200) 250
0.0005	5200	1700	900	7300	1300	250
0.0001	9700	8600	6400	16400	14100	12800

Temperature 13.0°

Humid. 90%

Pressure 770.4 mm

Wind 5.7 NE

Cloud 10

(Weather — Monsoonic (drizzle))

No 19 Jan 2, 1934 8<sup>h</sup>30<sup>m</sup>

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	Z	Z+z'	N
2.0	200	140	—	130	90	—
1.5	213	168	28	140	95	5
1.0	230	180	12	153	123	28
0.5	270	230	50	170	145	22
(0.3)	(310)	(235)	(5)	(190)	(145)	(0)
0.1	410	330	(95) 100	325	225	(80) 80
0.05	490	365	35	380	305	80
0.01	870	620	255	490	430	125
(0.007)	(980)	(770)	(150)	(520)	(464)	(34)
0.005	1050	875	(105) 255	530	480	(16) 50
(0.004)	(1100)	(920)	(45)	(540)	(480)	(0)
0.001	1350	950	(30) 75	1300	500	(20) 20
0.0005	5150	2150	1200	4500	1500	1000
0.0001	6800	6500	4350	7800	7300	5800

Temperature 14.1°

Humid. 85%

Pressure 770.8 mm

Wind 5.2 NE

Cloud 10

(Weather — Monsoonic)

No 20 Jan 8 1934 17h30m

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z	N	Z	Z+z	N
2.0	190	30		150	110	-
1.5	240	90	60	160	115	5
1.0	255	135	45	180	130	15
(0.7)	(290)	(150)	(15)	(205)	(135)	(5)
0.5	330	05	(55) 70	245	135	(0) 5
(0.4)	(355)	(215)	(10)	(265)	(145)	(10)
(0.3)	(330)	(260)	(45)	(320)	(155)	(10)
(0.2)	(445)	(325)	(65)	(375)	(207)	(52)
0.1	510	360	(35) 155	485	225	(18) 90
(0.07)	(570)	(360)	(0)	(590)	(310)	(85)
0.05	660	385	(25) 25	695	420	(110) 195
(0.04)	(730)	(390)	(5)	(770)	(450)	(30)
(0.02)	(1020)	(580)	(190)	(1010)	(710)	(260)
0.01	1400	1100	(520) 715	1200	800	(90) 380
(0.007)	(1450)	(1100)	(0)	(1300)	(1020)	(220)
0.005	1600	1100	(0) 0	1450	1050	(30) 250
(0.004)	(1850)	(1130)	(30)	(1600)	(1120)	(70)
(0.002)	(3000)	(1200)	(70)	(3100)	(1300)	(180)
0.001	4600	1600	(400) 500	6900	1400	(100) 350
0.0005	9600	1600	0	16300	13500	12100
(0.0004)	(11400)	(4200)	(2600)	(17400)	(15800)	(2300)
0.0001	19300	16700	(12500) 15100	17900	17730	(1930) 4230

Temperature 14.8°

Humid 91%

Pressure 768.0 mm

Wind 3.2 NE

Cloud 10 N

(Weather —Slight foggy)



No. 21 Jan. 9, 1934. 15<sup>h</sup>10<sup>m</sup>

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	Z	Z+z'	N
2.0	175	95	—	155	115	—
1.5	205	130	35	180	120	5
1.0	230	150	20	210	130	10
(0.7)	(275)	(170)	(20)	(255)	(143)	(13)
0.5	330	180	(10) 30	305	180	(37) 50
(0.4)	(370)	(190)	(10)	(345)	(185)	(5)
(0.3)	(440)	(260)	(70)	(400)	(220)	(35)
(0.2)	(530)	(290)	(30)	(480)	(280)	(60)
0.1	685	505	(215) 325	520	320	(40) 140
(0.07)	(760)	(585)	(80)	(570)	(360)	(40)
0.05	830	630	(45) 125	660	360	(0) 40
(0.04)	(870)	(670)	(40)	(760)	(360)	(0)
(0.02)	(1060)	(820)	(150)	(1160)	(560)	(200)
0.01	1320	1070	(250) 440	1550	1050	(490) 690
(0.007)	(1500)	(1080)	(10)	(1800)	(1100)	(50)
0.005	1750	1250	(170) 180	2100	1100	(0) 50
(0.004)	(2000)	(1280)	(30)	(2400)	(1200)	(100)
(0.002)	(3400)	(1400)	(120)	(3500)	(1700)	(500)
0.001	5000	3000	(1600) 1750	4700	2700	(1000) 1600
0.0005	13200	11950	8950	13000	11250	8550
(0.0004)	(14600)	(13600)	(1650)	(16900)	(15300)	(4050)
0.0001	15650	15450	(1850) 3500	18200	17800	(2500) 6550

Temperature 19.4°

Humid. 86%

Pressure 763.8 mm

Wind 6.9 NE

Cloud 5 K

No. 22 Jan. 9, 1934. 16<sup>h</sup>40<sup>m</sup>

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	Z	Z+z'	N
2.0	120	80	—	150	90	—
1.5	140	95	15	170	125	35
1.0	190	130	35	190	140	15
(0.7)	(220)	(150)	(20)	(200)	(144)	(4)
0.5	255	155	(5) 25	220	170	(26) 30
(0.4)	(280)	(180)	(25)	(230)	(182)	(12)
(0.3)	(310)	(220)	(40)	(245)	(185)	(3)
(0.2)	(355)	(235)	(15)	(270)	(210)	(25)
0.1	440	290	(55) 135	330	230	(20) 60
(0.07)	(500)	(360)	(70)	(380)	(240)	(10)
0.05	550	400	(40) 110	430	280	(40) 50
(0.04)	(590)	(430)	(30)	(480)	(320)	(40)
(0.02)	(720)	(560)	(130)	(600)	(440)	(120)
0.01	900	600	(40) 200	750	500	(60) 270
(0.007)	(1000)	(650)	(50)	(950)	(530)	(30)
0.005	1150	650	(0) 50	1100	600	(70) 100
(0.004)	(1300)	(700)	(50)	(1200)	(600)	(0)
(0.002)	(1850)	(950)	(250)	(1700)	(900)	(300)
0.001	2600	1600	(650) 950	2700	1200	(300) 600
0.0005	8100	6100	4500	5900	1900	700
(0.0004)	(9300)	(6100)	(0)	(7000)	(3400)	(1500)
0.0001	11400	10600	(4500) 4500	11800	9800	(6400) 7900

Temperature 18.3°

Humid. 90%

Pressure 764.2 mm

Wind 6.8 NE

Cloud 2

(Weather :—Monsoonic fine)

No. 23 Jan. 10, 1934. 17h

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	Z	Z+z'	N
2.0	143	58	—	108	58	—
1.5	170	87	29	120	75	17
1.0	210	100	13	130	80	5
(0.77)	(240)	(170)	(70)	(150)	(80)	(0)
0.5	270	195	(25) 95	180	120	(40) 40
(0.4)	(300)	(220)	(25)	(210)	(150)	(30)
(0.3)	(350)	(290)	(70)	(250)	(190)	(40)
(0.2)	(410)	(360)	(70)	(300)	(220)	(30)
0.1	470	420	(60) 225	360	320	(100) 200
(0.07)	(470)	(435)	(15)	(400)	(330)	(10)
0.05	480	455	(20) 35	480	330	(0) 10
(0.04)	(480)	(460)	(5)	(530)	(330)	(0)
(0.02)	(640)	(480)	(20)	(720)	(560)	(230)
0.01	1200	500	(20) 45	1100	600	(40) 270
(0.007)	(1400)	(980)	(480)	(1300)	(600)	(0)
0.005	1500	1000	(20) 500	1600	600	(0) 0
(0.004)	(1700)	(1100)	(100)	(1900)	(700)	(100)
(0.002)	(3400)	(1400)	(300)	(4500)	(1500)	(800)
0.001	6200	3200	(1800) 2200	7600	4600	(3100) 4010
0.0005	17000	12000	8800	22000	17000	12400
(0.0004)	(22000)	(15600)	(3600)	(27000)	(23000)	(6000)
0.0001	28000	26400	(10800) 14400	29000	28000	(5000) 11000

Temperature 16.5°

Humid. 87%

Pressure 765.6

Wind 0.8

Cloud 10

(Weather:—Just before monsoonic drizzle)

No. 24 Jan. 11, 1934. 15<sup>h</sup>

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	Z	Z+z'	N
2.0	202	52	—	262	112	—
1.5	250	100	48	304	134	22
1.0	305	130	30	346	246	112
(0.7)	(330)	(260)	(130)	(390)	(250)	(4)
0.5	335	285	(25) 155	460	385	(135) 139
(0.4)	(340)	(300)	(15)	(480)	(440)	(55)
(0.3)	(370)	(310)	(10)	(485)	(440)	(0)
(0.2)	(400)	(320)	(10)	(500)	(440)	(0)
0.1	480	330	(10) 45	540	440	(0) 55
(0.07)	(520)	(380)	(50)	(580)	(475)	(35)
0.05	570	445	(65) 115	640	540	(65) 100
(0.04)	(600)	(480)	(35)	(680)	(580)	(40)
(0.02)	(710)	(610)	(130)	(800)	(700)	(120)
0.01	830	680	(70) 235	910	760	(60) 220
(0.007)	(850)	(780)	(100)	(940)	(800)	(40)
0.005	920	795	(15) 115	1000	800	(0) 40
(0.004)	(1000)	(800)	(5)	(1120)	(880)	(80)
(0.002)	(1650)	(1150)	(350)	(2500)	(1700)	(820)
0.001	2800	1550	(400) 755	3800	2550	(850) 2470
0.0005				6500	3000	450
(0.0004)				(7800)	(5000)	(2000)
0.0001				14000	12000	(700) 9000
0.00005				17600	15100	• 3100

Temperature 11.6°

Humid. 85%

Pressure 769.6 mm

Wind 3.5 NE

Cloud 10 N

(Weather — Monsoonic drizzle)

No. 25 Jan. 17, 1934. 11<sup>h</sup>

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	Z	Z+z'	N
2.0	210	90	—	240	40	—
1.5	245	125	35	300	120	80
1.0	280	180	55	360	210	90
(0.7)	(320)	(215)	(35)	(410)	(270)	(60)
0.5	365	265	(50) 85	480	330	(60) 120
(0.2)	(525)	(385)	(120)	(705)	(525)	(195)
0.1	640	540	(155) 275	875	675	(150) 345
(0.07)	(690)	(585)	(45)	(940)	(765)	(90)
0.05	815	615	(30) 75	1010	860	(95) 185
(0.02)	(1010)	(810)	(195)	(1185)	(1045)	(185)
0.01	1200	1000	(190) 385	1300	1180	(135) 320
(0.007)	(1250)	(1075)	(75)	(1360)	(1255)	(75)
0.005	1300	1150	(75) 150	1450	1350	(95) 170
(0.002)	(2150)	(1150)	(0)	(2250)	(2130)	(780)
0.001	4400	1900	(750) 750	4550	2250	(120) 900
0.0005	11300	5399	3400	12200	4200	1950
0.0001	17300	16000	10700	25700	22500	18300

Temperature 13.6°

Humid. 90%

Pressure 770.2 mm (decreasing)

Wind. 2.0 E

Cloud 10 N

(Weather :—Monsoonic)

No. 26 Jan. 17, 1934. 14<sup>h</sup>10<sup>m</sup>

Kg	Positive			Negative		
	Z	Z+z'	N	Z	Z+z'	N
2.0	230	90	—	205	145	—
1.5	255	105	15	215	155	10
1.0	305	185	80	230	170	15
(0.7)	(360)	(220)	(35)	(310)	(170)	(0)
0.5	410	285	(65) 100	440	190	(20) 20
(0.2)	(555)	(435)	(150)	(650)	(530)	(340)
0.1	670	520	(85) 235	770	620	(90) 430
(0.07)	(720)	(580)	(60)	(810)	(705)	(85)
0.05	800	650	(70) 130	850	750	(45) 130
(0.02)	(1130)	(890)	(240)	(1090)	(830)	(80)
0.01	1450	1150	(260) 500	1350	1000	(170) 250
(0.007)	(1550)	(1305)	(155)	(1450)	(1170)	(170)
0.005	1650	1450	(145) 300	1500	1275	(105) 275
(0.002)	(2500)	(1500)	(50)	(2300)	(1300)	(25)
0.001	3600	2600	(1100) 1150	5150	2150	(850) 875
0.0005	12000	6000	3400	11300	4300	2150
0.0001	21600	20000	14000	22200	20000	15700

Temperature 14.0°

Humid. 88%

Pressure 768.7 mm

Wind 2.3

Cloud 10 N

(Weather —Rain, (large drops))



# UEBER FLÄCHEN UND KURVEN (VIII):

## Über Mittelpunktfläche

Sôji MATSUMURA

(Accepted for publication, September 10, 1934.)

In dieser Note möchte ich zwei Flächen studieren, für welche das Strahlensystem, welches von den gemeinschaftlichen Tangenten dieser zwei Flächen gebildet wird, ein Normalensystem ist.

$\mathfrak{x}(\mu, \nu)$  und  $\bar{\mathfrak{x}}(\mu, \nu)$  seien die zwei Flächen.

Nach unseren Voraussetzungen über  $\mathfrak{x}(\mu, \nu)$  und  $\bar{\mathfrak{x}}(\mu, \nu)$  sind sie dann zwei Mäntel der Zentralflächen einer Fläche und aus einem wohlbekannten Satz in der gewöhnlichen Differentialgeometrie ergibt sich, dass diejenigen Flächenkurven, längs deren die beiden Flächen von den gemeinschaftlichen Tangenten berührt werden, geodätische Kurven auf der einen bzw. anderen Fläche sind.

Daraus folgen die folgenden Beziehungen:

$$(A) \quad D(\theta) \equiv \frac{\partial^2 \theta}{\partial \mu \partial \nu} + \sigma / \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + 1 / \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = 0,$$

wobei

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = \frac{GE_v - FG_u}{EG_u - FE_v}, \\ \frac{1}{2} \lambda = \frac{EG - F^2}{E_v F - G_u E} \end{array} \right.$$

sind.

### § 1

Die notwendige, hinreichende Bedingung dafür, dass  $\nu = \text{const.}$  ist, ist die Berührungskurve von Umföhrungszylinder oder Umföhrungskegel:

$$\sigma = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{\sigma}{\lambda^2} = \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right).$$

Wenn  $\sigma = 0$ , dann

$$G = 0, \quad E = f(\mu) \quad \text{oder} \quad E = e^{-\mu} f(\mu) \phi(\nu).$$

Die notwendige, hinreichende Bedingung dafür, dass  $\mathfrak{x}$  eine Affinmouldische Fläche ist, ist die



$$E=f(u)+\phi(v),$$

$$E=0$$

oder

$$G=\psi(v).$$

## § 2

Wenn  $\mathfrak{g}$  Affinekugel ist, so folgt

$$(1) \quad \begin{cases} \mathfrak{g}_{vu} = \frac{1}{h} h_u \mathfrak{g}_u + \frac{1}{h} \mathfrak{g}_v, \\ \mathfrak{g}_{uv} = h \mathfrak{g}, \\ \mathfrak{g}_{vv} = \frac{1}{h} \mathfrak{g}_v + \frac{1}{h} h_v \mathfrak{g}_v, \end{cases}$$

wobei

$$(2) \quad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log h = h - \frac{1}{h^2}.$$

Aus (1) und (A) ergibt sich

$$(3) \quad \lambda h \mathfrak{g} + \sigma \mathfrak{g}'_u + \mathfrak{g}_v = 0.$$

(3) mit  $u$  differenziert, wegen (1), ergibt sich:

$$(4) \quad \mathfrak{g}(\lambda_u h + \lambda h_u + h) + \mathfrak{g}_u \left( \lambda h + \sigma_u + \frac{\sigma}{h} h_u \right) + \frac{\sigma}{h} \mathfrak{g}_v = 0.$$

(3) mit  $v$  differenziert, wegen (1), ergibt sich:

$$(5) \quad \mathfrak{g}(\lambda_v h + \sigma h + \lambda h_v) + \mathfrak{g}_v \left( \lambda h + \frac{1}{h} h_v \right) + \mathfrak{g}_u \left( \sigma_v + \frac{1}{h} \right) = 0.$$

Aus (4), (5) folgt

$$(6) \quad \mathfrak{g} \cdot a + \mathfrak{g}_u \cdot b = 0,$$

so entsteht

$$(7) \quad \mathfrak{g} = f(v) e^{-\int P du},$$

wo

$$a = \left( \lambda h + \frac{h_v}{h} \right) (\lambda_u h + \lambda h_u + h) - \lambda_v \sigma - \sigma^2 - \frac{\lambda \sigma h_v}{h},$$

$$b = \left( \lambda h + \sigma_u + \frac{\sigma}{h} h_u \right) \left( \lambda h + \frac{h_v}{h} \right) - \frac{\sigma_v \sigma}{h} - \frac{\sigma}{h^2},$$

$$P = a/b.$$

## § 3

Nehmen wir asymptotische Linien als Parameterische Kurven  $u, v$ , so folgt

$$\begin{aligned}
 \xi_{uu} &= \frac{F_u}{F} \xi_u + \frac{A}{F} \xi_v, \\
 \xi_{uv} &= F \eta, \\
 \xi_{vv} &= \frac{D}{F} \xi_u + \frac{F_v}{F} \xi_v, \\
 \eta_u &= -H \xi_u + \frac{A_v}{F^2} \xi_v, \\
 \eta_v &= \frac{D_u}{F^2} \xi_u - H \xi_v,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

wo

$$\begin{aligned}
 H &= S - J, \\
 J &= -\frac{1}{F} \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v}, \quad J = \frac{AD}{F^3}.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Integrabilitätsbedingungen sind

$$\begin{aligned}
 H_u &= \frac{AD}{F^3} - \frac{1}{F} \left( \frac{A_v}{F} \right)_v, \\
 H_v &= \frac{DA_v}{F^3} - \frac{1}{F} \left( \frac{D_u}{F} \right)_u.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Setzen wir (1) in (A) ein, so folgt

$$\lambda F \eta + \sigma \xi_u + \xi_v = 0.
 \tag{4}$$

Dies mit  $u$  differenziert, wegen (1), ergibt sich:

$$(5) \quad \left[ \sigma F + (\lambda F)_v \right] \eta + \left[ \sigma_v + \frac{D}{F} + \frac{D_u \lambda F}{F^2} \right] \xi_u + \left[ \frac{F_v}{F} - H \lambda F \right] \xi_v = 0.$$

Dies mit  $v$  differenziert, wegen (1), ergibt sich:

$$(6) \quad \left[ (\lambda F)_u + F \right] \eta + \left[ \sigma_u - H + \frac{F_u}{F} \right] \xi_u + \left[ \frac{A}{F} + \frac{A_v}{F^2} \right] \xi_v = 0.$$

Aus (6), (7) ergibt sich

$$(7) \quad A \xi_u = B \xi_v,$$

wobei

$$(8) \quad \begin{cases} A = \left( \sigma_v + \frac{D}{F} + \frac{D_u \lambda F}{F^2} \right) \left[ (\lambda F)_u + F \right] + \left( -\sigma_u + H - \frac{F_u}{F} \right) \left[ \sigma F + (\lambda F)_v \right], \\ B = \left( \frac{F_v}{F} - H \lambda F \right) \left[ (\lambda F)_u + F \right] + \left( \frac{A}{F} + \frac{A_v}{F^2} \right) \left[ \sigma F + (\lambda F)_v \right]. \end{cases}$$

Aus (8) entsteht

$$(9) \quad \xi = \int f(u) e^{-\int r du} du + F(v),$$

wo

$$(10) \quad P = \frac{\sigma}{A} + \frac{1}{B}$$

(10) ist unsere Fläche.

#### § 4

Betrachten wir

$$(1) \quad \bar{\lambda} \bar{x}_{uv} + \bar{\sigma} \bar{x}_u + \bar{x}_v = 0,$$

$$(2) \quad \lambda x_{uv} + \sigma x_u + x_v = 0.$$

Wenn

$$(3) \quad \bar{E} = a^2 E, \quad \bar{F} = a^2 F, \quad \bar{G} = a^2 G$$

bestehen, so folgt aus (1), (2)

$$(4) \quad \lambda \bar{x}_{uv} + \sigma \bar{x}_u + \bar{x}_v = 0,$$

$$(5) \quad \lambda x_{uv} + \sigma x_u + x_v = 0.$$

wobei  $a$  eine positive Konstante ist.

Aus (4), (5) kann man wissen:

$$x \equiv \bar{x} + \text{const.},$$

Für

$$\begin{aligned} \bar{E} &= a^2 E, & \bar{F} &= a^2 F, & \bar{G} &= a^2 G, \\ \bar{L} &= a L, & \bar{M} &= a M, & \bar{N} &= a N \end{aligned}$$

in (1)

bestehen

$$a^2 \bar{K} = K$$

#### § 5

Wenn  $x$  mit<sup>(1)</sup>

$$(1) \quad \begin{cases} x = A\alpha + \int A' a \, du, \\ y = A\beta + \int A' b \, du, \\ z = A\gamma + \int A' c \, du \end{cases}$$

gegeben wird, so folgt

$$(2) \quad \begin{cases} x_u = A' \cdot \alpha + A' a \cdot A'', \\ x_v = A \alpha', \\ x_{uv} = A \alpha'' \end{cases}$$

(1) SCHUR, A.: Über Lichtgrenztangentsysteme und mit ihnen Zusammenhängende Flächentransformationen, Math. Zeitschrift 24 Bd. (1926) S. 533. \*

Somit folgt aus (A):

$$A (\lambda \alpha'' + \alpha') + \sigma A' (\alpha + A'' \alpha) = 0,$$

wo

$$G = A (\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2),$$

$$F = A A' (\alpha \alpha' + \beta \beta' + \gamma \gamma') + A'' (a \alpha' + b \beta' + c \gamma'),$$

$$E = A'^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + A''^2 (a^2 + b^2 + c^2) + 2 A' A'' (a \alpha + b \beta + c \gamma).$$

## § 6

Wenn auf der Fläche  $x(u, v)$  . . . die Kurven  $v = \text{const.}$  eben sind, so gibt es drei nur von  $v$  abhängige Funktionen  $a, b, c$ , die die Stellung der Ebenen dieser Kurven so charakterisieren, dass

$$(1) \quad ax + by + cz = 1$$

ist. Wenn andererseits längs einer solchen Kurve  $v = \text{const.}$  ein Berührungszylinder existiert, so kann man die Darstellung so einrichten, dass

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial v} = \Phi(u, v) \alpha(v), \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

ist, wo  $\alpha, \beta, \gamma$  die Funktionen von  $v$  allein sind.

Dann folgt<sup>(1)</sup>

$$\Phi = V_0 + V_1 U_1 + V_2 U_2,$$

Somit entsteht

$$\frac{\partial x}{\partial v} = (V_0 + V_1 U_1 + V_2 U_2) \alpha, \dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = (V_1 U_1' + V_2 U_2') \alpha, \dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \int (V_0 + V_1 U_1' + V_2 U_2') \alpha \, dv,$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} & \lambda (V_1 U_1' + V_2 U_2') \alpha + \sigma \int (V_0 + V_1 U_1' + V_2 U_2') \alpha \, dv \\ & + (V_0 + V_1 U_1 + V_2 U_2) \alpha = 0. \end{aligned}$$

Wenn  $\sigma = 0$  ist, so folgt

(1) SALKOWSKI, E.: Über affine Geometrie, Math. Zeitschrift 17 (1923) S. 45.

$$x=f_1(u),$$

$$y=f_2(u),$$

$$z=f_3(u),$$

oder

$$\frac{\partial x}{\partial v}=\Phi(u,v)\alpha(v),$$

wo

$$\Phi=\frac{-V_0\cdot\int\frac{1}{\lambda}du+V}{\exp.\int\frac{1}{\lambda}du}+V_0.$$

## § 7

Untersuchen wir auch in diesem Kapitel die Differential-Gleichung (A).

Hierbei seien die Koeffizienten  $\sigma$ ,  $\lambda$  in einem Streifen

$$u_0\leq u\leq u_1$$

der reellen  $uv$ -Ebene stetige (reelle oder komplexe) Funktionen, die in  $v$  periodisch sind.

Es sei somit

$$(1) \quad \begin{aligned} \sigma(u, v+2\pi) &= \sigma(uv), \\ \lambda(u, v+2\pi) &= \lambda(uv). \end{aligned}$$

Wir fragen nach allen Integralen  $\theta$  von (D), welche in  $v$  die Periode  $2\pi$  haben.

Um die in  $v$  periodischen Integrale von (D) zu konstruieren, suchen wir jetzt das allgemeine Integral von (D) mit Hilfe der Riemannschen Parametrix  $p(uv; st)$  auszudrücken.

Diese Funktion  $p$  genügt bezüglich des ersten Paares von Veränderlichen  $uv$  der Differentialgleichung (D) und ist ferner durch die Randbedingungen

$$(2) \quad \begin{aligned} p(ut; st) &= \frac{B(ut)}{B(st)}; \\ p(sv; st) &= \frac{A(sv)}{A(st)} \end{aligned}$$

eindeutig bestimmt.

Hierbei ist zur Abkürzung

$$(3) \quad A(uv) = \exp. \left\{ - \int_0^v \frac{\sigma(u\eta)}{\lambda(u\eta)} d\eta \right\}, \quad B(uv) = \exp. \left\{ - \int_{u_0}^u \frac{1}{\lambda(\xi v)} d\xi \right\}$$

gesetzt.

Offenbar sind  $A$  und  $B$  im ganzen Definitionsbereich von einander verschieden.

Aus der Voraussetzung (1) folgt unmittelbar, dass  $B(uv)$  immer eine in  $v$  periodische Funktion ist, während  $A(uv)$  dann und nur dann in  $v$  die Periode  $2\pi$  hat, wenn

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sigma(u\eta)}{\lambda(u\eta)} d\eta = 2k\pi i$$

ist, wo unter  $k$  eine ganze reelle Zahl verstanden ist.

Mit Hilfe der Funktion  $p$  lässt sich das  $\theta$  von (D), welche die für  $v = t_0$  und für  $u = s_0$  vorgegebenen Werte

$$(4) \quad \begin{aligned} \theta(u, t_0) &= f(u), \\ \theta(s_0, v) &= g(v) \end{aligned}$$

annimmt, in expliziter Form darstellen.

Hierbei bezeichnen  $f(u)$  und  $g(v)$  einmal stetig differentialbare Funktionen, welche noch der Bedingung

$$f(s_0) = g(t_0)$$

genügen.

Durch die Bedingungen (4) ist das Integral von (D) eindeutig bestimmt.

Man erhält, wenn man abkürzend

$$(5) \quad F(u) = \frac{df(u)}{du} + \frac{1}{\lambda(u t_0)} f(u) = B(u t_0) \frac{d}{du} \frac{f(u)}{B(u t_0)},$$

$$(6) \quad G(v) = \frac{dg(v)}{dv} + \frac{\sigma(s_0 v)}{\lambda(s_0 v)} g(v) = A(s_0 v) \frac{d}{dv} \frac{g(v)}{A(s_0 v)}$$

setzt,

$$(7) \quad \begin{aligned} \theta(uv) &= f(s_0) p(uv; s_0 t_0) + \int_{u_0}^u p(uv; s t_0) F(s) ds + \\ &+ \int_{t_0}^v p(uv; s_0 t) G(t) dt. \end{aligned}$$

Wir gehen zunächst von (D) zu einer neuen Normalform über, indem wir in der Differentialgleichung  $D(\theta) = 0$

$$(8) \quad \theta = A(uv) \theta'$$

substituieren.

Bilden wir den Ausdruck  $D(A\theta')/A$ , so erhalten wir für  $\theta'$  eine Differentialgleichung der Gestalt

$$(9) \quad L(\theta') = \frac{\partial^2 \theta'}{\partial u \partial v} + b(uv) \frac{\partial \theta'}{\partial v} + c(uv) \theta' = 0,$$

wobei

$$(10) \quad \begin{aligned} b &= -\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial u} = -\frac{A}{B} \frac{\partial A}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{B}{A} \right), \\ c' &= \frac{L(A)}{A} \end{aligned}$$

gesetzt ist.

Die Normalform  $(L)$  hat vor  $(D)$  den Vorzug, dass der Koeffizient  $a$  von  $\frac{\partial \theta'}{\partial u}$  verschwindet.

Da  $A$  nach der Voraussetzung eine in  $v$  periodische Funktion ist, so hat  $\theta$  dann und nur dann in  $v$  die Periode  $2\pi$ , wenn  $\theta'$  in  $v$  die gleiche Periode hat.

Die Integrationsprobleme der Differentialgleichung  $(D)$  und  $(L)$  sind somit vollständig äquivalent.

Wir legen daher den folgenden Untersuchungen, indem wir die Striche in  $\theta'$ ,  $b$ ,  $c$  wieder fortlassen, die Differentialgleichung

$$(11) \quad L(\theta) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\lambda(uv)} \frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{\partial(\theta/\lambda)}{\partial u} - \frac{\partial(1/\lambda)}{\partial v} \theta = 0$$

zugrunde.

Hierbei seien die Koeffizienten  $\frac{\partial(1/\lambda)}{\partial v}$  von  $(L)$  in einem Streifen  $u_0 \leq u \leq u_1$  der reellen  $uv$ -Ebene als stetige Funktion definiert, und ausserdem haben  $1/\lambda$  in  $v$  die Periode  $2\pi$ .

Bildet man mit den Koeffizienten von  $(L)$  die Funktionen  $A$  und  $B$  der Gleichungen (3), so ergibt sich

$$(12) \quad A=1, \quad B = \exp. \left\{ - \int_{u_0}^u \frac{1}{\lambda(\xi v)} d\xi \right\},$$

und es sind offenbar auch  $A$  und  $B$  in  $v$  periodische Funktionen.<sup>(1)</sup>

Damit nun das Integral  $\theta$  von  $(D)$  in  $v$  periodisch ist, muss  $\theta(s_0 v) = g(v)$  notwendig eine in  $v$  periodische Funktion sein, d. h.

$$(13) \quad \theta(s_0, v + 2\pi) = g(v + 2\pi) = g(v)$$

(1) Vergl. HAMBURGER, H.: Über die partielle lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus, deren Koeffizienten in einer Veränderlichen periodisch sind, Math. Ann. 105 (1931) S. 446.

Ausserdem ergibt sich die Forderung

$$(14) \quad \theta(u, t_0 + 2\pi) = \theta(u, t_0) = f(u).$$

Andererseits ist aber leicht einzusehen, dass jedes Integral  $\theta$  von  $(D)$ , welches den beiden Bedingungen (13) und (14) genügt, in  $v$  periodisch ist.

Man hat zum Beweise, gestützt auf die Voraussetzungen (1), nur zu berücksichtigen, dass das Integral von  $(D)$  durch die Randwerte (4) eindeutig bestimmt ist.

Führt man die Funktion

$$(15) \quad P(u; st) = p(u, t + 2\pi; st) - p(u, t; st)$$

ein, so ergibt die Forderung (14), wenn man die Darstellung (7) für  $\theta$  benutzt,

$$(16) \quad \theta(u, t_0 + 2\pi) - \theta(u, t_0) = f(s_0) P(u; s_0 t_0) + \int_{s_0}^u P(u; s t_0) F(s) ds \\ + \int_{t_0}^{t_0 + 2\pi} P(u, t_0 + 2\pi; s_0 t) G(t) dt = 0.$$

Schliesslich erhält man, wenn man auf der rechten Seite von (16) partiellintegriert und Formel (5) heranzieht, an Stelle von (16) die Periodizitätsbedingung

$$(17) \quad f(u) P(u; u, t_0) - \int_{s_0}^u \frac{\partial B(s t_0) P(u; s t_0)}{\partial s} \frac{f(s)}{B(s t_0)} ds \\ + \int_{t_0}^{t_0 + 2\pi} p(u, t_0 + 2\pi; s_0 t) G(t) dt = 0$$

Ist jetzt eine in  $v$  periodische Funktion  $G(v)$  gegeben, so kann man sich die Aufgabe stellen, alle in  $v$  periodischen Integrale  $\theta$  von  $(D)$  zu konstruieren, welche der Bedingung

$$(18) \quad \frac{\partial \theta(s_0 v)}{\partial v} + \frac{\sigma(s_0 v)}{\lambda(s_0 v)} \theta(s_0 v) = A(s_0 v) \frac{\partial \theta(s_0 v)}{\partial v A(s_0 v)} = G(v)$$

genügen.

Zur Lösung dieses Problems hat man die Bedingung (17) als Integralgleichung von Volterraschem Typus mit dem Kern

$$(19) \quad J(u, s) = \frac{1}{B(s t_0)} \frac{\partial B(s t_0) P(u; s t_0)}{\partial s}$$

und der zu bestimmenden Funktion  $f(u)$  aufzufassen. Ist nun  $f(u)$  eine Lösung der Integralgleichung (17), so substituierere man dieses  $f(u)$  und die vorgegebene Funktion  $G(v)$  aus Gleichung (18) in die Gleichung (7). Auf diese Weise erhält man alle in  $v$  periodischen Integrale von  $(D)$ , die der Bedingung (18) genügen.



## § 8

Wollen wir die natürlichen Gleichungen krummer Flächen untersuchen, sollen wir

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \sigma/\lambda \frac{\partial \theta}{\partial u} + 1/\lambda \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0$$

nehmen, wobei

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{G E_v - F G_u}{E G_u - F E_v}, & \frac{1}{2} \lambda &= \frac{E G - F^2}{E_v F - G_u E}; \\ E &= \frac{\Phi_2^2 + \Psi_2^2}{(\Phi_2 \Psi_1 - \Psi_2 \Phi_1)^2}, & F &= -\frac{\Phi_1 \Phi_2 + \Psi_1 \Psi_2}{(\Phi_2 \Psi_1 - \Psi_2 \Phi_1)^2}, \\ G &= \frac{\Phi_1^2 + \Psi_1^2}{(\Phi_2 \Psi_1 - \Psi_2 \Phi_1)^2}. \end{aligned}$$

bestehen.<sup>(1)</sup>

So ist in unseren Fällen<sup>(2)</sup>:

$$L = \frac{2EKD}{HD \pm \sqrt{H^2 D^2 - 4EKG}},$$

wobei  $K$  das Krümmungsmass und  $H$  die mittlere Krümmung bedeuten,

$$\begin{aligned} L &= \frac{u \Phi_2^2 + v \Psi_2^2}{uv (\Phi_2 \Psi_1 - \Psi_2 \Phi_1)^2}, & M &= -\frac{u \Phi_1 \Phi_2 + v \Psi_1 \Psi_2}{uv (\Phi_2 \Psi_1 - \Psi_2 \Phi_1)^2}, \\ N &= \frac{u \Phi_1^2 + v \Psi_1^2}{uv (\Phi_2 \Psi_1 - \Psi_2 \Phi_1)^2}. \end{aligned}$$

## § 9

Sind  $u$  und  $v$  geodätische Parameter einer Fläche  $\mathfrak{z}$ , d. h. hat das Bogenelement-Quadrat die Form

$$ds^2 = du^2 + D^2 dv^2,$$

so nimmt die Differentialgleichung der Fläche  $\mathfrak{z}$  wegen  $E = 1$  und  $F = 0$  die Form an:

$$(1) \quad D \mathfrak{z}_{uv} = 2D^u \mathfrak{z}_v,$$

denn

$$(2) \quad \sigma = 0, \quad \frac{1}{2} \lambda = -\frac{D}{2D_u}.$$

(1) HELLER, S.: Untersuchungen über die natürlichen Gleichungen Krummer Flächen, Inaugural-Dissertation, Kiel Univ. (1904).

(2) NAKAJIMA, S.: Über zwei Flächen, welche eine Beziehung haben, Tôhoku Math. Journ. Vol. 30 (1928) p. 146.

Aus (1) ergibt sich:

$$\xi = \int D^2 V dv + U,$$

dies ist die Gleichung von unserer Fläche, wo  $U, V$  die Funktionen von  $u$  bezw. von  $v$  sind.

## § 10

Rotiert die Tratrix um ihre Asymptote als Achse, so erhält man ihre Rotationsfläche, die sich durch die Gleichungen darstellen lässt:

$$(1) \quad \begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \sqrt{a^2 - u^2}, \end{cases}$$

wo  $a$  eine Konstante ist.

Aus (1) folgt

$$(2) \quad \begin{cases} E = a^2 u^{-2}, \\ F = 0, \\ G = u^2, \end{cases}$$

so wird aus (1)

$$(3) \quad \xi_u - \frac{2}{u} \xi = \frac{2}{u} U,$$

wo  $V$  eine Funktion nur von  $v$  ist.

Aus (3) folgt

$$(4) \quad \xi = 2u^2 \int \frac{U}{u^3} du + u^2 V,$$

wo  $V$  eine Funktion nur von  $v$  ist.

So folgt der

**Satz:** Können wir unsere Flächen zu (1) konform abbilden, so wird die Gleichung mit (4) gegeben.

## § 11

Betrachten wir hier<sup>(1)</sup>

$$(1) \quad \xi_u' = \lambda \xi_u, \quad \xi_v = \mu \xi_u$$

(1) Vergl. GRAUSTEIN, W. C.: Parallel Maps of Surfaces, Transactions of the American Math. Society 23 (1922), p. 304.

in

$$(2) \quad \sigma \xi_u + \xi_v + \lambda \xi_{uv} = 0,$$

so folgt

$$(3) \quad (\lambda - \mu) \xi_{uv} + \lambda_v \xi_u - \mu_u \xi_v = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$(4) \quad (\lambda - \mu) \frac{\sigma}{\lambda} - \lambda_v = 0, \quad (\lambda - \mu) \frac{1}{\lambda} + \mu_u = 0,$$

oder

$$(5) \quad \left(\frac{1}{I} - 1\right) \frac{\sigma}{\lambda} + \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} = 0, \quad (1 - I) \frac{1}{\lambda} - \frac{\partial \log \mu}{\partial u} = 0,$$

so entsteht

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \log I}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial u} \left[ \left( \frac{1}{I} - 1 \right) \frac{\sigma}{\lambda} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[ (1 - I) \frac{1}{\lambda} \right] = 0$$

d. h.

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \log I}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial u} \left[ \left( \frac{1}{I} - 1 \right) \frac{\sigma}{\lambda} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[ (1 - I) \frac{1}{\lambda} \right] = 0,$$

wo

$$I = \frac{\lambda}{\mu}$$

ist.

*Wenn  $\sigma$ ,  $\lambda$  gegeben sind, so kann man aus (7)  $I$  bestimmen.*

## § 12

Wir erklären die Affinentfernung eines Punktes  $z$  von unserem Flächenpunkt  $\xi$  mit  $LN - M^2 \neq 0$  durch<sup>(1)</sup>

$$(1) \quad \begin{aligned} \rho &= \frac{(\xi_u, \xi_v, z - \xi)}{|LN - M^2|^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\lambda (\xi_{uv}, \xi_u, z - \xi)}{|LN - M^2|^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{2 \{EG - F^2\} (\xi_{uv}, \xi_u, z - \xi)}{\{E_v F - G_u E\} |LN - M^2|^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

denn

$$(2) \quad \sigma \xi_u + \xi_v + \lambda \xi_{uv} = 0$$

(1) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Berlin (1923), S.

bestehen.<sup>(1)</sup>

Wenn  $p = \text{const.}$  immer besteht, so folgt aus (1)

$$(3) \quad \{E_v F - G_u E\} | LN - M^2 |^{\frac{1}{2}} \\ = 2 \{EG - F^2\} (\xi_u, \xi_u, z - \xi),$$

wo  $E, F, G; L, M, N$  die Fundamentalgrößen erster Ordnung bzw. zweiter Ordnung von  $\xi$  bedeuten.

(3) ist die Gleichung von einer Fläche  $z$ , der zu unserer  $\xi$ -Fläche affine parallelen.

Ist  $\xi$  eine Kugel und  $\xi$  ein nicht auf ihm gelegener Punkt, so ist

$$(4) \quad z = -2 (\xi \xi) \xi + \xi$$

der zu  $\xi$  in bezug auf die Kugel  $\xi$  inverse Punkt. Aus (1), (4) ergibt sich:

$$(5) \quad p = \frac{4 \{F^2 - EG\} (\xi_u, \xi_u, (\xi \xi) \xi)}{\{E_v F - G_u E\} | LN - M^2 |^{\frac{1}{2}}}.$$

### § 13

Wir fragen hier nach der Form des Linienelements einer beliebigen Biegungen zu unterwerfenden Fläche  $S$ , in deren mit den Flächenelementen gekoppelten Tangentialebenen sich die Punkte und die Normalen einer (bei den Biegungen veränderlichen) Fläche  $S'$  derart festlegen lassen, dass die jeweiligen Asymptotenlinien von  $S$  und  $S'$  sich stets entsprechen.

Nach JONAS ergibt sich:<sup>(2)</sup>

$$(1) \quad ds^2 = v^2 du^2 + 2v U' du dv + 2(U + V) dv^2.$$

So folgt aus (A)

$$(2) \quad v = 0, \quad (3) \quad 2(U + V) = U'^2, \quad (4) \quad \xi_u + \xi_{uv} = 0,$$

wo  $\xi$  die Gleichung von  $S$  ist.

Wenn (2) besteht, so ist  $\xi = \phi(u)$  nach

$$\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{v}, \quad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0 \quad \text{und} \quad \xi_{uv} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \xi_u + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \xi_v - D' \xi.$$

Aus (3) folgt

$$(5) \quad G = \text{const} \cdot e^u.$$

Aus (4) ergibt sich

(1) NAKAJIMA, S.: Über zwei Flächen, welche eine Beziehung haben, Tôhoku Math. Journ. Vol. 30 (1928) p. 142.

(2) JANAS, H.: Über eine neue geometrische Eigenschaft der Bianchischen Transformation der auf die Mittelpunktsflächen zweiten Grades abwickelbaren Flächen, Math. Ann. 99 (1928) S. 435.

$$(6) \quad \xi = \frac{\{f(v) e^v dv + \text{const.}\}}{e^u}$$

## § 14

Wenn die Punktgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + U_1 V_1' \frac{\partial \theta}{\partial u} + U_1' V_1 \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0$$

besteht, so sind die Tangenten zu den parametrischen Kurven auf der Fläche Ribaucours Kongruenz, wo  $U_1$  und  $V_1$  eine Funktion von  $u$  bzw.  $v$  allein und

$$(2) \quad V' = \frac{dV}{dv}, \quad U' = \frac{dU}{du}$$

ist.

Vergleichen wir (1) mit (A), so folgt

$$(3) \quad U_1 V_1' = \frac{\sigma}{\lambda}, \quad U_1' V_1 = \frac{1}{\lambda}.$$

Aus (3) folgt

$$(4) \quad \log U_1^\sigma = \log V_1,$$

wo  $\sigma$  konstant ist.

Aus (4) ergibt sich

$$(5) \quad U_1^\sigma = V_1 = \text{const.},$$

so folgt  $\sigma = 0$ ,  $\lambda = \infty$ .

Aus (A) ergibt sich  $\xi_{uv} = 0$ , d. h. unsere Fläche ist eine Translationsfläche.

So folgt der

**Satz:** Wenn (A) in (1) zu reduzieren und  $\sigma$  eine Konstante ist, so bildet unsere Fläche eine Translationsfläche.

## § 15

Wenn zwischen einem Paar von  $n$  linear unabhängigen Integralen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ;  $y_1, y_2, \dots, y_n$  einer linearen partiellen Laplaceschen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial \theta}{\partial u} + b \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

wo  $a, b, c$  die Funktionen von  $u, v$  sind, eine Beziehung besteht, die in der folgenden Normalform angenommen werden soll:

$$(2) \quad \sum_{v=1}^n x_v^n - \sum_{v=1}^n y_v^n = 0$$

und aus der durch Differentiation die beiden Gleichungen

$$(2a) \quad \begin{aligned} \sum_{v=1}^n x_v^{n-1} \frac{\partial x_v}{\partial u} - \sum_{v=1}^n y_v^{n-1} \frac{\partial y_v}{\partial u} &= 0, \\ \sum_{v=1}^n x_v^{n-1} \frac{\partial x_v}{\partial v} - \sum_{v=1}^n y_v^{n-1} \frac{\partial y_v}{\partial v} &= 0 \end{aligned}$$

folgen, so besteht zwischen den  $x_v$ ,  $y_v$  ausserdem noch die Gleichung

$$(2b) \quad \sum_{v=1}^n x_v^{n-2} \frac{\partial x_v}{\partial v} \frac{\partial x_v}{\partial v} - \sum_{v=1}^n y_v^{n-2} \frac{\partial y_v}{\partial u} \frac{\partial y_v}{\partial v} = 0.$$

Aus (1), (2a) ergibt sich

$$(3) \quad \sum_{v=1}^n x_v^{n-1} \frac{\partial x_v}{\partial u} \frac{\partial x_v}{\partial v} - \sum_{v=1}^n y_v^{n-1} \frac{\partial y_v}{\partial u} \frac{\partial y_v}{\partial v} = 0,$$

und abderseits durch Differentiation der ersten Gleichung (2a) nach  $v$ :

$$(4) \quad \begin{aligned} \sum_{v=1}^n x_v^{n-1} \frac{\partial^2 x_v}{\partial u \partial v} - \sum_{v=1}^n y_v^{n-1} \frac{\partial^2 y_v}{\partial u \partial v} + \\ + (n-1) \left\{ \sum_{v=1}^n x_v^{n-2} \frac{\partial x_v}{\partial u} \frac{\partial x_v}{\partial v} - \sum_{v=1}^n y_v^{n-2} \frac{\partial y_v}{\partial u} \frac{\partial y_v}{\partial v} \right\} = 0, \end{aligned}$$

womit das Bestehen der Gleichung (2b) bewiesen ist.

Also folgt der

**Satz:** Sind  $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n$  zwei Paare von linear unabhängigen Integralen einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (1), wo (2) besteht, dann besteht (2b) auch.



# ÜBER FLÄCHEN UND KURVEN (IX):

## Eilinien und Eiflächen

Sôji MATSUMURA

### (1)

Wenn sich zwei Ebenekurven  $K, \bar{K}$  in  $R_2$  in einem Punkt  $P$  berühren, so haben  $K, \bar{K}$  eine gemeinsame Normale.

Aber Affinnormale von  $K, \bar{K}$  sind im allgemeinen verschieden, so kann man setzen:

$$(1) \quad \tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds}, \quad \tan \bar{\varphi} = \frac{1}{3} \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{s}},$$

wo  $\varphi, \bar{\varphi}$  die Deviation von  $K$  bzw.  $\bar{K}$  sind.<sup>(1)</sup>

Nun betrachten wir  $\tan(\varphi - \bar{\varphi})$ , so folgt

$$(2) \quad \begin{aligned} \tan(\varphi - \bar{\varphi}) &= \frac{\tan \varphi - \tan \bar{\varphi}}{1 + \tan \varphi \tan \bar{\varphi}} \\ &= \frac{3 \left( \frac{d\rho}{ds} - \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{s}} \right)}{9 + \frac{d\rho}{ds} \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{s}}}, \end{aligned}$$

so folgt der

**Satz:** Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Deviationen einander gleich sind, ist die

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{s}}$$

Wir denken uns nun

$$(3) \quad \tan \theta = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds}.$$

wieder, so folgt

$$(4) \quad \frac{\delta \rho}{\delta s} - \frac{d\rho}{ds} = \frac{\delta \bar{\rho}}{\delta \bar{s}} - \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{s}},$$

---

(1) MATSUMURA, S.: Über einen affingeo Satz und die Deviation ebener Kurven, Tôhoku Math. Journ. 36 (1933) p. 189.



wenn

$$(5) \quad \tan \theta = \tan \bar{\theta}.$$

1st

$$(6) \quad \begin{cases} \bar{s} = \psi(s, \rho) \\ \bar{\rho} = \rho(s, \rho) \end{cases}$$

so folgt

$$(7) \quad \frac{\delta \bar{\rho}}{\delta \bar{s}} - \frac{d \bar{\rho}}{d \bar{s}} = \frac{\varphi_s + \varphi_\rho \frac{\delta \rho}{\delta s}}{\psi_s + \psi_\rho \frac{\delta \rho}{\delta s}} - \frac{\varphi_s + \varphi_\rho \frac{d \rho}{d s}}{\psi_s + \psi_\rho \frac{d \rho}{d s}} \\ = \frac{(\varphi_\rho \psi_s - \varphi_s \psi_\rho) \left( \frac{\delta \rho}{\delta s} - \frac{d \rho}{d s} \right)}{\left( \psi_s + \psi_\rho \frac{\delta \rho}{\delta s} \right) \left( \psi_s + \psi_\rho \frac{d \rho}{d s} \right)}.$$

Aus (5) ergibt sich

$$(8) \quad 1 = \frac{\varphi_\rho \psi_s - \varphi_s \psi_\rho}{\left( \psi_s + \psi_\rho \frac{\delta \rho}{\delta s} \right) \left( \psi_s + \psi_\rho \frac{d \rho}{d s} \right)}.$$

Wenn (8) von

$$\frac{\delta \rho}{\delta s}, \quad \frac{d \rho}{d s}$$

unabhängig ist, so folgt

$$(9) \quad \psi_\rho = 0, \quad \varphi_\rho = \psi_s \quad \text{wo} \quad \psi_s \neq 0.$$

Aus (9) ergibt sich

$$\psi = \psi(s), \quad \varphi = \psi'(s) \rho + x(s).$$

## (2)

In dieser Note möchte ich die Arbeit<sup>(1)</sup> von TAKASU mit meiner Arbeit<sup>(2)</sup> vergleichen und dadurch seinen Satz in eine etwas modifizierte Form setzen.

(1) TAKASU, T.: Natural Equations of Curves under Circular Pointtransformation Groups and their Duals, I, Japanese Journ. of Math. Vol. I (1924) p. 54.

(2) MATSUMURA, S.: Über einen affingometrischen Satz von Herrn Prof. T. KUBOTA und die Deviation ebener Kurven, Tôhoku Math. Journ. Vol. 36 (1933) p. 189.

Bezeichnet man nämlich die Gleichung der Ebenenkurve mit,

$$\varphi = \varphi(s),$$

wo  $\varphi$  die Deviation<sup>(2)</sup> und  $s$  die Kurvenlänge bedeuten, so wann man die Gleichung

$$\begin{aligned} & -\frac{r \left\{ 6 \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} \frac{d\varphi}{ds} + \frac{3}{\cos^2 \varphi} \frac{d^2 \varphi}{ds^2} \right\}}{3 \tan \varphi} + \frac{1}{3r \tan \varphi} \\ & - \frac{9 \sec^2 \varphi \frac{d\varphi}{ds}}{6 \tan \varphi} + \frac{5r \left( 3 \sec^2 \varphi \frac{d\varphi}{ds} \right)^2}{4 (3 \tan \varphi)^3} + \\ & + \frac{3 \tan \varphi}{4r} = \phi(p) \end{aligned}$$

als die natürliche von Ebenen kurve unter zweidimensionalen Laguerreschen Transformationen bezeichnen, wo  $\phi(p)$  stetige differenzierbare Funktion und

$$dp = \sqrt{3 \frac{\tan \varphi}{r}} ds$$

$r$  Krümmungsradius sind.

### (3)

Es seien drei Eilinen in  $R_2$  gegeben, deren Gleichungen sind:

$$(1) \quad p = p(u),$$

$$(2) \quad q = q(v),$$

$$(3) \quad r = r(w),$$

wo  $p, q, r$  die Stützfunktionen sind.

Die drei Tangenten zu den Eilinen (1), (2) bzw. (3), gegeben durch die Gleichungen

$$(4) \quad x \cos u + y \sin u - p(u) = 0,$$

$$(5) \quad x \cos v + y \sin v - q(v) = 0,$$

$$(6) \quad x \cos w + y \sin w - r(w) = 0,$$

in denen zunächst  $p, q, r$  drei verschiedene Funktionen sein dürfen, gehen dann und nur dann durch einen Punkt, wenn die Determinante

$$(7) \quad D \equiv p \sin(w - v) + q \sin(u - w) + r \sin(v - u)$$

gleich Null ist.

Wenn die Winkel zwischen (4), (5) und (5), (6) einander gleich sind, so folgt aus (7)

$$(8) \quad p + r = 2q \cos \alpha,$$

wo

$$(9) \quad \alpha = v - u = w - v = (w - u) \div 2$$

sind.

In (8) kann man wissen, dass

$$(10) \quad \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}} + \frac{\bar{\bar{\rho}}}{\bar{\bar{\rho}}} = 2 \cos \alpha$$

$$(11) \quad \frac{\bar{b}}{\bar{b}} + \frac{\bar{\bar{b}}}{\bar{\bar{b}}} = 2 \cos \alpha$$

sind, wobei  $\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}}, \bar{\bar{\bar{\rho}}}$  die Krümmungshalbmesser von (1), (2) bzw. (3) und  $\bar{b}, \bar{\bar{b}}, \bar{\bar{\bar{b}}}$  die Breiten von (1), (2) bzw. (3) sind.

Aus (10), (11) folgt der

**Satz 1:** In unserem Falle ist die Summe der Relativenkrümmungsradii von erster- und dritter Eilinie zur zweiten Eilinie konstant.

**Satz 2:** In unserem Falle ist die Breite der Relativenbreiten von erster- und dritter Eilinie zur zweiten Eilinie konstant.

Aus (8) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \oint \{p^2 - p'^2\} d\theta + \frac{1}{2} \oint \{r^2 - r'^2\} d\theta + \oint \{pr - p'r'\} d\theta \\ = 4 \cos^2 \alpha \cdot \frac{1}{2} \oint \{q^2 - q'^2\} d\theta, \end{aligned}$$

$$\text{d. h.} \quad F_1 + F_2 + 2F_{12} = 4 \cos^2 \alpha \cdot F_3,$$

wobei  $F_1, F_2, F_3$  den Flächeninhalt von (1), (2) bzw. (3) und  $F_{12}$  den gemischten Flächeninhalt von (1) und (2) bedeuten.

#### (4)

Wir definieren in der relativen Differentialgeometrie<sup>(1)</sup> die relative Deviation  $\Phi$  der  $\xi$  bezüglich  $\epsilon$  mit

$$(1) \quad \tan \Phi = \frac{\tan \varphi}{\tan \bar{\varphi}},$$

wo  $\varphi, \bar{\varphi}$  die gewöhnliche Deviation<sup>(2)</sup> ebener Eilinie  $\xi$  bzw.  $\epsilon$  bedeuten.

So folgt aus (1)

(1) Vergl. Süß, W.: Zur relativen Differentialgeometrie (I), Japanese Journ. of Math. Vol. IV (1929) p. 57.

(2) MATSUMURA, S.: Über einen affingeometrischen Satz und die Deviation ebener Kurven, Tôhoku Math. Journ. Vol. 36 (1933) p. 189.

$$(2) \quad \tan \varphi = \frac{d\bar{\rho}(\xi)}{d\bar{s}(\xi)} \bigg/ \frac{d\bar{\rho}(\epsilon)}{d\bar{s}(\epsilon)} \\ = \frac{d\rho(\xi)}{d\bar{\rho}(\epsilon)}$$

Aus (2) folgt der

**Satz:** Wenn

$$\bar{\rho}(\xi) = \text{const.} \quad \bar{\rho}(\epsilon) = \text{const}$$

ist, so ist unsere R.-Deviation konstant.

### (5)

Mit elementar geometrischer Methode kann man den folgenden Satz beweisen:

**Satz 1:** Zwei Berührungspunktsehn in einer Eilinie  $E$  seien immer einander gleich. Wenn zwei Winkel zwischen zwei Tangenten einander gleich sind, so muss  $E$  ein Kreis sein.<sup>(1)</sup>

Aus meiner Arbeit<sup>(2)</sup> ergibt sich der

**Satz 2:** Zwei Berührungspunktsehn in einer Eilinie  $E$  seien einander immer gleich. Wenn zwei Inhalte zwischen zwei Tangenten und der Eilinie einander gleich sind, so muss  $E$  ein Kreis sein.<sup>(2)</sup>

**Satz 3:** Zwei Berührungspunktsehn und  $E$  (Seite von Tangenten) seien immer einander gleich. Wenn zwei Winkel zwischen zwei Tangenten einander gleich sind, so muss  $E$  ein Kreis sein.<sup>(3)</sup>

**Satz 4:** Zwei Sehnen seien immer einander gleich. Wenn zwei Sektoren einander gleich sind, so muss  $E$  ein Kreis sein.<sup>(4)</sup>

**Satz 5:** Zwei Sehnen, die die Randkurve von  $E$  halbieren, seien immer einander gleich, so muss  $E$  ein Kreis sein.

### (6)

Nehmen wir die Punkte  $P$  und  $P^*$  auf den Kurven  $C$  und  $C^*$  auf jeder wie

$$(1) \quad \widehat{op} = \widehat{op^*} = s$$

längs jeder Kurve, wo  $o$  der Berührungspunkt von den zwei Kurven  $C$  und  $C^*$  sind.

(1) AIHARA, Y.: On some characteristic Properties of Curves and Surfaces, Nippon Sugakubuturigakkai Si, Vol. 8, No. 1 (1934) p. 50.

(2) NAKAJIMA, S.: On some characteristic Properties of Curves and Surfaces, Tôhoku Math. Journ. Vol. 18 (1920), p. 280, §12.

(3) l.c. (2) p. 278, §9.

(4) l.c. (3).

Nach LIPKA<sup>(1)</sup> ist

$$(2) \quad K(C, C^*) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2\sigma}{s^2}$$

die relative Krümmung von  $C$  und  $C^*$ , wo

$$(3) \quad \widehat{pp^*} = \sigma$$

ist.

Dann kann man setzen<sup>(1)</sup>:

$$(4) \quad [K(C, \bar{C})]^2 = g_{mn} (K^m - \bar{K}^m)(K^n - \bar{K}^n).$$

Man kann (4) in der Form<sup>(2)</sup>

$$(5) \quad [K(C, \bar{C})]^2 = (y_1^1 - y_2^1)^2 + (y_1^2 - y_2^2)^2 + (y_1^3 - y_2^3)^2$$

setzen, wo

$$(6) \quad \begin{cases} y_1^r = \alpha_m'^r K^m, & y_2^r = \alpha_n'^r \bar{K}^n, \\ g_{mn} = \alpha_m'^1 \alpha_n'^1 + \alpha_m'^2 \alpha_n'^2 + \alpha_m'^3 \alpha_n'^3 = \alpha_m'^r \alpha_n'^r \end{cases}$$

Aus (4) folgt

$$(7) \quad \bar{g}_{mn} (\bar{K}^m - \bar{K}^m)(\bar{K}^n - \bar{K}^n) = g_{mn} (K^m - \bar{K}^m)(K^n - \bar{K}^n),$$

weil  $K$  invariant ist.

### (7)

$$(1) \quad F(x^I, x^{II}, \dots, x^{(n)}) = \text{const.}$$

bezeichnen die Kurvenpaare im  $R_n$ , wo  $x^{(i)}$  die Kugeln im  $R_n$  sind. Nun setzen wir

$$(2) \quad \frac{dx^I}{\lambda^1} = \frac{dx^{II}}{\lambda^2} = \dots = \frac{dx^{(n)}}{\lambda^n}.$$

Wenn

$$(3) \quad \frac{dx^I}{F^1} = \frac{dx^{II}}{F^2} = \dots = \frac{dx^{(n)}}{F^n},$$

wo

$$(4) \quad \begin{cases} F' = g^{rm} F_m, & F_m = \frac{\partial F}{\partial x^m}, \\ \lambda^r = \frac{F^r}{(g^{mn} F_m F_n)^{\frac{1}{2}}}, \\ (g^{mn} F_m F_n)^2 \lambda_r \lambda^r = (F_{r1} g^{mn} F_m F_n - F_r g^{mn} F_m F_n) \cdot F^r. \end{cases}$$

(1) Bull. Amer. Math. Soc., 29 (1923), p. 345.

(2) SYNGE, J. L.: On the Geometry of Dynamics, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, Vol. 226, p. 39.

Betrachten wir hier

$$(5) \quad F_{rs} F^s \cdot g^{mn} F_m F_n - F_r \cdot g^{mn} F_{ms} F^s F_m = 0,$$

so folgt

$$(6) \quad \frac{F_{rm} F_m}{F_r} = \frac{g^{mn} F_{ms} F^s F_n}{g^{mn} F_m F_n},$$

d. h.

$$(7) \quad \frac{F_{rm} F_m}{F_r} = \frac{F_{sm} F_m}{F_s} = \frac{g^{ns} F_n F_{sm} F^m}{g^{ns} F_n F_s},$$

so folgt<sup>(1)</sup> der

**Satz:** Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass (5) bestehen in:

$$F(x^1, x^1, \dots, x^{(n)}) = \text{const.},$$

ist (6), wo

$$F_r = \frac{\partial F}{\partial x^r}, \quad F_{rs} = \frac{\partial F_r}{\partial x^s} - \left\{ \begin{matrix} rs \\ u \end{matrix} \right\} F_u.$$

ist.

(8)

Wir betrachten uns nun eine Eillinie  $\Gamma$  und eine Sehne  $s$  durch die Gegenpunkte.

Die Gleichung von  $\Gamma$  ist

$$\varphi = \varphi(\varphi).$$

Wenn  $s$  immer die Affindoppelnormale ist, so folgt aus

$$(1) \quad \tan \varphi = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{ds},$$

$$(2) \quad \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)_{\varphi - \varphi} = \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)_{\varphi - \varphi + \pi}.$$

Setzen wir

$$(3) \quad \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)_{\varphi - \varphi} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos K\varphi + b_k \sin K\varphi),$$

so folgt aus (2) und (3)

$$(4) \quad a_{2K+1} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Aus (3) und (4) ergibt sich:

(1) Vergl. SYNGE, J. L.: On the Geometry of Dynamics, philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, Vol. 226, p. 39.

$$(5) \quad \frac{d\rho}{ds} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \{a_{2\lambda} \cos (2\lambda + 1) \varphi + b_{2\lambda} \sin (2\lambda + 1) \varphi\},$$

Aus (5) und

$$(6) \quad \begin{cases} \rho(\varphi) = \rho(\varphi) + \rho''(\varphi), \\ ds = \{\rho(\varphi) + \rho''(\varphi)\} d\varphi \end{cases}$$

ergibt sich

$$(7) \quad \rho \equiv \rho(\varphi) + \rho''(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \{a_{2\mu} \cos (2\mu + 1) \varphi + b_{2\mu} \sin (2\mu + 1) \varphi\},$$

so folgt der

**Satz:** Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Affinnormale durch die Gegenpunkte besteht, ist die

$$(8) \quad \rho(\varphi) = \rho(\varphi + \pi).$$

Die Gerade durch zwei Berührungspunkte der zueinander parallelen Tangenten einer Eilinie  $\Gamma$  sei die Affindoppelsehne und zugleich die Strecke zwischen zwei Berührungspunkten konstant, so folgt aus (8) und meiner Arbeit<sup>(1)</sup> muss  $\Gamma$  ein Kreis sein, denn aus

$$(9) \quad \begin{cases} \rho(\varphi) + \rho(\varphi + \pi) = \text{const.}, \\ \rho(\varphi) = \rho(\varphi + \pi) \end{cases}$$

ergibt sich

$$(10) \quad \rho(\varphi) = \text{const.},$$

Nehmen wir einen Punkt 0 in  $\Gamma$  als den Ursprung von Koordinaten. Wenn alle Affinnormalen auf den Randpunkten von  $\Gamma$  durch einen Punkt 0 immer hingehen, so folgt

$$(11) \quad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds} = \frac{1}{3} \frac{d\rho d\theta}{d\varphi ds} = \frac{1}{3} \frac{\rho' + \rho'''}{\rho + \rho''}.$$

Aus (11) ergibt sich

$$(12) \quad \rho^3 = \rho + \rho'',$$

so folgt<sup>(2)</sup>

$$(13) \quad \rho' = \pm \sqrt{\left(\frac{\rho^4}{2} - \rho^2\right) + C_1}$$

wo  $C_1$  eine Konstante ist.

(13) muss ein zentrischer Kegelschnitt sein.<sup>(3)</sup>

(1) NAKAJIMA, S.: On some characteristic Properties of Curves and Surfaces, Tôhoku Math. Journ. Vol. 18 (1920) p. 280.

(2) HAYASHI, T.: Differential equations, Ôkurashoten, Tokyo, p. 155.

(3) OKADA, TAKAMI, KOJIMA: Affine geometry, Kyoritsu-sha (I) p. 17.

$$(14) \quad \rho = \rho(\varphi) + \delta$$

bezeichnet eine parallele Eilinie zu

$$(15) \quad \rho = \rho(\varphi)$$

Wenn in den Gegenpunkten von (14), (15) die Affinnormalen zueinander parallel sind, so ergibt aus

$$(16) \quad \tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds};$$

$$\frac{\rho' + \rho'''}{\rho + \rho''} = \frac{\rho' + \rho'''}{\rho + \delta + \rho''}$$

Aus (16) ergibt sich

$$\delta = 0.$$

Man kann (8) in einer Raumkurve verallgemeinern, denn

$$(17) \quad \tan \omega = \frac{1}{3} R'$$

bestehen.<sup>(4)</sup>

### (9)

Nehmen wir einen Punkt  $O$  auf einer Ebenenkurve.

Ziehen wir eine Tangente  $OY$  an  $O$  und eine Normale  $OX$  zu der Kurve. Bezüglich des rechtwinkligen Koordinatensystems  $OX, OY$  ist die Gleichung der Affinnormalen

$$(1) \quad Y = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds} X.$$

Nehmen wir einen Punkt  $A$  auf  $OX$ .

Ziehen wir  $AB$  parallel zu  $OY$ , wo  $B$  der Schnittpunkt von  $AB$  und  $ON$  ist.

So folgt

$$(2) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{AO \cdot AB}{OA^2} = \frac{1}{6} \frac{d\rho}{ds}.$$

Wenn

$$OA = \rho$$

ist, so folgt

$$(3) \quad AB = \frac{1}{3} \rho \frac{d\rho}{ds} = \frac{1}{3} \rho_1 = \frac{3}{2} \frac{d(\rho^2)}{ds},$$

(4) LEHMANN, P.: Über ein System von Fundamentalgrößen dritte Ordnung in der Flächentheorie, Sitzungs-berichten der Kaiserl. Akad. der Wiss. in Wien, Bd. 126 (1917) S. 25.



wo  $\rho^1$  der Krümmungshalbmesser der Evolute der gegebenen Kurve ist.

**Satz:** *Durch den Krümmungsmittelpunkt ziehen wir senkrechte Gerade zu der gewöhnlichen Normale, dann ist die Strecke zwischen dem Schnittpunkt und dem Krümmungsmittelpunkt gleich  $\frac{1}{3}$  Radius von der Evolute der gegebenen Kurve.*

Der Inhalt dieses Dreieckes ist gleich

$$(4) \quad \frac{1}{6} \rho^2 \frac{d\rho}{ds}.$$

Nehmen wir die Punkte  $T, S$  auf  $OX$  und  $ON$  so, dass

$$\overline{OT} = \rho,$$

$$\overline{OS} = r,$$

ist, wo  $\rho, r$  der Krümmungshalbmesser und Affinkrümmungshalbmesser von  $\Gamma$  sind.

Der Inhalt von  $OST$  ist mit

$$(5) \quad \frac{1}{2} r \rho \frac{\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2}{\sqrt{9 + \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2}}$$

gegeben, da

$$(6) \quad \tan \widehat{TOS} = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds}$$

ist.

Wenn  $AB = O$  in (20) ist, so muss unsere Kurve ein Kreis sein.

Wenn

$$AB = \text{constant}$$

in (20) ist, so folgt

$$(7) \quad \rho^2 = as + b,$$

wo  $a, b$  zwei Konstanten sind.

(7) bezeichnet Kreisevolventen-Cycloidalenkurven.

(10)

Es sei

$$(1) \quad f(x, y) = 0$$

die Gleichung einer analytischen Kurve ( $M$ ), die ein konvexes Oval bildet, und es sei ferner  $\varphi$  der Winkel der äusseren Normale gegen die  $X$ -Achse.

Es sei weiter mit  $\rho$  der durchweg positiv gerechnete Krümmungs-

radius von  $(M)$  im Punkte  $x, y$  bezeichnet; dann bestehen für die Punkte von  $(M)$  die

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{d\varphi} = -\rho \sin \varphi, \\ \frac{dy}{d\varphi} = \rho \cos \varphi. \end{cases}$$

Spezialisieren wir die Lage des Koordinatensystems dahin, dass die  $X$ -Ache  $(M)$  im Punkte  $x=0$  berührt und daher  $\varphi = -\pi/2$  ist, so hat der im Koordinatenursprunge  $(M)$  fünfpunktig berührende Kegelschnitt eine Gleichung von der Form<sup>(1)</sup>

$$(3) \quad y = \frac{1}{2} (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2).$$

Der Mittelpunkt  $V$  von (3) ist

$$(4) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{B-A}, \\ y = \frac{A}{(A-B)B} \end{cases}$$

wo

$$A = \frac{1}{\rho}; \quad B = -\frac{\rho_1}{3\rho^2}; \quad C = \frac{9\rho^2 + 5\rho_1^2 - 3\rho\rho_2}{9\rho^3};$$

$$\rho_1 = \frac{d\rho}{ds}.$$

Setzen wir

$$\phi = \angle(OV, Oy),$$

so folgt

$$\tan \phi = -\frac{\rho_1}{3\rho} = -\frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds}.$$

Also ergibt sich der

**Satz:** Die Richtung von einem Punkt  $P$  von  $F$  zu dem Mittelpunkt ist die Affinnormale in  $P$ .

Aus diesem Satz kann man den folgenden beweisen.

**Satz:** Nehmen wir einen Punkt  $P$  auf  $\Gamma$  und ziehen eine Sehne  $S$  parallel zu der Tangente  $T$  an  $P$  zu  $\Gamma$ .

Wenn  $S$  nahe  $T$  ist, so sollen die Strecken zwischen  $\Gamma$  und Berührungskegelschnitt einander gleich sein.

In  $\triangle OST$  bestehen

(1) BÖHMER, P.: Über elliptischkonvexe Ovale, Math. Ann. 60 (1905) S. 256.

$$\tan \angle SOT = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds},$$

$$\tan \angle STO = \frac{r \frac{d\rho}{ds}}{3r - \rho \sqrt{9 + \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2}},$$

$$\tan \{\pi - \angle OST\} = \frac{3 \frac{d\rho}{ds} r - \frac{d\rho}{ds} \left(3 - \rho \sqrt{9 + \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2}\right)}{3 \left(3r - \rho \sqrt{9 + \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2}\right) - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 r}$$

Wenn

$$3r = \rho \sqrt{9 + \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2},$$

ist, so ist  $TS$  parallel zu der Tangente an  $O$  zu der Kurve.

Wenn

$$\frac{d\rho}{ds} = 0, \quad \text{oder} \quad r = 0,$$

ist, so ist  $TS$  senkrecht zu der Tangente an  $O$  zu der Kurve.

Es ist nützlich, dass man der Gleichung einer Schar von parallelen Kurven immer die Form geben kann:

$$(5) \quad s = \int \frac{f(\rho + a)}{\rho + a} \rho \, d\rho,$$

indem man die Funktion  $f$  in geeigneter Weise bestimmt.<sup>(1)</sup> Aus (5) ergibt sich

$$\tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds} = \frac{1}{3} \frac{\rho + a}{f(\rho + a)} \rho.$$

Setzen wir

$$\rho = \rho_0 + s \left(\frac{d\rho}{ds}\right)_0 + \frac{s^2}{2} \left(\frac{d^2\rho}{ds^2}\right)_0 + \frac{s^3}{6} \left(\frac{d^3\rho}{ds^3}\right)_0 + \dots,$$

so folgt

$$\rho = \rho_0 + 3s (\tan \varphi)_0 + \frac{(3s)^2}{2} \left(\frac{d \tan \varphi}{ds}\right)_0 + \frac{(3s)^3}{6} \left(\frac{d^2 \tan \varphi}{ds^2}\right)_0 + \dots$$

(11)

$P\bar{N}$ ,  $PN$  seien zwei Affinenormalen und  $Px$  gewöhnliche Normalen in

(1) KOWALEWSKI, G.: CÉSARO, E.: Vorlesungen über natürliche Geometrie (1926) S. 33.

$P$  in (1).

Nehmen wir einen Punkt  $X$  auf  $Px$  und ziehen eine Gerade  $XN\bar{N}$  senkrecht zu  $Px$ , wo  $N, \bar{N}$  die Schnittpunkte von  $XN\bar{N}$  mit  $O\bar{N}$  sind, so folgt

$$N\bar{N} = \frac{1}{3} \left( \frac{d\bar{\rho}}{ds} - \frac{d\rho}{ds} \right) \cdot PX,$$

$$\frac{\Delta PNN}{P\bar{X}^2} = \frac{1}{6} \left( \frac{d\bar{\rho}}{ds} - \frac{d\rho}{ds} \right).$$

Haben wir vier Kurven  $K_1, K_2, K_3, K_4$  in (1), so ergibt sich:

$$\tan \varphi_1 = \frac{1}{3} \frac{d\rho_1}{ds}, \quad \tan \varphi_2 = \frac{1}{3} \frac{d\rho_2}{ds}, \quad \tan \varphi_3 = \frac{1}{3} \frac{d\rho_3}{ds}, \quad \tan \varphi_4 = \frac{1}{3} \frac{d\rho_4}{ds}.$$

Besteht

$$\tan \varphi_1 : \tan \varphi_2 = \tan \varphi_3 : \tan \varphi_4$$

zwischen  $\varphi_i$ , so folgt

$$\frac{d\rho_1}{ds} : \frac{d\rho_2}{ds} = \frac{d\rho_3}{ds} : \frac{d\rho_4}{ds}.$$

(12)

Betrachten wir eine Eilinie ( $\alpha$ )  $p = p(\varphi)$  in  $R_2$ , wo  $p, \varphi$  polare Tangentenkoordinaten sind.<sup>(1)</sup>

Nun betrachten wir andere Eilinie ( $\beta$ ), deren Gleichung ist:

$$p = p(\varphi) + p(\varphi + \pi)$$

so ergibt sich aus einem Satz von Hayashi<sup>(2)</sup> der folgende **Satz**.

**Satz:** Die Stelle der extremalen Chorde von ( $\alpha$ ) ist der Stelle der extremalen Chorde von ( $\beta$ ) gleich und geht durch einen festen Punkt, denn nach Hayashi besteht für die extremale Stelle  $\varphi_1$ :

$$\begin{aligned} p'(\varphi_1) + p'(\varphi_1 + \pi) &= 0, \\ P = p'(\varphi_1) &= -p'(\varphi + \pi). \end{aligned}$$

In Süß's Arbeit<sup>(3)</sup> nehmen wir  $\varphi$  als  $p = p(\varphi)$  und  $\varphi$  als  $p = p(\varphi) + p(\varphi + \pi)$ , dann ergibt sich

$$r = \frac{p(\varphi) + p(\varphi + \pi)}{p(\varphi)},$$

(1) JORDAN, C. et FIEDLER, R.: Contribution a L'étude des Courbes Convexes Fermées et de certaines Courbes qui s'y Rattachent, 1912.

(2) HAYASHI, T.: The extremal chords of an Oval, Tôhoku Math. Journ. Vol. 22 (1923) p. 290.

(3) SÜSS, W.: Zur relativen Differentialgeometrie: I, Japanese Journ. of Math. IV (1927) p. 57.

$$\rho = \frac{\bar{\rho}(\varphi) + \bar{\rho}(\varphi + \pi)}{\bar{\rho}(\varphi)}.$$

Wenn  $\rho' = 0$ , so folgt

$$\rho(\varphi) = \rho(\varphi + \pi)$$

Nun

$$\begin{aligned} [\text{Inhalt von } (\beta)] &= \oint [\{p(\varphi) + p(\varphi + \pi)\}^2 - \{p'(\varphi) + p'(\varphi + \pi)\}^2] d\varphi \\ &= [\text{Inhalt von } (\alpha)] + G, \end{aligned}$$

wo

$$G = \oint \{p(\varphi)p(\varphi + \pi) - p'(\varphi)p'(\varphi + \pi)\} d\varphi,$$

so kann man haben:

$$\pi [\text{Inhalt von } (\alpha) + G] \leq [\text{Umfang von } (\alpha)]/2.$$

(13)

Wir betrachten eine Eilinie  $(\alpha)$ :

$$p = p(\theta),$$

wo  $p, \theta$  polare Tangentenkoordinaten sind.

Nun betrachten wir vier umschriebene rechtwinklige Seiten, deren Gleichungen

$$p = p(\theta), \quad p = p\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \quad p = p(\theta + \pi), \quad p = p\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right)$$

sind.

Betrachten wir die Schnittpunkte

$$p = p(\theta), \quad p = p\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right); \quad p = p\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \quad p = p(\theta + \pi); \quad p = p(\theta + \pi),$$

$$p = p\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right); \quad p = p\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right), \quad p = p(\theta)$$

bzw. mit

$$P, Q, R, S.$$

Wenn wir von einem festen Punkt  $O$  in  $(\alpha)$  zu  $PQ, QR, RS, SP$  vier Lote  $OP', OQ', OR', OS'$  ziehen und

$$\overline{P'P} = \overline{Q'R} = \overline{R'S} = \overline{S'P}$$

ist, so folgt

$$\frac{\left[p\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - p(\theta) \cos \frac{\pi}{2}\right]^2}{\sin^2 \frac{\pi}{2}} = \frac{\left[p(\theta + \pi) - p\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \cos \frac{\pi}{2}\right]^2}{\sin^2 \frac{\pi}{2}} = \dots$$

$$\rho(\theta) = \rho\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \rho(\theta + \pi) = \rho\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right),$$

d. h. (α) muss eine konvexe geschlossene Kurve mit Periode  $\pi/2$  haben, denn im allgemeinen besteht

$$\overline{P}P^2 = \frac{[\rho(\theta + \delta) - \rho(\theta) \cos \delta]^2}{\sin^2 \delta},$$

wenn  $P$  der Schnittpunkt von

$$\rho = \rho(\theta)$$

und

$$\rho = \rho(\theta + \delta)$$

ist

(14)

Betrachten wir drei Eilinen

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \rho = \rho_1(\varphi), \quad \rho = \rho_2(\varphi),$$

die in einer Beziehung

$$(1) \quad (l_1 + l_2) \rho = l_1 \rho_1 + l_2 \rho_2$$

haben, wo  $l_1, l_2$  zwei skalare Grössen sind.

Aus (1) ergibt sich:

$$(2) \quad l_1^2 F_1 + 2l_1 l_2 F_{12} + l_2^2 F_2 = (l_1 + l_2)^2 F,$$

wo  $F, F_1, F_2$  der Inhalt von  $\rho = \rho(\varphi), \rho = \rho_1(\varphi), \rho = \rho_2(\varphi)$  und  $F_{12}$  der gemischte Inhalt von  $\rho = \rho_1(\varphi), \rho = \rho_2(\varphi)$  ist.

Aus (2) folgt

$$(3) \quad l_1^2 (F_1 - F) + 2l_1 l_2 (F_{12} - F) + l_2^2 (F_2 - F) = 0$$

Damit (3) für reelle Werte  $l_1, l_2$  existiere, erhalten wir

$$(4) \quad (F_{12} - F)^2 \geq (F_1 - F)(F_2 - F),$$

d. h.

$$(5) \quad \frac{F_{12}^2 - F_1 F_2}{2F_{12} - F_1 - F_2} \geq F.$$

(15)

Setzen wir

$$\rho = l_1 \rho_1 + l_2 \rho_2 + \dots + l_n \rho_n,$$

wo  $\rho = \rho(\varphi), l_i$  Konstanten sind.

So folgt

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2} \int \{p^2 - p'^2\} d\varphi \\
&= \frac{1}{2} \int \{[l_1 p_1 + l_2 p_2 + \dots]^2 - [l_1 p_1' + l_2 p_2' + \dots]^2\} d\varphi \\
&= \sum l_i^2 \left( \frac{1}{2} \int \{p_i^2 - p_i'^2\} d\varphi \right) \\
&\quad + 2 \sum l_i l_k \left( \frac{1}{2} \int \{p_i p_k - p_i' p_k'\} d\varphi \right)
\end{aligned}$$

d. h.

$$F = F_1 l_1^2 + F_2 l_2^2 + \dots + F_n l_n^2 + 2F_{12} l_1 l_2 + 2F_{23} l_2 l_3 + \dots$$

wo

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2} \int \{p^2 - p'^2\} d\varphi, & F_i &= \frac{1}{2} \int \{p_i^2 - p_i'^2\} d\varphi, \\
F_{ik} &= \frac{1}{2} \int \{p_i p_k - p_i' p_k'\} d\varphi.
\end{aligned}$$

(16)

Neuerdings hat Ganapathi den folgenden Satz bewiesen:<sup>(1)</sup>

Man kann zu einer Eilinie gerade Anzahl von rechteckigen Quadraten umschreiben.

Im folgenden beweisen wir ihn mit anderen Methoden.

Setzen wir

$$\phi(\varphi) = p(\varphi) + p(\varphi + \pi),$$

so hat  $\phi(\varphi) - p(\varphi + \pi/2)$  die Periode  $\pi$ .

$\phi(\varphi) - p(\varphi + \pi/2)$  hat gerade Anzahl von Nullstelle im  $0 \leq \varphi < \pi$ , wenn wir es doppelt zählen, w.z.b.w..

Setzen wir  $\rho$  oder  $r$  anstatt  $p$ , so kann man die ähnlichen Sätze beweisen, wo  $\rho$  und  $r$  Krümmungshalbmesser bzw. Radiusvektor sind.

(1) GANAPATHI, P.: An note on the Oval, Math. Zeitschrift 38 (1934) p. 490.

# BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN (X)

Soji MATSUMURA

(1)

Wenn

$$(1) \quad v = \bar{v}$$

ist, so folgt aus der Formel:

$$(2) \quad \begin{cases} \xi_{\sigma\sigma} = -\xi + \bar{c} v + c \bar{v}, \\ v_{\sigma} = -c \xi_{\sigma}, \\ v_{\sigma} = -\bar{c} \xi_{\sigma}, \end{cases}$$

$$(3) \quad \xi_{\sigma\sigma} + (1 + 2c^2) \xi = C.$$

Aus (3) ergibt sich

$$(4) \quad \xi = A \sin(\sqrt{1 + 2c^2} \sigma + B),$$

wo  $A$ ,  $B$  und  $C$  Konstante aus  $\sigma$  sind.

Aus (4) folgt der

**Satz:** Wir geben einen Kreis  $\xi$  in  $R_2$  als die Funktion eines Parameters  $t$ . Sind  $v, \bar{v}$  die beiden Schnittpunkte von  $\xi$  mit Nachbarkreis, die beiden Enveloppenpunkte und

$$v \equiv \bar{v}$$

so folgt (4).

Aus (2) ergibt sich

$$(v_{\sigma} \bar{v}_{\sigma}) = c \bar{c} (\xi_{\sigma} \xi_{\sigma}),$$

$$\text{d. h.} \quad \cos^2 \varphi = c \bar{c} (\xi_{\sigma} \xi_{\sigma}),$$

wo  $\varphi$  der Winkel zwischen  $v_{\sigma}$  und  $\bar{v}_{\sigma}$  sind.

(2)

Betrachten wir

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_{\alpha} \rho_{\beta}, \quad \cos^2 \varphi = \overset{*}{T}^{\alpha\beta} \overset{*}{\rho}_{\alpha} \overset{*}{\rho}_{\beta},$$



wo

$$(2) \quad A^{a\beta} \rho_a \rho_\beta = 1 \quad A^{a\beta} \rho_a \rho_\beta = 1.$$

Ersetzen wir dies in

$$(3) \quad A^{a\beta} \rho_a \rho_\beta = A^{a\beta} \rho_a \rho_\beta,$$

so ergibt sich

$$(4) \quad A^{a\beta} \rho_a \rho_\beta = A^{a\beta} c_a^\gamma c_\beta^\delta \rho_a \rho_\beta,$$

wo

$$(5) \quad \rho_a = c_a^\beta \rho_\beta.$$

Aus (4) folgt

$$(6) \quad A^{a\beta} = c_a^\gamma c_\beta^\delta A^{\gamma\delta}.$$

Durch (6) werden also in den  $A^{a\beta}$  die homogenen affinen Substitutionen dargestellt.<sup>(1)</sup>

### (3)

Wir betrachten drei Kreise  $\bar{\mathfrak{R}}, \bar{\mathfrak{R}}, \bar{\mathfrak{R}}$  im  $R_3$ , die durch die beiden Kugelpaare  $\bar{x}^a, \bar{x}^b$  und  $\bar{x}^\gamma [\alpha, \beta, \gamma = \text{I, II}]$  dargestellt sind.

Wir definieren:

$$(1) \quad A^{a\beta} = (\bar{x}^a \bar{x}^\beta), \quad \bar{A}^{a\beta} = (\bar{x}^a \bar{x}^\beta).$$

Sind

$$\eta = \rho_a \bar{x}^a, \quad \bar{\eta} = \bar{\rho}_a \bar{x}^a$$

die normierten Kugeln durch  $\mathfrak{R}$  bzw.  $\bar{\mathfrak{R}}$  mit

$$(2) \quad \begin{cases} \eta \bar{\eta} = \rho_a \bar{\rho}_a A^{a\beta} = 1, \\ \bar{\eta} \eta = \bar{\rho}_a \rho_a \bar{A}^{a\beta} = 1, \end{cases}$$

so muss

$$(3) \quad \begin{cases} \cos^2 \varphi = \rho_a \bar{\rho}_a T^{a\beta} \\ \cos^2 \bar{\varphi} = \bar{\rho}_a \rho_a \bar{T}^{a\beta} \end{cases}$$

sein, wobei  $\varphi, \bar{\varphi}$  die Winkel zwischen  $\eta$  und  $\bar{\mathfrak{R}}$  bzw.  $\bar{\eta}$  und  $\bar{\mathfrak{R}}$  sind.

Wenn  $\varphi = \bar{\varphi} = \pi/2$  ist, so folgt aus (3)

$$(4) \quad \rho_a \bar{\rho}_a T^{a\beta} = 0, \quad \bar{\rho}_a \rho_a \bar{T}^{a\beta} = 0.$$

Nun betrachten wir Nullkugeln  $\bar{x}$  durch die Schnittkreise von  $\eta$  und  $\bar{\eta}$ , so folgt

(1) Vergl. MATSUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (V), Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Vol. V (1933) S. 317.

$$(5) \quad \bar{x} = \rho_\alpha \bar{y}^\alpha + \bar{\rho}_\lambda \bar{y}^\lambda.$$

Wegen (4), (5) ergibt sich aus  $(\bar{x}\bar{x}) = 0$ :

$$(6) \quad \rho_\alpha \bar{\rho}_\beta (\bar{y}^\alpha \bar{y}^\beta + \rho_\beta \bar{\rho}_\lambda \bar{y}^\beta \bar{y}^\lambda) = 0.$$

(6) ist die Bedingung dafür, dass (5) eine Nullkugel ist.

#### (4)

Betrachten wir die Kugeln, die einer linearen Gleichung

$$(1) \quad z = q^\nu P_\nu$$

genügen, wo  $q^\nu$  skalare Grössen und  $P_\nu$  Kugeln im  $R_4$  bedeuten.

Dann bezeichnet  $z$  in (1) zwei Punkte in  $R_4$ .

Aus (1) folgt

$$(zz) = a^{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta,$$

$$\text{d. h. } (2) \quad 0 = a^{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta,$$

wo

$$(3) \quad a^{\alpha\beta} = a^{\beta\alpha},$$

$$(4) \quad |a^{\alpha\beta}| \neq 0.$$

Man nimmt statt (4) an:

$$(5) \quad \text{Rang} \{ |a^{\alpha\beta}| \} = 3.$$

Für den Gebrauch der  $P_\nu$  führen wir zweckmässigerweise ein Grössensystem  $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$  mit vier unteren, unabhängig die Ziffern von 1 bis 4 durchlaufenden Indizes ein, das in jedem Indexpaar schiefsymmetrisch ist.<sup>(1)</sup>

Dann gilt wie üblich für unsere (1), (5):

$$(6) \quad e_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\lambda\mu\nu\rho} a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} a^{\gamma\nu} a^{\delta\rho} = 0,$$

wo wir annehmen:

$$(7) \quad e_{1234} = 1,$$

dann sind alle  $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$  entweder als 0 oder als 1 oder als -1 bekannt.

Setzen wir

$$(8) \quad T = e_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\lambda\mu\nu\rho} a^{\alpha\lambda} b^{\beta\mu} c^{\gamma\nu} d^{\delta\rho},$$

so folgt

$$(9) \quad T = \langle a b c d \rangle,$$

wo  $a, b, c, d$  vier kontravariante Tensoren zweiter Stufe sind. Für die schiefen Produkte gelten Rechenregeln wie die folgenden:

$$(10) \quad \langle \lambda a, b, c, d \rangle = \lambda \langle a, b, c, d \rangle.$$

(1) THOMSEN, G.: Über Kegelschnitte im Raum, Math. Ann. 108 Bd. (1933) S. 260.

wo  $\lambda$  ein Skalar ist und  $\lambda a$  den Tensor  $\lambda \cdot a^{\alpha\beta}$  bedeutet. Ferner gilt, wenn  $g + h$  der Tensor mit den Komponenten  $g^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta}$  ist:

$$(11) \quad \langle g + h, b, c, d \rangle = \langle g, b, c, d \rangle + \langle h, b, c, d \rangle.$$

Im allgemeinen gilt:

$$(12) \quad \langle \lambda g + \mu h, b, c, d \rangle = \lambda \langle g, b, c, d \rangle + \mu \langle h, b, c, d \rangle.$$

Die Gleichung (6) können wir schreiben als

$$(13) \quad \langle a, a, a, a \rangle = 0.$$

I. Sind  $a^{\alpha\beta}$  und  $b^{\alpha\beta}$  die Koordinaten der Kurvenpaare in  $R_4$ , so ist durch

$$(14) \quad K = \frac{(\langle a, a, b, b \rangle)^2}{\langle a, a, a, b \rangle \cdot \langle a, b, b, b \rangle}$$

die einzige Invariante der zwei Kurvenpaare gegeben.  $K$  ist invariant.

II. Ist  $a^{\alpha\beta}$  ein Kurvenpaar, so wird durch  $e_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\lambda\mu\nu\rho} a^{\beta\mu} a^{\gamma\nu} a^{\delta\rho}$  ein Grössensystem mit den freien unteren Indizes  $\alpha$  und  $\lambda$  gegeben, das, abgesehen von einem Normierungsfaktor, einen kovarianten Tensor zweiter Stufe darstellt

Dieser Tensor erweist sich, wie leicht nachzurechnen ist, als Rang 1, er lässt sich also mittels eines Vektors  $v_\alpha$  als Produkt  $v_\alpha v_\lambda$  darstellen:

$$(15) \quad v_\alpha v_\lambda = e_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\lambda\mu\nu\rho} a^{\beta\mu} a^{\gamma\nu} a^{\delta\rho}.$$

$v_\alpha$  ist wie leicht nachweisbar einfach der kovariante Vektor der Ebene des Kurvenpaares.

Man kann die Verhältnisse der  $v_\alpha$  auch als Lösungen des homogenen Gleichungssystems

$$(16) \quad a^{\alpha\beta} v_\alpha = 0$$

gewinnen, dessen Matrix den Rang 3 besitzt.

Hat man weiter eine beliebige von  $v_\alpha$  verschiedene Ebene  $w_\alpha$ , so wird durch

$$(17) \quad y^\alpha = a^{\alpha\beta} w_\beta$$

der im Kurvenpaar gelegene Punkt  $y^\alpha$  gegeben.

Setzt man in (17) alle die  $w_\alpha$  ein, für die

$$(18) \quad a^{\alpha\beta} w_\alpha w_\beta = 0$$

gilt, so erhält man die sämtlichen Punkte des Kurvenpaares.

III. Schreiben wir für den Tensor zweiter Stufe  $P^\alpha P^\beta$ , der als Produkt zweiten kontravarianten Vektors entsteht, das Fettdrucksymbol  $[xy]$  und setzen auch derartige Symbole in die vier Leerstellen des schiefen Produktes (9) ein, so können wir, wenn  $a$  ein Kurvenpaar darstellt, den

Ausdruck

$$(19) \quad P = \frac{<[xx], [yy], a, a>}{<[xy], a, a, a>^2}$$

bilden.

$P$  ist nur eine relative Invariante.

Wir betrachten einparametrische Scharen von Kurvenpaar, die wir mit Hilfe eins Parameters  $t$  darstellen, indem wir die zehn  $a^{\alpha\beta}$  als analytische Funktionen  $a^{\alpha\beta}$  bezeichnen. Die Punkte des Kurvenpaares erfüllen dann eine Fläche.

Jetzt gilt (13) identisch in  $t$ .

Schreiben wir für  $d/dt(a^{\alpha\beta})$  auch  $\dot{a}^{\alpha\beta}$ , so folgt aus (13) durch Ableiten wegen der Konstanz von  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$  und wegen der Vertauschbarkeit der vier Tensoren in dem Symbol (9):

$$(20) \quad <a, a, a, \dot{a}> = 0.$$

Wir setzen weiter zur Abkürzung

$$(21) \quad B = <a, a, \dot{a}, \dot{a}>, \\ (22) \quad C = <a, \dot{a}, \dot{a}, \dot{a}>, \\ (23) \quad D = <\dot{a}, \dot{a}, \dot{a}, \dot{a}>.$$

Wir betrachten den Büschel aller Tensoren  $C^{\alpha\beta}$ , die die Linearkombination

$$(24) \quad C^{\alpha\beta} = \lambda \cdot a^{\alpha\beta} + \mu \dot{a}^{\alpha\beta}$$

von  $a^{\alpha\beta}$  und  $\dot{a}^{\alpha\beta}$  mit zwei beliebigen Skalaren sind.

Im allgemeinen wird  $C^{\alpha\beta}$  den Rang 4 besitzen, und durch

$$(25) \quad C^{\alpha\beta} P_{\alpha} P_{\beta} = 0$$

ist dann das Flächenpaar dargestellt.

Durch das Gleichungspaar

$$a^{\alpha\beta} P_{\alpha} P_{\beta} = 0 \quad \text{und} \quad (a^{\alpha\beta} + \dot{a}^{\alpha\beta} dt) P_{\alpha} P_{\beta} = 0$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch das Paar der Gleichungen

$$(26) \quad a^{\alpha\beta} P_{\alpha} P_{\beta} = 0$$

und

$$(27) \quad \dot{a}^{\alpha\beta} P_{\alpha} P_{\beta} = 0$$

sind alle Ebenen bestimmt, die zwei benachbarte Kurvenpaare unserer Schar gleichzeitig berühren.

### (5)

Wir haben als eine Kurvenentfernung  $p$  eines Raumpunktes  $s$  vom Kurvenpunkte  $\mathfrak{r}$

$$(1) \quad p = (x - \xi, \xi' \xi'' \dots \xi^{(n-1)})^{\frac{1}{n}},$$

wobei die Ableitungen nach der Affinlänge der Kurve  $\xi$  genommen sind.<sup>(1)</sup>

Ist  $\xi$  eine Kugel und  $\xi$  ein nicht auf ihm liegender Punkt, so ist

$$(2) \quad x = 2(\xi \xi) \xi - \xi$$

der zu  $\xi$  in bezug auf die Kugel  $\xi$  inverse Punkt.

Aus (1), (2) folgt

$$(3) \quad p = (2(x \xi) \xi - 2\xi, \xi' \xi'' \dots \xi^{(n-1)})^{\frac{1}{n}},$$

so folgt der

**Satz:** Ist  $\xi$  eine Kugel im  $R_n$  und  $\xi$  ein nicht auf ihm liegender Kurvenpunkt, dann wird die Affinentfernung  $p$  eines Punktes, des zu  $\xi$  in bezug auf die Kugel  $\xi$  inversen Punktes, von dem Flächenpunkt  $\xi$  mit (3) gegeben.

## (6)

Betrachten wir

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = T^{a\beta}(t) \rho_a \rho_\beta$$

wo  $t$  ein Parameter ist.

Wenn  $\varphi = \pi/2$ , so folgt

$$(2) \quad T^{a\beta}(t) \rho_a \rho_\beta = 0.$$

Wenn für

$$T^{a\beta}(t+dt) = T^{a\beta}(t) + \dot{T}^{a\beta}(t) dt,$$

(2) bestehen, so folgt

$$(3) \quad (T^{a\beta}(t) + \dot{T}^{a\beta}(t) dt) \rho_a \rho_\beta = 0.$$

Aus (2), (3) ergibt sich

$$(4) \quad \dot{T}^{a\beta}(t) \rho_a \rho_\beta = 0.$$

Hier müssen wir (2) und (4) betrachten.

## (7)

Es seien zwei Kreise  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  im  $R_2$  gegeben, so bezeichnet

$$(1) \quad \xi = \mathfrak{A} + \nu \mathfrak{B}$$

einen Kreibüschel durch die Schnittpunkte  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ . -Gleichfalls bezeichnet

(1) OGIWARA, S.: Über die Affinkurvenentfernungen, Tohoku Math. Journ. 38 (1933) p. 101.

$$(2) \quad u = a + \lambda \beta$$

einen Kreisbüschel durch die Schnittpunkte der zwei Kreise  $\alpha$  und  $\beta$ , wo  $\lambda, \nu$  zwei skalare Grössen sind.

• Wenn  $\mathfrak{x}$  und  $u$  auf einander senkrecht ist, so folgt

$$(3) \quad 0 = u \mathfrak{x} = (\mathfrak{A} \alpha) + \lambda (\mathfrak{A} \beta) + \nu (\mathfrak{B} \alpha) + \lambda \nu (\mathfrak{B} \beta)$$

Ist die durch (3) bestimmte Beziehung eine involutorische, d.h. sollen  $\lambda, \nu$  vertauschbar sein, so müssen die Koeffizienten von  $\lambda$  und  $\nu$  einander gleich sein, und wir finden als die Bedingung für die involutorische Lage der Kreisreihe

$$(\alpha \beta) = (\mathfrak{B} \alpha).$$

$$\bar{\mathfrak{x}} = (\mathfrak{A} + \rho \mathfrak{B}) + \lambda (\mathfrak{B} + \rho \mathfrak{C}),$$

$$\bar{u} = (\alpha + \nu \beta) + \lambda (\beta + \nu \gamma)$$

bezeichnen zwei Kreisbüschel in  $R_2$ , wo  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \gamma$  die Kreise in  $R_2$ ,  $\rho, \lambda, \nu$  drei Parameter sind.

Für die involutorische Bedingung von  $(\bar{\mathfrak{x}} \bar{u}) = 0$  ergibt sich:

$$(\mathfrak{A} + \rho \mathfrak{B}, \beta + \nu \gamma) - (\mathfrak{B} + \rho \mathfrak{C}, \alpha + \nu \beta) = 0.$$

Diese ist die bilineare Gleichung zwischen  $\rho$  und  $\nu$ .

Sollen  $\rho$  und  $\nu$  vertauschbar, oder auf jedem der Gebilde zweiter Ordnung eine Involution bestimmt sein, so folgt

$$(\alpha + \rho \mathfrak{B}, \beta + \nu \gamma) = (\mathfrak{B} + \rho \mathfrak{C}, \alpha + \nu \beta),$$

$$\text{d. h.} \quad (\mathfrak{B} \beta) - (\mathfrak{C} \alpha) = (\alpha \gamma) - (\mathfrak{B} \beta),$$

$$\text{oder} \quad (\alpha \gamma) - 2 (\mathfrak{B} \beta) + (\mathfrak{C} \alpha) = 0.$$

Im Folgenden betrachten wir zwei Kreisbuschel

$$\bar{\mathfrak{x}} = (\mathfrak{A} + \rho \mathfrak{B}) + 2\lambda (\mathfrak{B} + \rho \mathfrak{C}) + \lambda^2 (\mathfrak{C} + \rho \vartheta),$$

$$\bar{u} = (\alpha + \nu \beta) + 2\lambda (\beta + \nu \gamma) + \lambda^2 (\gamma + \nu \delta),$$

wo  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \vartheta, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  die Kreise und  $\rho, \lambda, \nu$  die skalaren Grössen sind.

Wenn

$$(\bar{\mathfrak{x}} \bar{u}) = 0$$

involutorisch ist, so folgt

$$(\alpha \delta) - 3 (\mathfrak{B} \gamma) + 3 (\mathfrak{C} \beta) - (\mathfrak{D} \alpha) = 0$$

(8)

Sind  $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$  zwei Kreise im  $R_3$ , so kann man setzen

$$(1) \quad (\mathfrak{x} \mathfrak{x}) = 1, \quad (\mathfrak{y} \mathfrak{y}) = 1.$$

Sind  $\varphi$  ein Winkel zwischen  $\mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{y}$ , so folgt

$$(2) \quad \cos^2 \varphi = \frac{(\xi \eta)^2}{(\xi \xi)(\eta \eta)}.$$

Aus (2) ergibt sich

$$(3) \quad \begin{aligned} \sin^2 \varphi &= 1 - \cos^2 \varphi \\ &= \frac{\{(\xi \xi)(\eta \eta) - (\xi \eta)^2\}}{(\xi \xi)(\eta \eta)}. \end{aligned}$$

Wenn  $\phi$  ein Winkel zwischen  $\xi$  und  $\xi + d\xi$ , so folgt

$$(4) \quad \begin{aligned} \sin^2 \phi &= \frac{\{(\xi \xi)(\xi + d\xi, \xi + d\xi) - (\xi, \xi + d\xi)^2\}}{(\xi \xi)(\xi + d\xi, \xi + d\xi)} \\ &= \frac{\{(\xi \xi)(d\xi d\xi) - (\xi d\xi)^2\}}{(\xi \xi)(\xi + d\xi, \xi + d\xi)}. \end{aligned}$$

Nun haben wir

$$(5) \quad (\xi + d\xi, \xi + d\xi) = 1,$$

$$(6) \quad \begin{aligned} (\xi + d\xi, \xi + d\xi) &= (\xi \xi) + 2(\xi d\xi) + (d\xi d\xi) \\ &= 1 + 2(\xi d\xi) + (d\xi d\xi) \end{aligned}$$

Aus (5), (6) folgt

$$(7) \quad 2(\xi d\xi) + (d\xi, d\xi) = 0.$$

Setzen wir (7) in (4), so folgt

$$(8) \quad \sin^2 \phi = (\xi \xi)(d\xi d\xi) - (\xi d\xi)^2.$$

Aus (1), (7) und (8) ergibt sich

$$(9) \quad \sin^2 \phi = (d\xi d\xi).$$

Setzen wir

$$(10) \quad t = \lambda \xi + \xi',$$

wo  $\lambda$  ein Parameter,  $t$  und  $\xi$  zwei Kreise im  $R_2$  und  $\xi' = \frac{d\xi}{dt}$  ist.

Aus (10) folgt

$$(11) \quad (\xi t) = \lambda (\xi \xi) + (\xi \xi'),$$

$$\text{d. h.} \quad (\xi t) = \lambda$$

denn (1) besteht.

So folgt aus (10)

$$t = (\xi t) + \xi'.$$

(9)

Betrachten wir zwei Kreise  $\xi(t)$ ,  $z$  im  $R_2$ , so folgt

$$(1) \quad \cos^2 \psi = (z, \xi(t + dt)),$$

wo  $\varphi$  der Winkel zwischen  $z$  und  $\mathfrak{x}(t+dt)$  und  $t$  ein Parameter ist.

Aus (1) ergibt sich

$$(2) \quad \cos^2 \varphi = (\mathfrak{x}(t), z) + (\mathfrak{x}'(t), z) dt + \frac{1}{2} (z, \mathfrak{x}''(t)) dt^2 + \dots,$$

denn

$$(3) \quad \mathfrak{x}(t+dt) = \mathfrak{x}(t) + \mathfrak{x}'(t) dt + \frac{1}{2} \mathfrak{x}''(t) dt^2 + \dots$$

ist.

Aus (3) ergibt sich

$$(4) \quad \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{2 \cos^2 \varphi}{dt^2} = (z, \mathfrak{x}''),$$

wenn

$$(5) \quad (z, \mathfrak{x}') = 0$$

ist.

(5) bedeutet, dass der Kreis  $z$  zu den Kreisen  $\mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{x} + \mathfrak{x}' dt$ , senkrecht ist, so folgt der

**Satz:** Wenn ein Kreis  $z$  zu zwei benachbarten Kreisen  $\mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{x} + \mathfrak{x}' dt$  senkrecht ist, so besteht (4).

Steht ein Kreis  $z$  mit drei benachbarten Kreisen  $\mathfrak{x}, \mathfrak{x} + d\mathfrak{x}, \mathfrak{x} + d\mathfrak{x} + \frac{1}{2} d^2 \mathfrak{x}$  in einer linearen Beziehung, so folgt

$$(6) \quad z = A \mathfrak{x} + B (\mathfrak{x} + d\mathfrak{x}) + C (\mathfrak{x} + d\mathfrak{x} + \frac{1}{2} d^2 \mathfrak{x})$$

$$\text{d. h. (7) } z = \lambda \mathfrak{x} + \mu \mathfrak{x}' + \nu \mathfrak{x}'',$$

wo  $A, B, C, \lambda, \mu, \nu$  die Konstanten,  $\mathfrak{x}' = \frac{d\mathfrak{x}}{dt}$  und  $t$  ein Parameter ist.

Aus (7) folgt

$$(8) \quad 0 = (\mathfrak{x}, z) = \lambda (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) + \mu (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}') + \nu (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}''),$$

wenn  $\mathfrak{x}$  zu  $z$  senkrecht ist.

So folgt

$$(9) \quad 0 = \lambda - \nu$$

wenn

$$(10) \quad (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = 1,$$

$$(11) \quad (\mathfrak{x}', \mathfrak{x}') = 1.$$

Aus (9) ergibt sich  $\lambda = \nu$ , so folgt aus (7)

$$(12) \quad z = \lambda (\mathfrak{x} + \mathfrak{x}'') + \mu \mathfrak{x}'.$$

(11) bedeutet  $d\sigma^2 = dt^2$ , wo  $d\sigma$  ein Winkel zwischen zwei nachbarn Kreisen  $\mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{x} + d\mathfrak{x}$  ist, dann folgt der



**Satz:** Wenn der Parameter  $t$  des Kreises  $\pm d\sigma$  gleich und zu drei benachbarten Kreisen senkrecht ist:

$$\xi, \quad \xi + d\xi, \quad \xi + 2d\xi + d^2\xi,$$

so besteht (12)

(10)

Ein beliebiger Tangentialkreis einer Kurve  $v(\sigma)$  lässt sich wie folgt darstellen:

$$\rho(\sigma) = \xi(\sigma) + \frac{1}{R(\sigma)} v(\sigma).$$

In der Tat gilt nach der Formel von Thomsen:

$$\frac{d\rho}{d\sigma} = \frac{d\xi}{d\sigma} + \left\{ \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{R} \right) \right\} v + \frac{1}{R} \frac{dv}{d\sigma}$$

$$\text{d. h.} \quad \frac{d\rho}{d\sigma} = \left( \frac{1}{R} - \varepsilon R \right) \frac{dv}{d\sigma} + \left\{ \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{R} \right) \right\} v$$

$$(\varepsilon = \pm 1)$$

Wenn in den Gegenpunkten

$$\frac{d\rho}{d\sigma} = \frac{d\bar{\rho}}{d\sigma}, \quad \text{d. h.} \quad \rho = \text{const.} + \bar{\rho},$$

ist, so folgt

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{R} - \varepsilon R \right) \frac{dv}{d\sigma} + \left\{ \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{R} \right) \right\} v \\ &= \left( \frac{1}{\bar{R}} - \varepsilon \bar{R} \right) \frac{d\bar{v}}{d\sigma} + \left\{ \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{\bar{R}} \right) \right\} \bar{v} \end{aligned}$$

(11)

Es seien zwei Kreise  $\mathfrak{R}, \bar{\mathfrak{R}}$  im  $R_3$  gegeben.

Ist  $\eta = \rho_\alpha \xi_\beta$  eine normierte Kugel im  $R_3$  durch  $\mathfrak{R}$ , so setzen wir

$$(1) \quad \eta \eta = \rho_\alpha \rho_\beta A^{\alpha\beta} = 1.$$

Dann muss sein:

$$(2) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta,$$

wobei  $\varphi$  den Winkel zwischen  $\eta$  und  $\mathfrak{R}$  bedeutet.

So folgt

$$(3) \quad \cos^2 \varphi = \frac{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta}{A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta}.$$

Aus (3) ergibt sich

$$(4) \quad \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)} = \frac{\sqrt{T^{a\beta}} \rho_a \rho_\beta + \sqrt{(A^{a\beta} - T^{a\beta})} \rho_a \rho_\beta}{\sqrt{T^{a\beta}} \rho_a \rho_\beta - \sqrt{(A^{a\beta} - T^{a\beta})} \rho_a \rho_\beta}.$$

Es seien zwei Kreise  $\mathfrak{R}, \bar{\mathfrak{R}}$  im  $R_3$  gegeben. Ist  $\eta = \rho_a \xi^a$  ein normierter Punkt im  $R_3$  durch  $\mathfrak{R}$ , so setzen wir

$$(5) \quad \eta \eta = \rho_a \rho_\beta A^{a\beta} = 0$$

Dann muss sein:

$$(6) \quad \cos^2 \varphi = (T^{a\beta} - A^{a\beta}) \rho_a \rho_\beta.$$

Aus (5), (6) ergibt sich

$$(7) \quad \cos^2 \varphi = (T^{a\beta} - A^{a\beta}) \rho_a \rho_\beta.$$

## (12)

Es sei  $\xi(t)$  die einparametrische Kreisschar in  $R_2$ ,  $\dot{\xi}(t)$  mit  $\dot{\xi}^2 = 0$  die Stellung der zugehörigen Tangentelemente.

Wenn wir Ableitungen nach dem Parameter  $t$  mit Punkten bezeichnen, so lautet die Bedingung dafür, dass zwei Nachbarkreise  $\xi$  die Kurve  $\dot{\xi}(t)$  berühren, wobei

$$(1) \quad \dot{\xi} \dot{\xi} = 0.$$

Wir erhalten die Streifenbedingung (1) durch

$$(2) \quad \hat{\xi} = \xi(t) + \lambda(t) \dot{\xi}(t),$$

weil die Bedingung (1) auch für  $\hat{\xi}$  erfüllt ist. Es ist ja

$$(3) \quad \hat{\xi} \hat{\xi} = (\xi + \lambda \dot{\xi} + \lambda \dot{\xi}) \dot{\xi} = 0$$

wegen

$$\dot{\xi} \dot{\xi} = 0.$$

Wir wollen nun dem willkürlichen Faktor  $\lambda(t)$  in (2) einen bestimmten Wert erteilen.

Wenn ein Kreis  $\eta$  zu  $\hat{\xi}$  senkrecht ist, so folgt

$$(4) \quad \eta \xi = \xi \eta + \lambda \dot{\xi} \eta = 0,$$

wobei  $\lambda$  die Konstante bedeuten.

Daraus folgt

$$(5) \quad \lambda = -\frac{(\dot{\xi} \eta)}{(\dot{\xi} \xi)}.$$

Aus (2) und (5) ergibt sich

$$(6) \quad \hat{\xi} = \xi - \frac{(\xi \eta)}{(\hat{\xi} \eta)} \hat{\xi}.$$

Der Parameter  $t$  soll durch einen neuen Parameter  $s$  ersetzt werden, wo  $s$  definiert ist durch die Forderung

$$(7) \quad \begin{aligned} s &= \int \pm \sqrt{\frac{\hat{\xi}^2}{\xi^2}} dt + c \\ &= \int \pm \sqrt{\frac{\hat{\xi} - \frac{(\xi \eta)}{(\hat{\xi} \eta)} \hat{\xi}}{\xi}} dt + c. \end{aligned}$$

Die folgende Tabelle skalarer Produkte besteht:

	$\hat{\xi}$	$\dot{\xi}$	$\xi$
$\hat{\xi}$	1	0	1
$\dot{\xi}$	0	0	0
$\xi$	1	0	1

(13)

Es sei durch

$$(1) \quad u_a = u_a(t)$$

eine Kurve auf der Kreisfläche

$$(2) \quad \theta = \theta(u_1, u_2)$$

gegeben.<sup>(1)</sup>

In bezug auf  $u_a(t)$  ist dabei angenommen, dass sie stetig und mindestens einmal stetig differenzierbar sind, und dass eine Teilung ihrer Ordinatenmengen im Definitionsbereich  $B$  der Funktion (2) liegt.

Die unabhängige Veränderliche  $t$  sei auf ein solches Intervall beschränkt, dass kein Funktionswert  $u_a(t)$  ausserhalb von  $B$  liegt.

$$(3) \quad \theta = \theta(u_1(t), u_2(t)) = \varphi(t).$$

Für das Quadrat des Bogenelementes der Kurve ergibt sich nach (2)

$$(4) \quad ds^2 = d\theta d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial u_a} \frac{\partial \theta}{\partial u_b} du_a du_b,$$

da

$$(5) \quad d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial u_a} du_a = \frac{\partial \theta}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \theta}{\partial u_2} du_2$$

ist.

---

(1) MATSUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (1), Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Vol. V (1932) p. 133.

Setzt man nur Abkürzung

$$(6) \quad \frac{\partial \theta}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial u_\beta} = g_{\alpha\beta},$$

so folgt aus (4)

$$(7) \quad ds^2 = g_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta,$$

Aus (6) erkennt man, dass  $g_{11}$  das Quadrat der Länge des Vektors  $\frac{\partial \theta}{\partial u_1}$ ,  $g_{22}$  das Quadrat der Länge des Vektors  $\frac{\partial \theta}{\partial u_2}$  und  $g_{12}$  das innere Produkt dieser beiden Vektoren ist, so dass für den Winkel  $\theta$  der Parameterlinien in einem Punkt  $P(u_1, u_2)$

$$(8) \quad \cos \theta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}$$

gilt.  $g_{11}$  und  $g_{22}$  sind stets positiv.

(14)

Nun betrachten wir

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = \frac{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta}{A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta}.$$

Wenn für  $\rho_\alpha \cos^2 \varphi$  in (1) Maximum- oder Minimumwerte annimmt, so folgt

$$(2) \quad \frac{\partial (\cos^2 \varphi)}{\partial \rho_\alpha} = 0,$$

$$\text{d. h. } (3) \quad (T^{\alpha\beta} - \cos^2 \varphi \cdot A^{\alpha\beta}) \rho_\beta = 0,$$

so folgt der

**Satz:** Die Richtungen der Maximum- oder Minimumwerte von (1) sind die Hauptrichtungen von  $T^{\alpha\beta}$ .

Wenn

$$T^{\alpha\beta} = a A^{\alpha\beta}$$

ist, so sind die Richtungen von den Hauptrichtungen unbestimmt.

(15)

Betrachten wir Kreisfläche

$$(1) \quad \xi = \xi(t, \tau),$$

in der die Minimallinien als parametrische Linien sind,<sup>(1)</sup> so folgt

(1) Vergl. MATSUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (I), Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Vol. V., No. 3, p. 75.

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u \partial v} = 0.$$

$$\text{d. h. } (3) \quad \mathfrak{x} = f(t) + \varphi(\tau).$$

(3) bezeichnet eine Translationsfläche.

### (16)

Wenn zwei Kreisflächen  $s, \bar{s}$  konform sind, so folgt<sup>(1)</sup>

$$\frac{(\theta_t, \theta_t)}{(\bar{\theta}_t, \bar{\theta}_t)} = \frac{(\theta_t, \theta_\tau)}{(\bar{\theta}_t, \bar{\theta}_\tau)} = \frac{(\theta_\tau, \theta_\tau)}{(\bar{\theta}_\tau, \bar{\theta}_\tau)},$$

also ergibt sich

$$\frac{(V\psi)^2}{(\bar{V}\bar{\psi})^2} = \frac{V\phi \cdot V\psi}{\bar{V}\phi \cdot \bar{V}\psi} = \frac{(V\psi)^2}{(\bar{V}\bar{\psi})^2},$$

wo zwischen zwei Flächen

$$\phi(t, \tau) = \bar{\phi}(\bar{t}, \bar{\tau})$$

und

$$\psi(t, \tau) = \bar{\psi}(\bar{t}, \bar{\tau})$$

bestehen.<sup>(2)</sup>

### (17)

Nun betrachten wir isometrische Koordinaten auf der Kugelfläche.

Sei  $K$  der Modul der elliptischen Funktionen mit dem Argument  $u$ ,  $K'$  der Modul für das Argument  $v$ .

Es bedeuten  $K$  und  $K'$  Komplementärmoduli, so dass  $K^2 + K'^2 = 1$  ist. Wird der Mittelpunkt einer Kugelfläche mit dem Halbmesser  $r$  zum Anfangspunkt orthogonaler Koordinaten  $x, y$  und  $z$  genommen, so ist

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Dieser Gleichung wird durch folgende Werte von  $x, y$  und  $z$  genügt:

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= r \sin \text{am } u \Delta \text{am } v, y = r \Delta \text{am } u \sin \text{am } v, \\ z &= r \cos \text{am } u \cos \text{am } v. \end{aligned}$$

Diese Gleichung gibt

(1) MATSUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln, Mem. of the Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Vol. V (1932) S. 78.

(2) WEATHERBURN, C. E.: Diff. Geo. of three dimensions II, Cambridge (1930) p. 189.

$$(3) \quad \frac{dx}{du} \frac{dx}{dv} + \frac{dy}{du} \frac{dy}{dv} + \frac{dz}{du} \frac{dz}{dv} = 0,$$

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2$$

$$= r^2(1 - K^2 \sin^2 \text{am } u - K'^2 \sin^2 \text{am } v).$$

Durch die vorstehenden Gleichungen ist bekanntlich ein System isometrischer Koordinaten charakterisiert.

Sieht man allgemein  $u$  und  $v$  als Funktionen von  $p$  und  $q$  an, so reduzieren sich die Gleichungen

$$(4) \quad \frac{dx}{dp} \frac{dx}{dq} + \frac{dy}{dp} \frac{dy}{dq} + \frac{dz}{dp} \frac{dz}{dq} = 0,$$

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2$$

infolge der Gleichungen (3) auf

$$(5) \quad \frac{du}{dp} \frac{du}{dq} + \frac{dv}{dp} \frac{dv}{dq} = 0,$$

$$\left(\frac{du}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dp}\right)^2 = \left(\frac{du}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dq}\right)^2.$$

Wenn

$$1 = K^2 \sin^2 \text{am } u + K'^2 \sin^2 \text{am } v$$

in (3), so folgt aus (4)

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dp} = \frac{dx}{dq}, \\ \frac{dy}{dp} = \frac{dy}{dq}, \\ \frac{dz}{dp} = \frac{dz}{dq}. \end{cases}$$

(18)

Sind  $\xi_i$  die Kugeln im  $R_3$  und  $\mathfrak{x}$  ein nicht auf ihm gelegener Punkt, so sind

$$(1) \quad \eta_i = 2(\mathfrak{x} \xi_i) \xi_i - \mathfrak{x}, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

der zu  $\mathfrak{x}$  in bezug auf die Kugeln  $\xi_i$  inverse Punkt. Wenn  $\xi_i$  gemeinsame Wurzelachse besitzen, so kann man setzen

$$(2) \quad \xi_i = \alpha_i \mathfrak{A} + \beta_i \mathfrak{B},$$

so folgt<sup>(1)</sup> aus (1), (2) :

$$\begin{aligned}
 (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) &= ((x \xi_1) \xi_1, (x \xi_2) \xi_2, (x \xi_3) \xi_3, (x \xi_4) \xi_4) \\
 (3) \quad &= \frac{((x \xi_1) \xi_1 - (x \xi_2) \xi_2)((x \xi_3) \xi_3 - (x \xi_4) \xi_4)}{((x \xi_2) \xi_2 - (x \xi_3) \xi_3)((x \xi_4) \xi_4 - (x \xi_1) \xi_1)} \\
 &= \text{unabhängig aus } x,
 \end{aligned}$$

wo  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$  das Doppelverhältniss zwischen  $\eta_i$  bedeutet,  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  zwei feste Kugeln und  $\alpha_i, \beta_i$  zwei skalare Grössen sind.

Aus (3) ergibt sich der<sup>(2)</sup>

**Satz:**  $\eta_i$  seien vier zu einem Punkte  $x$  in bezug auf die Kugeln  $\xi_i$ , inverse Punkte, so ist  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$  von  $x$  unabhängig, wo  $\xi_i$  gemeinsame Wurzelachs haben.

### (19)

Sind  $\xi, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  Kreise und  $x, z_1, \dots, z_{n-1}$  nicht auf ihm gelegene Punkte, so sind

$$(1) \quad \begin{cases} z_1 = -2(x \xi) \xi + x, \\ z_2 = -2(z_1 \xi_1) \xi_1 + z_1, \\ z_3 = -2(z_2 \xi_2) \xi_2 + z_2, \\ \vdots \\ z_n = -2(z_{n-1} \xi_{n-1}) \xi_{n-1} + z_{n-1} \end{cases}$$

die zu  $x, z_1, \dots, z_{n-1}$  in bezug auf die Kreise  $\xi, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  inversen Punkte.

Wenn  $x$  nach dieser Inversion invariant ist, so folgt

$$(2) \quad \begin{cases} z_1 = -2(x \xi) \xi, \\ z_2 = -2(z_1 \xi_1) \xi_1 + z_1, \\ \vdots \\ z = -2(z_{n-1} \xi_{n-1}) \xi_{n-1} + z_{n-1}. \end{cases}$$

(2) ist die Bedingung zwischen  $x, \xi, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  dafür, dass ein Punkt  $x$  nach der Inversion invariant sei.

(1) HAYASHI, NISHIMURA and KAMIYA: Projective Geometry, Tokyo (1928) p. 54.

(2) WALSH, J. L.: A Theorem on Cross-Ratios in the Geo. of Inversion Annals of Math. 23 (1921-22) p. 46.

# BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN (XI)

Sôji MATSUMURA

( 1 )

Nehmen wir einen Punkt  $u$  als Linearkombinationen von  $\xi^a$  und  $[\alpha = I, II]$ , so folgt<sup>(1)</sup>

$$(1) \quad u = \rho_\alpha \xi + \rho_\beta \dot{\xi} \quad [\alpha, \beta = I, II].$$

wo  $\rho_\alpha, \rho_\beta$  gewisse skalare Zahlen bedeuten, und es muss gelten

$$(2) \quad uu = \rho_\alpha \rho_\beta A^{a\beta} + \rho_\alpha \rho_\beta B^{a\beta} + \rho_\alpha \rho_\beta T^{a\beta},$$

wo

$$(3) \quad A^{a\beta} = (\xi^a \xi^\beta), B^{a\beta} = (\xi^a \dot{\xi}^\beta), T^{a\beta} = (\dot{\xi}^a \dot{\xi}^\beta)$$

ist.

Aus (2) ergibt sich

$$(4) \quad 0 = 1 + \rho_\alpha \rho_\beta B^{a\beta} + \cos^2 \varphi$$

( 2 )

Wenn  $A^{a\beta} \equiv T^{a\beta}$  in meiner Arbeit ist, so sind unsere zwei Kreise in  $R_3$  auf einer Kugel.<sup>(2)</sup>

( 3 )

Wenn

$$g_{ij} + \bar{g}_{ij} = 2G_{ij}$$

in meiner Arbeit ist, dann muss

$$p_i = \bar{p}_i$$

---

(1) Vergl. NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ. Vol. 34 (1931), p. 201, p. 198.

(2) Vergl. l. c. (1).

(3) NAKAJIMA, S.: Differentialgeometric der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ. Vol. 34 (1931), p. 191.



## (4)

Sollen vier Kreise  $K_i$  [ $i = 1, 2, 3, 4$ ] zu demselben Kreise  $K_0$  orthogonal sein, so folgt aus den vier entsprechenden Gleichungen

$$(1) \quad 2 a_0 a_1 + 2 b_0 b_1 - (p_0 + p_1) = 0$$

als die Bedingung sofort.<sup>(1)</sup>

$$(2) \quad \begin{array}{cccc} a_1 & b_1 & p_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & p_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & p_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & p_4 & 1 \end{array} = 0$$

Diese Gleichung (2) ist die der durch drei Punkte  $(a_1, b_1, p_1)$ ,  $(a_2, b_2, p_2)$ ,  $(a_3, b_3, p_3)$ ,  $(a_4, b_4, p_4)$  gehenden Ebenen in Kartesischen Koordinaten im  $R_3$ .

Wenn wir den Punkt  $(a_4, b_4, p_4)$  wie oben ändern und für  $(a_4, b_4, p_4)$  etwa  $(x, y, z)$  setzen, so erhalten wir aus (2)

$$(3) \quad \begin{array}{cccc} a_1 & b_1 & p_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & p_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & p_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{array} = 0,$$

dies ist eine Gleichung der Ebene, welche durch die Punkte  $(a_1, b_1, p_1)$ ,  $(a_2, b_2, p_2)$ ,  $(a_3, b_3, p_3)$  hindurchgeht.

Anstatt  $K_0$  betrachten wir andere Grundkreise  $\bar{K}_0$ ,  $\bar{\bar{K}}_0$ ,  $\bar{\bar{\bar{K}}}_0$ , dann erhalten wir drei Gleichungen der Ebene wie (3), also bekommen wir vier Gleichungen der Ebenen im  $R_3$ , welche einen Tetraeder bilden, dessen Kante den gemeinschaftlichen senkrechten Kreisen der  $K_0$ ,  $\bar{K}_0$ ,  $\bar{\bar{K}}_0$ ,  $\bar{\bar{\bar{K}}}_0$  zugeordnet ist.

Nun haben wir den folgenden **Satz**:

*In einem Tetraeder gehen sechs Ebenen, die durch die Kante und den der Kante gegenüberliegenden Mittelpunkt gehen, durch einen Punkt.*

Aus diesem Satz erhalten wir den folgenden:

*Wir nehmen einen Kreis  $K_1$ , der zu einem Kreis  $K_i$  senkrecht ist, wo sich  $K_1$  zu den Kreisen*

$$K_j, K_k \quad (i, u = 1, 2, 3, 4)$$

*senkrecht verhält, so können wir einen Kreis finden, wie er zu allen  $K_i$  senkrecht ist.*

<sup>1</sup> (1) NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ. Vol. 34 (1931), p. 190.

## (5)

Man kann

$$(1) \quad \xi^a [a = I, II, \quad VI]$$

als Viereck im  $R_3$  betrachten.

Wir können ein neues Viereck

$$(2) \quad \xi^* = \sum_{\beta=I}^{VI} c_{\beta}^* \xi^{\beta} [\alpha = I, II \quad \dots \quad VI]$$

als Linearkombinationen der  $\xi^*$  mit Koeffizienten  $c_{\beta}^*$  einführen, und dann ebenfalls mit der  $\xi^*$  unsern Kreis darstellen.

Soll ein Ausdruck in den Koordinaten der Kugeln  $\xi^*$ ,  $\eta^*$ ,  $\zeta^*$ ,  $[I, II, \quad , IV]$ , mit deren Hilfe wir eine Anzahl von vier Punkten festlegen, nur von der geometrischen Figur der vier Punkte abhängen, nicht aber von den sie festlegenden Kugeln, so muss er unverändert bleiben bei Substitutionen von der Art (2).

Wir wollen (2) auch die Büscheltransformationen der vier Punkte nennen.

Für die Behandlung der Geometrie der vier Punkte im Raum erweist es sich als zweckmässig, diese in der angegebenen Weise zunächst durch ganz beliebige sechs Kugeln darzustellen.

Bilden wir die skalaren Produkte aller dieser Kugeln, so können wir aus ihnen das vollständige Invariantensystem der Figur der gegebenen Kugeln gewinnen.

Um die Invarianten des Vierecks zu bekommen, haben wir aus diesen Invarianten noch die Ausdrücke zu bilden, die sich bei den Substitutionen (2) nicht ändern.

Betrachten wir nun ein Viereck  $\xi^*$ .

Bilden wir das System der Skalarprodukte

$$(3) \quad (\xi^* \xi^{\beta}) = A^{*\beta},$$

so haben wir in  $A^{*\beta}$  ein Grössensystem, das sich nach (2) in folgender Weise substituiert:

$$(4) \quad \bar{A}^{*\beta} = c_{\beta}^* c_{\gamma}^{\beta} A^{\gamma\delta} [\bar{A}^{*\beta} = (\xi^* \xi^{\beta})].$$

Hier laufen alle Indizes von I bis VI, und es sind über doppelt vorkommende Indizes auf der rechten Seite zu summieren.

Für die Determinante  $A = |A^{*\beta}|$  bestehen

$$(5) \quad \bar{A} = |c_{\beta}^*|^2 \cdot A,$$

$$(6) \quad A > 0.$$

Wir betrachten ein Paar von Viereck  $V$  und  $\tilde{V}$ , die durch die beiden Kugelpaare  $\xi^a$  und  $\tilde{\xi}^{\lambda}$  [ $\alpha, \lambda = \text{I, II, } \dots, \text{VI}$ ] dargestellt sind.

Wir definieren

$$(7) \quad \tilde{A}^{\lambda\mu} = (\tilde{\xi}^{\lambda} \tilde{\xi}^{\mu})$$

mit

$$(8) \quad \tilde{A}^{\lambda\mu} = \tilde{A}^{\mu\lambda},$$

$$(9) \quad A = |\tilde{A}^{\lambda\mu}| > 0.$$

Dann haben wir für  $\tilde{V}$  die Büscheltransformation

$$(10) \quad \tilde{\xi}^{\lambda} = \tilde{c}_{\mu}^{\lambda} \tilde{\xi}^{\mu}$$

zu berücksichtigen.

Die  $\tilde{c}_{\mu}^{\lambda}$  in (10) sind aber von den  $c_{\beta}^{\alpha}$  in (2) völlig unabhängige neue Grössen.

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix ist:

$$(11) \quad ||\xi^{\text{I}}, \xi^{\text{II}}, \dots, \xi^{\text{VI}}, \tilde{\xi}^{\text{I}}, \tilde{\xi}^{\text{II}}, \dots, \tilde{\xi}^{\text{VI}}|| \equiv 0,$$

in der eine lineare Beziehung der Form

$$(12) \quad \sigma_{\alpha} \xi^{\alpha} = \tilde{\sigma}_{\lambda} \tilde{\xi}^{\lambda}$$

besteht.

Jetzt ist unsere Untersuchung<sup>(1)</sup> so gut wie die im Kreise im  $R_3$ .

(12) bedeutet aber, dass es eine Kugel

$$(13) \quad x = \sigma_{\alpha} \xi^{\alpha} = \tilde{\sigma}_{\lambda} \tilde{\xi}^{\lambda}$$

gibt, auf der beide Vierecke liegen.

## (6)

Betrachten wir die Kugelscharen im  $R_3$

$$(1) \quad \rho^{\alpha} = p^{\alpha} \xi^{\alpha} + q^{\alpha} \eta^{\alpha} \quad [\alpha = \text{I, II}],$$

wo  $p^{\alpha}, q^{\alpha}$  die skalaren Grössen bedeuten.

Alle Kugeln  $\zeta^{\alpha}$ , die sich linear aus den  $\xi^{\alpha}, \eta^{\alpha}$  kombinieren lassen, gehen durch denselben Schnittkreis  $\{\xi^{\alpha}, \eta^{\alpha}\}$ .

$$(2) \quad \lambda_1 \xi^{\text{I}} + \lambda_2 \xi^{\text{II}} + \lambda_3 \eta^{\text{I}} + \lambda_4 \eta^{\text{II}} = 0$$

ist die Bedingung dafür, dass zwei Kreispaaire

$$\{\xi^{\text{I}}, \eta^{\text{I}}\}, \{\xi^{\text{II}}, \eta^{\text{II}}\}$$

<sup>(1)</sup> MATSUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (I), Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Vol. V, S. 100.

auf einer Kugel liegen, oder (2) ist die Bedingung dafür, dass zwei Kreispaaire \*

$$\{\xi^I, \xi^{II}\}, \{\eta^I, \eta^{II}\}$$

auf einer Kugel liegen, wo

$$\lambda_i [i = 1, 2, 3, 4]$$

beliebige skalare Zahlen sind.

Also folgt der

**Satz:** Wenn die Kreispaaire

$$\{\xi^I, \eta^I\}, \{\xi^{II}, \eta^{II}\}$$

auf einer Kugel liegen, dann liegen die Kreispaaire

$$\{\xi^I, \xi^{II}\} \quad \{\xi^I, \eta^{II}\}$$

auch auf einer Kugel.

(7)

Die beiden Kreisflächen

$$(1) \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u_1, u_2)$$

und

$$(2) \quad \bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}(v_1, v_2)$$

seien durch die Gleichung

$$(3) \quad v_a = v_a(u_1, u_2)$$

wo die beiden Funktionen  $v_a(u_1, u_2)$  alle Eigenschaften einer zulässigen Parametertransformation haben, aufeinander abgebildet.

Es seien  $P(u_1, u_2)$  und  $Q(v_1, v_2)$  entsprechende Punkte. Zwischen den beiden Büscheln der Richtungen  $du_1:du_2$  in  $P$  und  $dv_1:dv_2$  in  $Q$  besteht die homogene lineare, also projektive Verwandtschaft

$$(4) \quad dv_a = \frac{\partial v_a}{\partial u_b} du_b,$$

woraus folgt, dass je vier Richtungen des Büschels  $P$  auf vier Richtungen des Büschels  $Q$  abgebildet werden, deren Doppelverhältnisse miteinander übereinstimmen.

(8)

Wir betrachten uns nun

$$(1) \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u'_1, u_2), \quad t \equiv u_1, \quad t' \equiv u_2$$

der beiden unabhängigen Veränderlichen oder Parameter  $u_1$  und  $u_2$ .

Denken wir uns eine der beiden Veränderlichen, etwa  $u_1$  festgehalten,

so wird der Punkt  $P$  beim Variieren von  $u_2$  eine Kurve auf unserer Kreisfläche beschreiben, die wir eine Kurve  $u_1 = \text{const.}$ , eine  $u_2$ -Kurve oder noch kürzer eine 2-Kurve nennen wollen.

Geben wir  $u_1$  einen anderen Wert, so werden wir derartig auch eine andere 2-Kurve bekommen, und wenn wir der Veränderlichen  $u_1$  nach und nach alle Werte des Definitionsbereiches erteilen, so erhalten wir eine Schar von 2-Kurven, die eine Kreisfläche oder genauest ein Kreisflächenstück erfüllen.

Halten wir umgekehrt  $u_2$  fest, so erhalten wir eine Kurve  $u_2 = \text{const.}$  oder eine 1-Kurve und für alle Werte von  $u_2$  des Definitionsbereiches eine Schar von 1-Kurven, die offenbar dasselbe Kreisflächenstück erfüllen.

Es kann aber vorkommen, dass sich z. B. für verschiedene Werte von  $u_1$  immer dieselbe 2-Kurve ergibt und umgekehrt, d. h., dass (1) die Parameterdarstellung einer Kurve, nicht einer Fläche ist.

Das tritt offenbar dann ein, wenn die  $\mathfrak{x}$  zusammengesetzte Funktionen von der Form  $f_i(t(u_1, u_2))$  sind, also eigentlich nur von einer Veränderlichen  $t$  abhängen.

Betrachten wir einmal einen Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $\mathfrak{x}$ , der vermöge (1) einem Wertepaar  $u_1, u_2$  zugeordnet ist. Durch diesen Punkt geht je eine 1- und 2-Kurve, die bestimmt nicht zusammenfallen, wenn die Richtungen ihrer Tangenten verschieden sind.

Diese Richtungen sind aber durch die Vektoren  $\partial \mathfrak{x} / \partial u_1$  und  $\partial \mathfrak{x} / \partial u_2$  gegeben, und sind verschieden, wenn diese Vektoren voneinander linear unabhängig sind, eine Bedingung, die wir in der Form

$$(2) \quad \varepsilon_{ikl} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_1} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_2} \neq 0$$

schreiben können.

Solange es sich in (1) um reelle Funktionen handelt, können wir (2) auch durch

$$(3) \quad \varepsilon_{ikl} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_1} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_2} \cdot \varepsilon_{ilm} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_1} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_2} \neq 0$$

ersetzen.

Führen wir durch

$$(4) \quad u_a = \varphi_a(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$$

neue Parameter ein, so werden wir verlangen müssen, dass die inverse Transformation

$$(5) \quad \bar{u}_a = \varphi_a(u_1, u_2)$$

existiert.

Aus (4) und (5) folgen die Identitäten

$$(6) \quad u_a \equiv \varphi_a(\psi_1 \psi_2) \text{ und } \bar{u}_a \equiv \psi_a(\varphi_1 \varphi_2);$$

aus der ersten ergibt sich durch Differentiation

$$(7) \quad \frac{\partial u_a}{\partial \bar{u}_k} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial u_\beta} = \delta_{a\beta},$$

wo die  $\delta_{a\beta} = +1$  oder  $0$  ist, je nachdem die beiden Indizes gleich oder verschieden sind.

Wegen (7) ist<sup>(1)</sup>

$$(8) \quad \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\bar{u}_1, \bar{u}_2)} \cdot \frac{\partial(\bar{u}_1, \bar{u}_2)}{\partial(u_1, u_2)} = 1,$$

wo

$$(9) \quad \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\bar{u}_1, \bar{u}_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1} & \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1} & \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2} \end{vmatrix}.$$

Wir nehmen nun an, dass die inverse Transformation existiert, so ist<sup>(1)</sup>

$$(10) \quad \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\bar{u}_1, \bar{u}_2)} \neq 0.$$

### (9)

Wir betrachten vier Kugelbüscheln

$$(1) \quad \mathfrak{x} + \lambda_i \mathfrak{y}, i=1, 2, 3, 4,$$

wobei  $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$  zwei feste Kugeln sind, dann hat das Doppelverhältniss von vier Kugeln (1) des Büschels  $(\mathfrak{x} \mathfrak{y})$  den Wert

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3} : \frac{\lambda_4 - \lambda_2}{\lambda_4 - \lambda_3}.$$

### (10)

Betrachten wir eine Kreisfläche, so ist die Gleichung der Minimallinien:

$$(1) \quad (\theta_i \theta_i) dt^2 + 2(\theta_i \theta_r) dt d\tau + (\theta_r \theta_r) d\tau^2 = 0.$$

Wir bezeichnen nun mit  $\zeta$  den Winkel, den die geodätischen Linien des angenommenen parallelen Systems mit den Kurven  $\tau = \text{const.}$  bilden, und definieren die Gleichung

<sup>(1)</sup> DUSCHER-MAYER: Lehrbuch der Differentialgeo. II.

$$(2) \quad \tan \varphi = \frac{\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_r \theta_r) - (\theta_i \theta_r)^2} d\tau}{(\theta_i \theta_i) dt + (\theta_r \theta_r) d\tau}.$$

(11)

Ist die Funktion  $\varphi(t, \tau)$  bekannt, so ergibt sich die Gleichung dieser geodätischen Linie durch Integration der Differentialgleichung<sup>(1)</sup>

$$(3) \quad (\theta_i \theta_i) \sin \varphi dt + ((\theta_r \theta_r) \sin \varphi - \sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_r \theta_r) - (\theta_i \theta_r)^2} \cos \varphi) d\tau = 0.$$

Ebenso lässt sich mittels Quadraturen die Differentialgleichung der orthogonalen Grenzkreise

$$(4) \quad (\theta_i \theta_i) \cos \varphi dt + ((\theta_r \theta_r) \cos \varphi + \sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_r \theta_r) - (\theta_i \theta_r)^2} \sin \varphi) d\tau = 0$$

integrieren.<sup>(1)</sup>

(12)

(i) Es wird in der Kreisfläche zur Vereinfachung<sup>(2)</sup>

$$\sqrt{\frac{(\theta_r \theta_r)}{(\theta_i \theta_i)}} = a, \sqrt{\frac{(\theta_i \theta_i)}{(\theta_r \theta_r)}} = b = \frac{1}{a}$$

und demgemäss

$$L(u) \equiv a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$$

in Lichtensteins Arbeit gesetzt.

(ii) Wenn unsere Kreisfläche eine Kugel ist, so kann man setzen als Minimallinien

$$dt^2 + (\theta_r \theta_r) d\tau^2$$

d. h.  $\frac{dt}{d\tau} = \pm \sqrt{-1} \sqrt{(\theta_r \theta_r)}$

weil sich aus

$$\xi = \sin x \sin y, \quad \eta = \sin x \cos y, \quad \zeta = \cos x$$

ergibt:

$$E = \sum \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = 1, \quad F = \sum \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = 0, \quad G = \sum \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = \sin^2 x.$$

(1) Vergl. LUKAT, M.: BIANCHIS Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig und Berlin (1910) S. 444.

(2) LICHTENSTEN, L.: Beweis des Satzes, dass jedes hinreichend kleine, im wesentlichen stetig gekrümmte, singularitätenfreie Flächenstück auf einen Teil einer Ebene zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich abgebildet werden kann, Akad. der Wiss. vom Jahre 1911.

## (13)

Man kann leicht wissen den folgenden<sup>(1)</sup>

**Satz:** Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Parameterkurven auf Kreisflächen isometrische (isotherme) Linien sind, ist die, dass für alle Wertpaare  $t, \tau$  die Gleichungen

$$\frac{(\theta_i, \theta_i)}{(\theta_\tau, \theta_\tau)} = \frac{\psi(t)}{\phi(\tau)}, \quad (\theta_i, \theta_\tau) = 0$$

bestehen, wo  $\psi(t)$  nur von  $t$ ,  $\phi(\tau)$  nur von  $\tau$  abhängt. Sind ausserdem  $t$  und  $\tau$  thermische Parameter, so ist

$$(\theta_i, \theta_i) = (\theta_i, \theta_\tau).$$

## (14)

Der Ort des Mittelpunktes  $w$  von  $v, \bar{v}$  ist mit

$$(1) \quad w = \frac{1}{2}(v + \bar{v})$$

gegeben.

Aus (1) ergibt sich<sup>(2)</sup>

$$(2) \quad \begin{aligned} w_\sigma &= \frac{1}{2}(v_\sigma + \bar{v}_\sigma) = -\left(\frac{c + \bar{c}}{2}\right) \xi_\sigma \\ &= -\left(\frac{c + \bar{c}}{2}\right) \cdot \xi_i \cdot \rho = -\left(\frac{c + \bar{c}}{2}\right) \cdot \xi_i \cdot \frac{dt}{d\sigma}. \end{aligned}$$

wenn  $dt/d\sigma = 0$  ist, so folgt  $w_\sigma = 0$ , d. h.  $w$  ist ein Punkt.

## (15)

Wenn zwei Tangenten zu zwei Kurven  $v$  bzw.  $\bar{v}$  mit der Länge bzw.  $\lambda, \mu$  von den Berührungspunkten sich schneiden lassen, so folgt

$$(1) \quad v + \lambda v_\sigma = \bar{v} + \mu \bar{v}_\sigma$$

oder

$$(2) \quad v - \lambda c \xi_\sigma = \bar{v} - \mu \bar{c} \xi_\sigma,$$

d. h.

$$(3) \quad v - \bar{v} = (\lambda c - \mu \bar{c}) \xi_\sigma$$

<sup>(1)</sup> KOMMERELL, V. und KOMMERELL, K.: Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen, II Band, Berlin und Leipzig (1921) S. 71.

<sup>(2)</sup> THOMSON, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV Bd. (1926), S. 126.



oder

$$(4) \quad \xi_{\sigma} = \frac{v - \bar{v}}{\lambda c - \mu \bar{c}},$$

wo  $\lambda, \mu$  zwei Parameter sind.<sup>(1)</sup>

In diesem Falle lassen sich  $v, \bar{v}, v_{\sigma}$  und  $\bar{v}_{\sigma}$  folgendermassen kombinieren:

$$(5) \quad \begin{cases} \left( \frac{v - \bar{v}}{\lambda c - \mu \bar{c}} \right)_{\sigma} = - \int \left( \frac{v - \bar{v}}{\lambda c - \mu \bar{c}} \right) d\sigma + \bar{c} v + c \bar{v}, \\ v_{\sigma} = -c \left( \frac{v - \bar{v}}{\lambda c - \mu \bar{c}} \right), \\ \bar{v}_{\sigma} = -\bar{c} \left( \frac{v - \bar{v}}{\lambda c - \mu \bar{c}} \right). \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{v - \bar{v}}{\lambda c - \mu \bar{c}} = \xi_i \frac{dt}{d\sigma} = \xi_i \cdot \frac{1}{(\xi_i, \xi_i)}, \\ \frac{d\sigma}{dt} = (\xi_i, \xi_i) = \frac{1}{\rho}. \end{cases}$$

(16)

Wir betrachten uns nun den Kugelbüschel

$$(1) \quad \mathfrak{x} + i \mathfrak{y}$$

wo  $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$  zwei reelle Kugeln in  $R_3$  und  $i = \sqrt{-1}$  und (1) eine Kugel ist, so folgt

$$(2) \quad 1 = (\mathfrak{x} \mathfrak{x}) - (\mathfrak{y} \mathfrak{y}) + 2i (\mathfrak{x} \mathfrak{y})$$

d. h.

$$(3) \quad (\mathfrak{x} \mathfrak{x}) = 1 + (\mathfrak{y} \mathfrak{y}), (\mathfrak{x} \mathfrak{y}) = 0.$$

Aus der letzten Gleichung von (3) kann man wissen, dass zwei Kugeln  $\mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{y}$  zueinander senkrecht sein müssen.

Gleichfalls bezeichnet

$$(4) \quad \mathfrak{x} + i \mathfrak{y} + \varepsilon \mathfrak{z}$$

im allgemeinen zwei Punkte in  $R_3$ , wo  $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$  drei reelle Kugeln in  $R_3$  und  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\varepsilon$  duale Zahlen sind.

Aus (4) ergibt sich

$$(5) \quad (\mathfrak{x} \mathfrak{x}) - (\mathfrak{y} \mathfrak{y}) + 2i (\mathfrak{x} \mathfrak{y}) + 2\varepsilon (\mathfrak{x} \mathfrak{z}) + 2i\varepsilon (\mathfrak{y} \mathfrak{z}) = 0,$$

<sup>(1)</sup> THOMSEN, G.: Über konforme Geometrie II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV Bd. (1926) S. 127.

so folgt

$$(6) \quad (\xi \xi) = (\eta \eta), (\xi \eta) = -(\xi \zeta), (\xi \zeta) = 0.$$

Aus (6) kann man wissen, dass der Winkel zwischen  $\xi$  und  $\eta$  gleich zu dem Winkel zwischen  $\eta$  und  $\zeta$  gegen Vorzeichen ist, und  $\xi$  zu  $\zeta$  senkrecht sein muss.

### (17)

Aus einer Formel von Thomsen ergibt sich<sup>(1)</sup>

$$(1) \quad \tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \left( \frac{dt}{d\sigma} \right) \\ = \frac{1}{3} \frac{d^2 t}{d\sigma^2} \frac{d\sigma}{dt},$$

weil

$$(2) \quad \tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{dt}$$

besteht.<sup>(2)</sup>

Für den Scheitel von der Kurve  $\eta$  ergibt sich

$$(3) \quad \frac{d^2 t}{d\sigma^2} \cdot \frac{dt}{d\sigma} = 0,$$

daraus folgt

$$(4) \quad t = A \sigma + B,$$

oder

$$(5) \quad \sigma = C,$$

wo  $A$ ,  $B$  und  $C$  Konstanten sind.<sup>(3)</sup>

### (18)

Aus<sup>(4)</sup>

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = T^{11} \rho_1^2 + 2T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2$$

(1) MATSUMURA, S.: Über affinegeometrischen Satz und die Deviation ebener Kurven, Tôhoku Math. Journ. 36 (1933).

(2) TAKASU, T.: Vierscheitelsatz in der Lieschen höheren Kugelgeometrie, Tôhoku Math. Journ. 38, S. 300.

(3) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV Bd. S. 127.

(4) MATSUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (V), Mem. of the Fac of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ. Vol. V (1933) S. 326.

ergibt sich

$$(2) \quad \cos^2 \varphi = \left( \sqrt{T^{11}} \rho_1 + \frac{T^{12} + \sqrt{(T^{12})^2 - 4 T^{11} T^{22}}}{2\sqrt{T^{11}}} \rho_2 \right) \\ \times \left( \sqrt{T^{11}} \rho_1 + \frac{T^{12} - \sqrt{(T^{12})^2 - 4 T^{11} T^{22}}}{2\sqrt{T^{11}}} \rho_2 \right)$$

so folgt

$$\rho_1 : \rho_2 = T^{12} + \sqrt{(T^{12})^2 - 4 T^{11} T^{22}} : -2 T^{11}$$

oder

$$\rho_1 : \rho_2 = T^{12} - \sqrt{(T^{12})^2 - 4 T^{11} T^{22}} : -2 T^{11},$$

dann muss

$$\cos^2 \varphi = 0$$

sein.

### (19)

Wir betrachten uns nun einen Kreis  $\eta$  in THOMSENS Arbeit,<sup>(1)</sup> so folgt

$$(1) \quad \eta = \cos \alpha \cdot \xi + \sin \alpha \cdot \xi',$$

so ist

$$(2) \quad \eta = 2(\eta \xi) \xi - \eta$$

ein Kreis der zu  $\eta$  in bezug auf den Kreis  $\xi$  inversen Kreise.

Aus (1), (2) ergibt sich

$$(3) \quad \eta = \xi \cos \alpha - \xi' \sin \alpha.$$

Aus (1), (3) haben wir

$$(4) \quad \begin{aligned} \eta \eta &= \xi^2 \cos^2 \alpha - \xi'^2 \sin^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= \cos 2 \alpha, \end{aligned}$$

so folgt der

**Satz:** Der Winkel zwischen  $\eta$ ,  $\eta$  ist  $2 \alpha$

### (20)

Betrachten wir zwei Kreise  $\mathfrak{R}$ ,  $\overline{\mathfrak{R}}$  und eine Kugel  $\mathfrak{g}$  in  $R_3$ . Ist

$$(1) \quad \eta = \rho \cdot \xi^a$$

eine normierte Kugel durch  $\mathfrak{R}$  mit

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV Bd. (1925) S. 132.

$$(2) \quad \eta \, \eta = \rho_a \, \rho_\beta \, A^{a\beta} = 1,$$

so muss

$$(3) \quad \cos^2 \varphi = \rho_a \, \rho_\beta \, T^{a\beta}, \quad (4) \quad \cos \psi = (\eta \, \mathfrak{z}) = \rho_a \, (\xi^a \, \mathfrak{z})$$

sein, wo  $\varphi$  den Winkel zwischen  $\eta$  und  $\mathfrak{R}$  und  $\psi$  den Winkel zwischen  $\eta$  und  $\mathfrak{z}$  bedeutet.

Wenn  $\psi = \varphi$ , so

$$(5) \quad T^{a\beta} = (\xi^a \, \mathfrak{z})(\xi^a \, \mathfrak{z}).$$

(5) ist die Bedingung dafür, dass  $\overline{\mathfrak{R}}$  parallel zu  $\mathfrak{z}$  ist.

Wenn  $\psi + \varphi = \pi/2$ , so

$$\begin{aligned} \cos(\psi + \varphi) &= 0, \\ \cos \varphi \cos \psi &= \sin \varphi \sin \psi, \\ 1 &= \tan^2 \varphi \cdot \tan^2 \psi, \end{aligned}$$

d. h.

$$(6) \quad 1 = \frac{(A^{a\beta} - T^{a\beta}) \rho_a \rho_\beta}{T^{a\beta} \rho_a \rho_\beta} \cdot \frac{((A^{a\beta} - (\xi^a \, \mathfrak{z})(\xi^a \, \mathfrak{z})) \rho_a \rho_\beta}{(\xi^a \, \mathfrak{z})(\xi^a \, \mathfrak{z}) \rho_a \rho_\beta}$$

(6) ist die Bedingung dafür, dass

$$\psi + \varphi = \pi/2$$

ist.

Aus (5) kann man wissen, dass, wenn alle Kreise  $\overline{\mathfrak{R}}, \overline{\mathfrak{R}}, \dots$  in  $R_3$  zu einer Kugel  $\mathfrak{z}$  parallel sind, so folgt

$$(7) \quad T^{a\beta} = \overline{T}^{a\beta} = \dots = (\xi^a \, \mathfrak{z})(\xi^a \, \mathfrak{z})$$

Wenn die Kugeln  $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}, \mathfrak{z}, \dots$  in  $R_3$  zum Kreis  $\mathfrak{R}$  parallel sind, so folgt

$$(8) \quad (\xi^a \, \mathfrak{z})(\xi^a \, \mathfrak{z}) = (\xi^a \, \mathfrak{z})(\xi^a \, \mathfrak{z}) = \dots = T^{a\beta}.$$

Wenn die Kreise  $\mathfrak{z}^{\gamma}, \mathfrak{z}^{\delta}, \dots$  in  $R_3$  zueinander parallel sind, so folgt

$$(\xi^a \, \mathfrak{z}^{\gamma})(\xi^a \, \mathfrak{z}^{\gamma}) = (\xi^a \, \mathfrak{z}^{\delta})(\xi^a \, \mathfrak{z}^{\delta}) = \dots$$

(21)

Wir betrachten uns nun eine Kreisfläche, das Quadrat der Masszahl der Länge eines Linienelementes von dem Flächenstücke sei durch die Gleichung

$$(1) \quad ds^2 = \frac{1}{\lambda(t, \tau)} \{ (\theta_i \, \theta_i) dt^2 + 2 (\theta_i \, \theta_r) dt d\tau + (\theta_r \, \theta_r) d\tau^2 \}$$

dargestellt.

Die Möglichkeit der konformen Abbildung wird dargetan, sobald es gelingt, zwei reelle, mit ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung eindeutige und stetige Funktionen  $u(t, \tau)$  und  $v(t, \tau)$  der Gleichung

$$(2) \quad \mu \{ (\theta_i, \theta_i) dt^2 + 2 (\theta_i, \theta_r) dt d\tau + (\theta_r, \theta_r) d\tau^2 \} = du^2 + dv^2$$

zu bestimmen, in welcher der Multiplikator  $\mu$  eine wesentlich positive, eindeutige und stetige Funktion der beiden reellen Argumente  $t$  und  $\tau$  bezeichnet, wo  $\lambda$ ,  $(\theta_i, \theta_i)$ ,  $(\theta_i, \theta_r)$  und  $(\theta_r, \theta_r)$  eindeutig und stetig sind.

Für die Gleichung (2) kann man auch setzen:

$$(3) \quad \nu \left\{ \sqrt{(\theta_i, \theta_i)} dt + \frac{(\theta_i, \theta_r) + i \sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2}}{\sqrt{(\theta_i, \theta_i)}} d\tau \right\} = du + i dv,$$

wo der Faktor  $\nu$  eine von Null verschiedene, eindeutige und stetige komplexe Funktion der reellen Argumente  $t$  und  $\tau$  bezeichnet.

Aus der Gleichung (3) werden die weiteren Relationen

$$(4) \quad \begin{cases} \nu \sqrt{(\theta_i, \theta_i)} = \frac{\partial u}{\partial t} + i \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \nu \frac{(\theta_i, \theta_r) + i \sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2}}{\sqrt{(\theta_i, \theta_i)}} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + i \frac{\partial v}{\partial \tau}, \\ (\theta_i, \theta_i) \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} + i \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) = (\theta_i, \theta_r) + i \sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + i \frac{\partial v}{\partial t} \right) \end{cases}$$

abgeleitet.

Die zuletzt angegebene Beziehung führt zu den beiden Gleichungen

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{(\theta_i, \theta_r) \frac{\partial u}{\partial t} - (\theta_i, \theta_r) \frac{\partial u}{\partial \tau}}{\sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{(\theta_r, \theta_r) \frac{\partial u}{\partial t} - (\theta_r, \theta_i) \frac{\partial u}{\partial \tau}}{\sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2}}. \end{cases}$$

Aus den Formeln (5) ergibt sich, wenn vorausgesetzt wird, dass die Funktion  $u$  auch noch stetig partielle Ableitungen zweiter Ordnung hat, die partielle Differentialgleichung

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{(\theta_i, \theta_r) \frac{\partial u}{\partial \tau} - (\theta_r, \theta_i) \frac{\partial u}{\partial t}}{\sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{(\theta_i, \theta_r) \frac{\partial u}{\partial t} - (\theta_i, \theta_i) \frac{\partial u}{\partial \tau}}{\sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2}} \right) = 0.$$

Setzen wir zur Vereinfachung

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{(\theta_r, \theta_r)}{\sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2}} = a, \\ \frac{(\theta_i, \theta_i)}{\sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2}} = b, \\ - \frac{(\theta_i, \theta_r)}{\sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2}} = d \end{cases}$$

in (6), so erhält die partielle Differentialgleichung

$$(8) \quad a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2d \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \tau} + b \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial d}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial u}{\partial \tau} \left( \frac{\partial b}{\partial \tau} + \frac{\partial d}{\partial t} \right) = 0.$$

Hierbei ist

$$(9) \quad ab - d^2 = 1.$$

In seiner Abhandlung beschäftigt sich Levi mit der Bestimmung einer Grundleistung<sup>(1)</sup> der Differentialgleichung (8).

## (22)

Wir wenden uns zur LIESCHEN höheren Kreisgeometrie.

Sind  $\xi(s)$  ( $(\xi\xi)_s = 0$ ) die pentazyklischen Kreiskoordinaten des Elementes einer Schar von doppelt orientierten Kreisen, die zwei "Kurven" als Enveloppen von doppelt orientierten Kreisen

$$(1) \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s), ((\mathfrak{x}\mathfrak{x})_s = 0); \bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}(s), ((\bar{\mathfrak{x}}\bar{\mathfrak{x}})_s = 0)$$

umhüllen, und  $s$  die auf die Kreisscharen  $\xi(s)$  bezogene LIE-geometrische "Bogenlänge" der "Kurve"  $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ , so gelten die folgenden Ableitungsgleichungen

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d\mathfrak{x}}{ds} = t, \\ \frac{dt}{ds} = \frac{v^2}{R} \xi - \mu^2 \mathfrak{x} - \frac{vi}{R} \eta + ui \mathfrak{x}, \\ \frac{d\xi}{ds} = -\frac{1}{R} t, \\ \frac{d\mathfrak{x}}{ds} = -i \frac{d\mu}{ds} \mathfrak{x} - \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{ds} \mathfrak{x}, \\ \frac{d\eta}{ds} = -i \frac{dv}{ds} \xi - \frac{1}{v} \frac{dv}{ds} \eta, \end{cases}$$

wobei die pentazyklischen Kreiskoordinaten  $\mathfrak{x}$ ,  $\bar{\mathfrak{x}}$  und  $\xi$  durch gewisse Forderungen bis auf konstante Faktoren wohl LIE-geometrisch normiert sind und

$$ds^2(d\mathfrak{x} d\mathfrak{x})_s, d\sigma^2 = (d\xi d\xi)_s, \\ \frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{R} = \left[ \left( \frac{d^2 \mathfrak{x} d^2 \mathfrak{x}}{ds^2 ds^2} \right)_s - \mu^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \text{H-Krümmung},$$

<sup>(1)</sup> Vergl. E. E. LEVI: Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1907, S. 275-317.

$\mu^2 = H$ -Raumkrümmung,

$\nu^2 = H$ -Dualkrümmung,

(3)  $\mathfrak{X} = H$ -absolute Figur, (Kreiskongruenz)  $((\mathfrak{X}\mathfrak{X})_s = 1)$ ,

$\mathfrak{Y} = H$ -dualabsolute Figur, (Kreiskongruenz)  $((\mathfrak{Y}\mathfrak{Y})_s = 1)$ ,

$t = H$ -Normale (Kreiskongruenz),  $((tt)_s = 1)$

ist.<sup>(1)</sup>

Ein beliebiger doppelt orientierter Tangentialkreis einer "Kurve"  $\mathfrak{x}(s)$  lässt sich wie folgt darstellen:

$$(4) \quad \xi(s) = \frac{\mathfrak{y} - \mathfrak{x}}{R}.$$

Aus (2), (4) ergibt sich<sup>(1)</sup>

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\xi \mathfrak{x}) = 0, \\ \left( \xi \frac{d\xi}{ds} \right) = 0, \\ \left( \xi \frac{d^2 \xi}{ds^2} \right) = \frac{1}{R}, \\ \left( \xi \frac{d^3 \xi}{ds^3} \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{R} \right), \\ \dots\dots\dots \\ \left( \xi \frac{d^{n+2} \xi}{ds^{n+2}} \right) = \frac{d^n}{ds^n} \left( \frac{1}{R} \right). \end{array} \right.$$

Wenn  $\frac{d^n \left( \frac{1}{R} \right)}{ds^n} = 0$  besteht, so folgt

$$\left( \xi \frac{d^{n+2} \xi}{ds^{n+2}} \right) = 0$$

und umgekehrt.

$\frac{d^n \left( \frac{1}{R} \right)}{ds^n} = 0$  ist der verallgemeinerte Scheitel der Kurve.

(23)

Wir betrachten hier eine Kreisfläche  $S$ .

<sup>(1)</sup> TAKASU, T.: *Lische Differentialkugelgeo.*, I, Tôhoku Sci. Rep., Vol. 22 (1933).

Die durch einen Punkt auf  $S$  gehenden Minimallinien seien in der Form gegeben durch die Gleichung

$$(1) \quad (\theta_i, \theta_i) dt^2 + 2 (\theta_i, \theta_r) dt d\tau + (\theta_r, \theta_r) d\tau^2 = 0.$$

Wählt man auf den Minimalkreisflächen die Asymptotenlinien<sup>(1)</sup> als Parameterkurven, so ist die Gleichung der Kreispunktpolarkurven

$$(2) \quad (\theta_i, \theta_i) dt^2 - 2 (\theta_i, \theta_r) dt d\tau + (\theta_r, \theta_r) d\tau^2 = 0,$$

während die der Minimalkurven (1) lautet.

Da beide miteinander zusammenfallen, so muss entweder

$$(\theta_i, \theta_i) = (\theta_r, \theta_r) = 0$$

oder

$$(\theta_i, \theta_r) = 0$$

sein. So kann man auch für Kreisflächen sagen:

*Auf Minimalkreisflächen schneiden sich die Asymptotenlinien (oder Minimallinien) senkrecht.*

*Auf Minimalkreisflächen sind die sphärischen Bilder der Minimalkurven die Minimalkurven der Kugel.*

Die Gleichung stellt

$$(3) \quad a_{11} dt^2 + 2 a_{12} dt d\tau + a_{22} d\tau^2 = 0$$

eine Doppelschar von Kurven dar, deren zwei Tangenten im Punkte zu den Tangentenpaaren der Kurven (1) und (2) in demselben Punkte harmonisch sind, wenn die Koeffizienten  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  und  $a_{22}$  den Bedingungen genügen:<sup>(1)</sup>

$$0 = (\theta_r, \theta_r) a_{11} - 2 (\theta_i, \theta_r) a_{12} + (\theta_i, \theta_i) a_{22},$$

$$0 = (\theta_r, \theta_r) a_{11} + 2 (\theta_i, \theta_r) a_{12} + (\theta_i, \theta_i) a_{22}.$$

Durch Elimination von  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  und  $a_{22}$  erhält man

$$(4) \quad \begin{vmatrix} dt^2 & -dt d\tau & d\tau^2 \\ (\theta_r, \theta_r) & -(\theta_i, \theta_r) & (\theta_i, \theta_i) \\ (\theta_r, \theta_r) & (\theta_i, \theta_r) & (\theta_i, \theta_i) \end{vmatrix} = 0.$$

Es seien  $t = \text{const.}$  und  $\tau = \text{const.}$  die Asymptotenlinien, und die eine Schar der Kreispunktpolarkurven habe die Gleichung

$$(\theta_i, \theta_i) dt - \{(\theta_i, \theta_r) + i\sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r)}\} d\tau = 0.$$

Sind dann  $\varphi(t) = \text{const.}$  und  $\psi(\tau) = \text{const.}$  die allgemeinen Integrale der ersten Gleichungen, so muss nach der Voraussetzung sein:

$$(\theta_i, \theta_i) = \rho \varphi'(t); \quad -(\theta_i, \theta_r) - i\sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r)} = \rho \varphi'(\tau)$$

<sup>(1)</sup> Vergl. NEUENDORFF, R.: Über Kreispunktpolarkurven, Inaugural-Dissertation, Leipzig (1908).



Sieht man von dem Falle  $(\theta_i \theta_i) = 0$  oder  $-(\theta_i \theta_i) - i\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_r \theta_r) - (\theta_i \theta_r)^2}$ , d. h.  $(\theta_i \theta_i)(\theta_r \theta_r) \equiv 0$  ab, in welchem die eine oder die andere Schar der Asymptotenlinien mit den Kreispunktpolarkurven zusammenfällt, so kann man durch geeignete Wahl von Funktionen der Parameter dazu gelangen, dass  $\varphi'(\tau) \equiv 1$  und  $\psi'(\tau) \equiv 1$  wird.

Dann bleibt also

$$(\theta_i \theta_i) = -(\theta_i \theta_r) - i\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_r \theta_r) - (\theta_i \theta_r)^2}$$

oder

$$\begin{aligned} (\theta_i \theta_i)^2 + 2(\theta_i \theta_r)(\theta_i \theta_i) + (\theta_i \theta_r)^2 &= -(\theta_i \theta_i)(\theta_r \theta_r) + (\theta_i \theta_r)^2 \\ (\theta_i \theta_i) + (\theta_r \theta_r) + 2(\theta_i \theta_r) &= 0, \end{aligned}$$

da  $(\theta_i \theta_i) \neq 0$  sein sollte.<sup>(1)</sup>

So folgt der

**Satz:** Ist auf einer Kreisfläche neben  $N = N = 0$  auch

$$(\theta_i \theta_i) + (\theta_i \theta_r) + 2(\theta_i \theta_r) = 0,$$

so kann man auf dieser die Asymptotenlinien und eine Schar der Kreispunktpolarkurven durch Quadratur finden. Reelle Flächen dieser Art kann es höchstens mit elliptischer Krümmung geben, wobei  $L, M, N$  die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung bedeuten.

## (24)

Für Kreisfläche besteht der<sup>(2)</sup>

**Satz 1:** Die Tangenten der beiden Parameterlinien in einem Kreisflächenpunkte  $(t, \tau)$  sind dann und nur dann Minimalgeraden, wenn für diesen Punkt die Größen  $(\theta_i \theta_i)$  und  $(\theta_r \theta_r)$  verschwinden.

**Satz 2:** Damit sich die Parameterlinien  $(t)$  und  $(\tau)$  einer Kreisfläche so anordnen lassen, dass sie ein Netz von unendlich kleinen Rhomben bilden, ist notwendig und hinreichend, dass das Verhältnis der beiden Größen  $(\theta_i \theta_i)$  und  $(\theta_r \theta_r)$  gleich dem Verhältnisse aus einer von Null verschiedenen Funktion von  $t$  allein zu einer von Null verschiedenen Funktion von  $\tau$  allein sei.

**Satz 3:** Damit sich die Parameterlinien  $(t)$  und  $(\tau)$  einer Kreisfläche so anordnen lassen, dass sie ein Netz von unendlich kleinen Quadraten bilden, ist notwendig und hinreichend, dass die Fundamentalgrößen  $(\theta_i \theta_i)$ ,  $(\theta_i \theta_r)$ ,  $(\theta_r \theta_r)$  die Bedingung

$$\theta_i \theta_r = 0, \quad \alpha^2(t)(\theta_i \theta_i) = \beta^2(\tau)(\theta_r \theta_r)$$

<sup>(1)</sup> Vergl. (1).

<sup>(2)</sup> Vergl. SCHEFFER, G.: Einführung in die Theorie der Flächen, Berlin und Leipzig (1922) S. 34.

erfüllen.

Hierin bedeutet  $\alpha$  eine von Null verschiedene Funktion von  $t$  allein und  $\beta$  eine von Null verschiedene Funktion von  $\tau$  allein.

**Satz 4:** Dafür, dass sich die Parameterlinien  $(t)$  und  $(\tau)$  einer Kreisfläche zu einem Isthernetze anordnen lassen, in dem  $(t)$  bzw.  $(\tau)$  von Kurve zu Kurve um dieselbe unendlich kleine Grösse wächst, ist notwendig und hinreichend, dass die zugehörigen Fundamentalgrössen  $(\theta_i\theta_i)$ ,  $(\theta_i\theta_\tau)$ ,  $(\theta_\tau\theta_\tau)$  die Bedingungen

$$(\theta_i\theta_i)=(\theta_\tau\theta_\tau), (\theta_i\theta_\tau)=0$$

erfüllen.

(25)

Nehmen wir

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = \frac{T^{ij} \rho_i \rho_j}{A^{ij} \rho_i \rho_j},$$

$$(2) \quad \cos^2 \bar{\varphi} = \frac{\bar{T}^{ij} \rho_i \rho_j}{\bar{A}^{ij} \rho_i \rho_j},$$

so folgt aus (1) (2)

$$(3) \quad 0 = \alpha^2 \bar{\gamma} + 2\alpha\bar{\beta}(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}) + \bar{\alpha}(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma})^2$$

wobei

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha \equiv T^{22} - SA^{22}, \beta \equiv T^{12} - SA^{12}, \gamma \equiv T^{11} - SA^{11}, \\ \bar{\alpha} \equiv \bar{T}^{22} - \bar{S}\bar{A}^{22}, \bar{\beta} \equiv \bar{T}^{12} - \bar{S}\bar{A}^{12}, \bar{\gamma} \equiv \bar{T}^{11} - \bar{S}\bar{A}^{11}, \\ S \equiv \cos^2 \varphi, \bar{S} \equiv \cos^2 \bar{\varphi}. \end{cases}$$

(3) ist die Bedingung zwischen  $\varphi$  und  $\bar{\varphi}$ .

(26)

Nun betrachten wir Transformationen von reziproken Radien

$$(1) \quad \bar{x} = \frac{-x}{x^2 + y^2 + z^2}, \bar{y} = \frac{-y}{x^2 + y^2 + z^2}, \bar{z} = \frac{-z}{x^2 + y^2 + z^2},$$

so folgt

$$(2) \quad \bar{E} = \frac{E}{r^4}, \bar{F} = \frac{F}{r^4}, \bar{G} = \frac{G}{r^4},$$

wo  $E, F, G; \bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ , die Fundamentalgrössen erster Ordnung von Flächen  $(x, y, z)$  bzw.  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  und

$$(3) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

sind.

Für Kreisflächen aus (2) ergibt sich

$$(4) \quad (\overline{\theta_i \theta_i}) = \frac{\bar{\lambda}(\theta_i \theta_i)}{\lambda r^4}, \quad (\overline{\theta_i \theta_\tau}) = \frac{\bar{\lambda}(\theta_i \theta_\tau)}{\lambda r^4}, \quad (\overline{\theta_\tau \theta_\tau}) = \frac{\lambda(\theta_\tau \theta_\tau)}{\lambda r^4}.$$

Damit sich die Parameterlinien  $(t)$  und  $(\tau)$  einer Kreisfläche so anordnen lassen, dass sie ein Netz von unendlich kleinen Quadraten bilden, ist notwendig und hinreichend, dass die Bedingungen

$$(5) \quad (\overline{\theta_\tau \theta_\tau}) = 0, \quad \alpha^2(t)(\overline{\theta_i \theta_i}) = \beta^2(\tau)(\overline{\theta_\tau \theta_\tau})$$

$$\text{d.h. } (6) \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 0, \quad \alpha^2(t)(\theta_i \theta_i) = \beta^2(\tau)(\theta_\tau \theta_\tau)$$

erfüllen.

Hier bedeutet  $\alpha$  eine von Null verschiedene Funktion von  $t$  allein und  $\beta$  eine von Null verschiedene Funktion von  $\tau$  allein.

Aus (6) ergibt sich der

**Satz:** Wenn eine Kreisfläche nach reziproken Radien zur anderen Fläche transformiert wird, so lässt sich ein Netz von unendlich kleinen Quadraten auch zu einem Netz von unendlich kleinen Quadraten transformieren.

### (27)

Wenn in der Kreisfläche die Affinenormal mit der gewöhnlichen Normal zusammenfällt, so folgt<sup>(1)</sup>

$$(1) \quad \rho_v^2(\theta_i \theta_i) + 2\rho_v \rho_u(\theta_i \theta_\tau) + \rho_u^2(\theta_\tau \theta_\tau) = 0$$

wobei

$$(2) \quad K = -\frac{1}{\rho^2}, \quad \rho_v = \frac{\partial \rho}{\partial v}, \quad \rho_u = \frac{\partial \rho}{\partial u},$$

$K$  das Krümmungsmass ist.

Wenn (1) für alle  $\rho_u, \rho_v$  besteht, so muss

$$(3) \quad (\theta_i \theta_i) = 0, \quad (\theta_i \theta_\tau) = 0, \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 0$$

sein.

### (28)

Wir betrachten uns nun die Kurvenscharen

$$t = \text{const.}, \quad \tau = \text{const.}$$

<sup>(1)</sup> SU, B.: Contributions to the Theory of Minimal Surfaces, Tôhoku Math. Journ. 30 (1929) p. 132.

auf einer Kreisfläche.

Die Orthogonaltrajektorien der Kurven

$$t = \text{const.}$$

haben die Gleichung

$$(\theta_i, \theta_r) dt + (\theta_r, \theta_r) d\tau = 0.$$

Für diese Orthogonaltrajektorien ist also

$$d\tau = - \frac{(\theta_i, \theta_r)}{(\theta_r, \theta_r)} dt.$$

(29)

Ist

$$\varphi(t, \tau) = \text{const.}$$

die Gleichung einer Kurvenschar einer Kreisfläche, dann werden deren orthogonale Trajektorien bekanntlich dargestellt durch

$$\left( (\theta_i, \theta_i) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - (\theta_i, \theta_r) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right) dt + \left( (\theta_r, \theta_r) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - (\theta_r, \theta_r) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right) d\tau = 0.$$

Wir betrachten uns eine Kreisfläche  $S$ , so besteht

$$(\theta_i, \theta_i) : (\theta_i, \theta_r) : (\theta_r, \theta_r) = (\overline{\theta_i}, \overline{\theta_i}) : (\overline{\theta_i}, \overline{\theta_r}) : (\overline{\theta_r}, \overline{\theta_r}),$$

wo

$$(\theta_i, \theta_i), (\theta_i, \theta_r), (\theta_r, \theta_r); (\overline{\theta_i}, \overline{\theta_i}), (\overline{\theta_i}, \overline{\theta_r}), (\overline{\theta_r}, \overline{\theta_r})$$

die Fundamentalgrößen von  $S$  bzw.  $\overline{S}$  sind.

$\overline{S}$  ist eine Kreisfläche, die zu  $S$  parallel ist.

(30)

Wir wollen jetzt die Figuren betrachten, die aus einer Gerade  $\xi^*$ , welche durch zwei Punkte

$$(1) \quad \xi^* [\alpha = \text{I, II, III}]$$

hingehen, und einer Kugel  $\eta$  des Raumes bestehen, die wir in normierten Koordinaten

$$(2) \quad \hat{\eta} \hat{\eta} = 1$$

gegeben denken.

Greifen wir eine Kugel

$$(3) \quad \xi = \rho_* \xi^*$$

aus dem Büschel heraus, so ist der Winkel  $\psi$  zwischen  $\xi$  und  $\eta$  nach

$$(4) \quad \cos^2 \psi = \frac{(\eta \, \xi)^2}{(\eta \, \eta)(\xi \, \xi)}$$

durch

$$(5) \quad \cos^2 \psi = \frac{[\rho_a (\xi^a \hat{\eta})]^2}{\rho_a \rho^a}$$

gegeben.

Der Winkel  $\varphi$  des Kreises mit der Kugel  $\eta$  ist nun der kleinste Winkel, den eine durch ihn hindurch gehende Kugel  $\xi$  mit  $\eta$  bilden kann.

Um ihn zu finden, haben wir also  $\cos^2 \psi$  nach (5) als Funktion der variablen Kugel  $z$ , also als Funktion von  $\rho_I$  und  $\rho_{II}$  zu betrachten und das Minimum aufzusuchen.

Aus

$$(6) \quad \frac{\partial (\cos^2 \psi)}{\partial \rho_\gamma} = 0 \quad (\gamma = I, II, III)$$

folgt eine Relation der Form:

$$(7) \quad A^{\gamma\beta} \rho_\beta \text{ prop. } (\xi^\gamma \hat{\eta}).$$

Multiplizieren wir (7) beiderseits mit  $A_{a\gamma}$ , so ergibt sich

$$(8) \quad \rho_a \text{ prop. } (\xi_a \hat{\eta}).$$

Da (5) auf der rechten Seite in den  $\rho_a$  vom Grade Null ist, kommt es auf den Proportionalitätsfaktor nicht an, und durch Einsetzen von (8) in (5) erhalten wir für den Winkel zwischen Gerade und Kugel:

$$(9) \quad \cos^2 \varphi = (\xi_a \hat{\eta})(\xi^a \hat{\eta}).$$

Sollen Gerade und Kugel zueinander senkrecht stehen, so muss

$$(10) \quad \cos^2 \varphi = A_{a\beta} (\xi^a \hat{\eta})(\xi^\beta \hat{\eta}) = 0$$

sein.

Infolge

$$(11) \quad |A_{a\beta}| = 1 : A > 0$$

ist das im Reellen nur möglich, wenn

$$(12) \quad \xi^a \hat{\eta} = 0$$

ist.

### (31).

Wir betrachten uns nun zwei Paare von Punkten

$$(1) \quad \rho = \rho_I \xi^I + \rho_{II} \xi^{II} + \rho_{III} \xi^{III},$$

$$(2) \quad \bar{\rho} = \bar{\rho}_I \bar{\xi}^I + \bar{\rho}_{II} \bar{\xi}^{II} + \bar{\rho}_{III} \bar{\xi}^{III}$$

in  $R_3$ , wo  $\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}, \bar{\xi}^I, \bar{\xi}^{II}, \bar{\xi}^{III}$   
 Kugeln in  $R_3$  und  $\rho_I, \rho_{II}, \rho_{III}, \bar{\rho}^I, \bar{\rho}^{II}, \bar{\rho}^{III}$   
 skare Grössen sind.

$$(3) \quad (\xi^a \bar{\xi}^a) = 0$$

ist die Bedingung dafür, dass Punkte  $\rho$  mit  $\bar{\rho}$  zusammenfallen.

Aus (1) folgt

$$\rho_a \rho_b A^{ab} = 0,$$

wo  $(\xi^a \xi^b) = A^{ab}$  ist.

Wenn  $\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}, \bar{\xi}^I, \bar{\xi}^{II}, \bar{\xi}^{III}$

zueinander senkrecht sind, so folgt

$$(4) \quad \begin{cases} (\xi^a \xi^b) = A^{ab} = \begin{cases} 1 & \text{für } \beta = \alpha \\ 0 & \text{für } \beta \neq \alpha \end{cases} \\ (\bar{\xi}^\lambda \bar{\xi}^\mu) = \bar{A}^{\lambda\mu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \lambda \\ 0 & \text{für } \mu \neq \lambda \end{cases} \end{cases}$$

$\{\mathfrak{G}, \bar{\mathfrak{G}}\}$  bezeichnet ein Viereck in  $R_3$ .

$$(5) \quad \left( \mathfrak{G} \frac{\partial \bar{\mathfrak{G}}}{\partial u_i} \right) = 0$$

bezeichnet ein kleineres Viereck, dessen Gegenseite aus dem Strecken-  
 elemente besteht, wo

$$(6) \quad \begin{cases} \mathfrak{G} = \rho_a \xi^a, \quad \bar{\mathfrak{G}} = \bar{\rho}_\lambda \bar{\xi}^\lambda, \\ A^{ab} \rho_a \rho_b = 0; \quad \bar{A}^{\lambda\mu} \bar{\rho}_\lambda \bar{\rho}_\mu = 0, \quad \bar{\mathfrak{G}} = \bar{\mathfrak{G}}(u_1, u_2) \end{cases}$$

sind.<sup>(1)</sup>

Aus (5) ergibt sich

$$(7) \quad \rho_a \bar{\rho}_\lambda \mathfrak{D}^{a\lambda} = 0,$$

wo

$$(8) \quad \mathfrak{D}^{a\lambda} = (\xi^{a*} \bar{\xi}^\lambda) = -(\xi^a \bar{\xi}^{\lambda*})$$

ist.<sup>(1)</sup>

Zwei Punkte in  $R_3$  werden mit

$$(9) \quad \mathfrak{G} = \rho(t) \xi^a, \quad \text{wo } A^{ab} \rho_a \rho_b = 0$$

ist, dargestellt.

Bezeichnen wir die Differentiation längs der Kurvenscharen mit  $\delta$ ,  
 so werden die zu  $\mathfrak{G}$  benachbarten Punkte gegeben durch

<sup>(1)</sup> Vergl. THOMSEN, G.: Über projektive Flächentheorie, Abh. aus dem Math.  
 Seminar der Hamb. Univ. VI Bd. (1926) S. 249.

$$(10) \quad \mathfrak{G} + \frac{\delta \mathfrak{G}}{\delta t} \delta t = \left( \rho_a + \frac{\delta \rho_a}{\delta t} \delta t \right) \xi^a$$

mit

$$A^{ab} \rho_a \frac{\delta \rho_b}{\delta t} = 0.$$

Zwei doppelte Streckenelemente werden mit

$$(11) \quad \left( \mathfrak{G} \frac{d\bar{\xi}^A}{d\sigma} \right) = 0, \quad \left( \frac{\delta \mathfrak{G}}{\delta t} \frac{d\bar{\xi}^A}{d\sigma} \right) = 0,$$

bezeichnet, wo

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(t), \quad \bar{\mathfrak{G}} = \bar{\mathfrak{G}}(\sigma)$$

sind.

$$(32)$$

Betrachtet man

$$\xi = \gamma + \mu \frac{d\gamma}{d\sigma},$$

so folgt infolge

$$(d\xi \, d\xi) = d\sigma^2 + 2 d\mu \, d\sigma + d\mu^2 + \mu^2 d\sigma^2 \left( \frac{d^2\gamma}{d\sigma^2} \frac{d^2\gamma}{d\sigma^2} \right) = 0$$

und

$$\mu = c - \sigma,$$

dass

$$\left( \frac{d^2\gamma}{d\sigma^2} \frac{d^2\gamma}{d\sigma^2} \right) = 0$$

ist.

So folgt der<sup>(1)</sup>

**Satz:** Ist von der orientierten Dualschmiegunskugel  $\gamma$  um  $(c - \sigma)$  tangentiell entfernt, so berührt die orientierte Kugel  $\xi$  den Schmiegunskugel.

$$(33)$$

Betrachten wir

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = T^{ab} \overset{u}{\rho}_a \overset{u}{\rho}_b$$

<sup>(1)</sup> Vergl. TAKASU, T.: Differentialkugelgeometrie VI, Japanese Journ. of Math. 5 (1928) S. 148.

wieder,<sup>(1)</sup> so entsteht bei Summierung

$$(2) \quad \sum_u^{1, \dots, p} \cos^2 \varphi = \sum_u^{1, \dots, p} T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = {}'T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}.$$

Die Gleichung (1) lässt sich auch schreiben:

$$(3) \quad \cos^2 \varphi = \rho_\alpha \rho_\beta {}'T_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu}.$$

Es seien zwei Tensoren

$$(4) \quad h^{\alpha\beta} = {}'T_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} T^{\lambda\mu},$$

$$(5) \quad {}'h^{\alpha\beta} = T_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} {}'T^{\lambda\mu}.$$

Liegt  $v^r$  in einer Hauptrichtung von  $h^{\alpha\beta}$ , so ist

$$h^{\mu\nu} v^\mu = \lambda v^\nu,$$

oder

$$T_\alpha {}'T_\mu v^\mu = \lambda v^\alpha,$$

woraus folgt:

$${}'T_\beta T_\alpha {}'T_\mu v^\mu = \lambda {}'T_\beta v^\alpha,$$

oder

$${}'h_\alpha ({}'T_\mu v^\mu) = \lambda {}'T_\beta v^\alpha.$$

(34)

Ist  $\eta$  ein Kreis, der unter dem Winkel  $\alpha$  die Enveloppe eines Kreises  $\xi$  schneidet, so folgt<sup>(1)</sup>

$$(1) \quad \eta = \cos \alpha \cdot \xi + \sin \alpha \cdot \xi'.$$

Ist  $\eta$  zu einem Kreis  $z$  senkrecht, so folgt

$$0 = \cos \alpha \cdot (\xi z) + \sin \alpha \cdot (\xi' z),$$

d. h.

$$-\frac{(\xi z)}{(\xi' z)} = \tan \alpha,$$

d. h. (2)

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{(\xi z)}{\sqrt{(\xi z)^2 + (\xi' z)^2}}, \\ \sin \alpha = \frac{(\xi' z)}{\sqrt{(\xi z)^2 + (\xi' z)^2}}. \end{cases}$$

Aus (1), (2) ergibt sich<sup>(2)</sup>

$$\eta = \frac{(\xi z)}{\sqrt{(\xi z)^2 + (\xi' z)^2}} \xi + \frac{(\xi' z)}{\sqrt{(\xi z)^2 + (\xi' z)^2}} \xi'.$$

<sup>(1)</sup> MATSUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (V), Fac. of Sci. and Agr. Taihoku Imp. Univ. Vol. V. S. 305.

<sup>(2)</sup> THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV Bd. (1925) S. 132.



## (35)

Wir betrachten nun die Bestimmung der orthogonalen Trajektorien der die Fläche erzeugenden Kreise.

Die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien der Kurven

$$\tau = \text{const.}$$

auf einer Kreisfläche ist<sup>(1)</sup>

$$(\theta_i, \theta_i) dt + (\theta_i, \theta_\tau) d\tau = 0.$$

Die zu der Kreisflächentangente senkrechte Kreisflächentangente besitze die Richtungskosinus  $n_x, n_y, n_z$ , dann<sup>(2)</sup> erhalten wir

$$n_x = \frac{\left\{ (\theta_i, \theta_i) \frac{\partial x}{\partial \tau} - (\theta_i, \theta_\tau) \frac{\partial x}{\partial t} \right\} \kappa_1 + \left\{ (\theta_i, \theta_\tau) \frac{\partial x}{\partial \tau} - (\theta_\tau, \theta_\tau) \frac{\partial x}{\partial t} \right\} \kappa_2}{\sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_\tau, \theta_\tau) - (\theta_i, \theta_\tau)^2}} \quad u.s.w.$$

Wir betrachten nun ein nicht abwickelbares Kreisflächengebiet mit reellen Asymptotenlinien.

Die Linien mögen den Geraden  $\tau = \text{const.}$  und  $t = \text{const.}$  der  $t, \tau$ -Ebene entsprechen.

Fassen wir die durch den Flächenpunkt  $(t, \tau)$  gehende Asymptotenlinie  $\tau = \text{const.}$  ins Auge, so sind die Koordinaten des zu diesem Punkt gehörenden Mittelpunkts ihrer ersten Krümmung die folgenden<sup>(3)</sup>

$$x_1 = x + \frac{(\theta_i, \theta_i) \left\{ (\theta_i, \theta_i) \frac{\partial x}{\partial \tau} - (\theta_i, \theta_\tau) \frac{\partial x}{\partial t} \right\}}{a_{12} \{ (\theta_i, \theta_i)(\theta_\tau, \theta_\tau) - (\theta_i, \theta_\tau)^2 \}}, \quad u.s.w.$$

<sup>(1)</sup> LILIENTHAL: Vorlesungen über Differentialgeo. II, Leipzig und Berlin (1913), S. 104.

<sup>(2)</sup> l. c. (1) S. 147.

<sup>(3)</sup> l. c. (1) S. 168.

# UEBER FLÄCHEN UND KURVEN (IX)

Sôji MATSUMURA

## (1) Über Raumkurven

1. Neuerdings hat TAKASU den folgenden Satz bewiesen.<sup>(1)</sup>

*Die Dualseitel ist dadurch gekennzeichnet, dass die zwei konsekutiven rektifizierenden Linien zueinander parallel sind.*

Zum Beweisen dieses Satzes benutzt er

$$(1) \quad l = l + dl$$

als die zwei zueinander parallelen konsekutiven Linien, wo 1 die Richtungskosinus der rektifizierenden Linien ist.

Benutzen wir

$$(2) \quad l + \kappa_1 \frac{dl}{d\rho} + \kappa_2 \frac{d^2 l}{d\rho^2} + \dots + \frac{d^n l}{d\rho^n} = l$$

anstatt (1), besteht der obige Satz doch auch.

Um diese Tatsache nach TAKASU zu beweisen, ersetzen wir  $(t)$ ,  $(z)$  und  $(y)$  für die Richtungskosinus der Tangente der Hauptnormale und bzw. der Binormale, so wird 1 durch

$$(3) \quad l = y \cos \rho + t \sin \rho, \quad (P \equiv \tan \rho)$$

gegeben, wo  $P^{-1}$  die entsprechende Dualkrümmung ist.<sup>(2)</sup>

Aus (3) ergibt sich:

$$(4) \quad l'_\rho = -y \sin \rho + t \cos \rho$$

So folgt

$$(5) \quad l + l'_\rho = \sqrt{2} y \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \rho - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \rho \right) + \sqrt{2} t \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \rho + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \rho \right) \\ = \sqrt{2} \left\{ y \cos \left( \rho + \frac{\pi}{4} \right) + t \sin \left( \rho + \frac{\pi}{4} \right) \right\},$$

$$(6) \quad l + l' + (l + l')' = (\sqrt{2})^2 \left\{ y \cos \left( \rho + \left( \frac{\pi}{4} \right)^2 \right) + t \sin \left( \rho + \left( \frac{\pi}{4} \right)^2 \right) \right\},$$

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. XV, No. 4, July, 1935.]

(1) TAKASU, T.: Vierscheitelsatz für Raumkurven, Tôhoku Math. Journ. Vol. 39 (1934) p. 293.

(2) TAKASU, T.: Differential Geometry of curves in the Euclidean Plane Space, I, Tôhoku Sci. Rep., 11 (1922).

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & l + {}_n c_1 l' + {}_n c_2 l'' + \dots + l^{(n)} \\
 & = (\sqrt{2})^n \left\{ \gamma \cos \left( \rho + \left( \frac{\pi}{4} \right)^n \right) + t \sin \left( \rho + \left( \frac{\pi}{4} \right)^n \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Wenn

$$l + {}_n c_1 l' + \dots + l^{(n)} = l,$$

so folgt aus (7)

$$\frac{d\rho}{d\theta} = 0.$$

So wird unser Satz bewiesen.

2. Aus (3) folgen

$$(8) \quad \frac{dl}{d\theta} = (-\gamma \sin \rho + t \cos \rho) \frac{d\rho}{d\theta},$$

$$\begin{aligned}
 (9) \quad \frac{d^2 l}{d\theta^2} &= -\left( z \sin \rho + \frac{z}{P} \cos \rho \right) \frac{d\rho}{d\theta} + (-\gamma \cos \rho - t \sin \rho) \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 \\
 &\quad + (-\gamma \sin \rho + t \cos \rho) \frac{d^2 \rho}{d\theta^2},
 \end{aligned}$$

$$(10) \quad \frac{d^2 l}{d\theta^2} = -z \left( \sin \rho + \frac{\cos \rho}{P} \right) \frac{d\rho}{d\theta} - l \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 + \frac{dl}{d\theta} \frac{d^2 \rho}{d\theta^2}$$

$$\begin{aligned}
 (11) \quad \frac{d^2 l}{d\theta^2} \frac{d\rho}{d\theta} &= -z \left( \sin z + \frac{\cos \rho}{P} \right) \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 - l \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^3 \\
 &\quad + \frac{dl}{d\theta} \cdot \frac{d^2 \rho}{d\theta^2}.
 \end{aligned}$$

Wenn  $\frac{d\rho}{d\theta} = 0$ ,  $\frac{d^2 \rho}{d\theta^2} \neq 0$ , dann  $\frac{dl}{d\theta} = 0$ .

3. Aus (3) folgen

$$(12) \quad \frac{dl}{d\theta} = (-\gamma \sin \rho + t \cos \rho) \frac{d\rho}{d\theta},$$

$$(13) \quad \frac{\frac{dl}{d\theta}}{\frac{d\rho}{d\theta}} = -\gamma \sin \rho + t \cos \rho,$$

infolge deren man erhält:

$$(14) \quad \begin{cases} l \sin \rho + \frac{\frac{dl}{d\theta}}{\frac{d\rho}{d\theta}} \cdot \cos \rho = t, \\ l \cos \rho - \frac{\frac{dl}{d\theta}}{\frac{d\rho}{d\theta}} \cdot \sin \rho = y. \end{cases}$$

$$(15) \quad \begin{cases} (t - l \sin \rho) \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{dl}{d\theta} \cos \rho, \\ (l \cos \rho - y) \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{dl}{d\theta} \sin \rho. \end{cases}$$

Wenn  $\frac{d\rho}{d\theta} = 0$  in (15) ist, so folgt

$$\frac{dl}{d\theta} = 0.$$

4. Aus einer Arbeit KUBOTA's<sup>(1)</sup> ergibt sich

$$(1) \quad \begin{cases} x = \varphi'(s) \equiv \Phi(s), \\ y = k \Phi(s) \pm \sqrt{1+k^2}, \\ z = i [\pm \sqrt{1+k^2} \Phi(s) + k], \end{cases}$$

wenn

$$(2) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

ist.

(1) ist die Gleichung von Minimallinien auf einer Kugel. Die Tangente der Kurve im Punkte  $(x, y, z)$  ist

$$(3) \quad \frac{\xi - x}{1} = \frac{\eta - y}{k} = -\frac{\rho - z}{\pm i \sqrt{1+k^2}}.$$

Aus (3) wissen wir, dass die Tangente eine feste Richtung hat. Auch haben wir

$$\frac{1}{r} = 0,$$

wo  $r$  Krümmungsradius ist.

---

(1) KUBOTA, T.: Imaginäre Kurven mit der Krümmung Null, Tôhoku Math. Journ. 26 (1926) p. 12.

## (2) Über die Deviation ebener Kurven

1. Betrachten wir

$$(1) \quad \tan(\varphi + \delta\varphi) - \tan\psi = \tan(\bar{\varphi} + \delta\bar{\varphi}) - \tan\bar{q},$$

wo

$$(2) \quad \tan\varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds}, \quad \tan(\varphi + \delta\varphi) = \frac{\delta\rho}{\delta s}$$

ist,<sup>(1)</sup> so folgt aus (1), (2)

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{\delta\bar{\rho}}{\delta s} - \frac{d\bar{\rho}}{ds} &= -\frac{q_s + q_\rho \frac{\delta\rho}{ds}}{\psi_s + \psi_\rho \frac{\delta\rho}{ds}} - \frac{q_s + q_\rho \frac{d\rho}{ds}}{\psi_s + \psi_\rho \frac{d\rho}{ds}} \\ &= \frac{(q_\rho \psi_s - q_s \psi_\rho) \left( \frac{\delta\rho}{ds} - \frac{d\rho}{ds} \right)}{\left( \psi_s + \psi_\rho \frac{\delta\rho}{ds} \right) \left( \psi_s + \psi_\rho \frac{d\rho}{ds} \right)} \end{aligned}$$

wo

$$(4) \quad \begin{cases} \bar{s} = \psi(s, \rho), \\ \bar{\rho} = q(s, \rho), \end{cases} \quad q_\rho = \frac{\partial q}{\partial \rho},$$

ist.

So folgt aus (1), (2), (3):

$$(5) \quad 1 = \frac{q_\rho \psi_s - q_s \psi_\rho}{\left( \psi_s + \psi_\rho \frac{\delta\rho}{ds} \right) \left( \psi_s + \psi_\rho \frac{d\rho}{ds} \right)}$$

Wenn (5) von

$$\frac{\delta\rho}{\delta s}, \frac{d\rho}{ds}$$

unabhängig ist, so folgt

$$\psi_\rho = 0, \quad q_\rho = \psi_s \quad \text{wo} \quad \psi_s \neq 0,$$

infolge dessen man hat

$$\psi = \psi(s), \quad \rho = \psi'(s) \rho + x(s).$$

2. Wir ersetzen nun  $\psi$  in CESAROS Buch<sup>(2)</sup> durch  $\bar{\psi}$ , so folgt

(1) MATSUMURA, S.: Über die Deviation ebener Kurven, Tôhoku Math. Journ. Vol. 39 (1934) p. 239.

(2) Vergl. KOWALEWSKI, G.; CESARO's Vorlesungen über Natürliche Geometrie (1926).

$$(1) \quad \frac{d\bar{\varphi}}{ds} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{3 \int \tan \varphi \, ds},$$

$$u = \int \cos \bar{\varphi} \, ds, \quad v = \int \sin \bar{\varphi} \, ds,$$

weil

$$(2) \quad \tan \varphi = \frac{1}{2} \frac{d\rho}{ds}$$

ist.

Aus (1), (2) ergibt sich

$$(3) \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\tan \varphi} \, ds.$$

Für Sus Eilinie erhalten wir<sup>(1)</sup>

$$(4) \quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} \rho \cos 2\bar{\varphi} \, d\bar{\varphi} = 0, \\ \int_0^{2\pi} \rho \sin 2\bar{\varphi} \, d\bar{\varphi} = 0. \end{cases}$$

Aus (4) folgt

$$(5) \quad \begin{cases} \int \cos 2\bar{\varphi} \, ds = 0, \\ \int \sin 2\bar{\varphi} \, ds = 0. \end{cases}$$

Aus (5) folgt

$$(6) \quad \int e^{i\bar{\varphi}} \, ds = 0.$$

(6) ist die Bedingung dafür, dass Eilinie Sus ist.<sup>(2)</sup>

Aus der Formel<sup>(1)</sup>

$$\lim \frac{v}{u^2} = \frac{1}{2\rho}$$

ergibt sich

$$\lim \frac{v}{u^2} = \frac{1}{6 \int \tan \varphi \, ds}.$$

**3.** Ist  $\tau$  die ganze Krümmung des zwischen einem festen Anfangspunkt  $A$  und einem beweglichen Endpunkt  $P$  enthaltenen Bogens von 1, ferner  $s$  die Länge dieses Bogens,  $k$  die Krümmung und  $\rho$  der Krümmungsradius von 1 in  $P$ , so ist dem Vorstehenden gemäss immer:<sup>(3)</sup>

(1) SU, B.: On the curvature-axis of a convex closed curve, Science Reports of the Tôhoku Imp. Univ. Vol. 17 (1927).

(2) GANAPATHI, P.: On a certain class of Ovals, Math. Zeitschrift 38 Bd. (1934) S. 686.

(3) Vergl. Encyklopädie der Math. Wissenschaften, II. 3. S. 32.

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} = \kappa = \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{3 \int \tan \varphi \, ds},$$

denn

$$(2) \quad \tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds}.$$

Aus (1) ergibt sich

$$\tau = \int \frac{1}{3 \int \tan \varphi \, ds} \, ds,$$

so folgen

$$(3) \quad \begin{cases} x = \int \left\{ \cos \left( \int \frac{1}{3 \int \tan \varphi \, ds} \, ds \right) \right\} \, ds, \\ y = \int \left\{ \sin \left( \int \frac{1}{3 \int \tan \varphi \, ds} \, ds \right) \right\} \, ds. \end{cases}$$

Die Krümmung  $K$  einer ebenen Linie ist eine Differentialinvariante derselben gegenüber allen Bewegungen in der Ebene.

Dasselbe gilt von den in Bezug auf die ganze Krümmung genommenen Ableitungen  $\frac{d\kappa}{d\tau}, \frac{d^2\kappa}{d\tau^2}, \dots$ .

Zugleich stellen die Funktionen

$$\kappa, \frac{d\kappa}{d\tau}, \frac{d^2\kappa}{d\tau^2}, \dots$$

an deren Stelle man auch

$$\kappa, \frac{d\kappa}{ds}, \frac{d^2\kappa}{ds^2}, \dots$$

oder

$$\rho, \frac{d\rho}{d\tau}, \frac{d^2\rho}{d\tau^2}, \dots$$

oder

$$\rho, \frac{d\rho}{ds}, \frac{d^2\rho}{ds^2}, \dots$$

oder

$$\rho, 3 \tan \varphi, 3 \frac{d \tan \varphi}{ds}, \dots$$

nehmen könnte, insofern alle wesentlichen Differentialinvarianten gegenüber Bewegungen in der Ebene dar, als sich jede solche Differentialinvariante als eine Funktion der Glieder einer beliebigen dieser Reihen darstellen lässt.

Die Gleichung der Kettenlinie ist <sup>(1)</sup>

$$(4) \quad \rho = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}} \right)$$

Aus (4) ergibt sich

$$(5) \quad \tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds} = \frac{1}{6} \left( e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}} \right).$$

Cesaro hat die Kurven mit der natürlichen Gleichung

$$(6) \quad s = \kappa \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^n - 1}}$$

Aus (6) ergibt sich

$$(7) \quad \tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^n - 1}}{3\kappa}.$$

Aus

$$\cos \alpha_0 = \frac{\frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds} g_1'(s) - g_2'(s)}{\sqrt{\frac{1}{9} \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 + 1}},$$

$$\sin \alpha_0 = \frac{\frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds} g_2'(s) + g_1'(s)}{\sqrt{\frac{1}{9} \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 + 1}}$$

ergibt sich <sup>(1)</sup>

$$\cos \alpha_0 = \frac{\tan \varphi \cdot g_1'(s) - g_2'(s)}{\sqrt{\tan^2 \varphi + 1}},$$

$$\sin \alpha_0 = \frac{\tan \varphi \cdot g_2'(s) + g_1'(s)}{\sqrt{\tan^2 \varphi + 1}}$$

d.h.

$$\cos \alpha_0 = \frac{\tan \varphi \cdot g_1'(s) - g_2'(s)}{\sec \varphi},$$

$$\sin \alpha_0 = \frac{\tan \varphi \cdot g_2'(s) + g_1'(s)}{\sec \varphi},$$

---

(1) LILIENTHAL, R.: Vorlesungen über Differentialgeometrie (1908) I, P. 61.



Aus

$$(8) \quad \tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds}$$

ergibt sich

$$(9) \quad \rho^{-\frac{1}{3}} = \left\{ 3 \int \tan \varphi \, ds \right\}^{-\frac{1}{3}} = \sigma,$$

so folgt

$$(10) \quad \alpha_2 L \geq \int_0^{2\pi} \left\{ 3 \int \tan \varphi \, ds \right\}^{-\frac{1}{3}} d\theta \geq \alpha_1 L,$$

wo  $\theta$   $\varphi$  in HAYASHI's Arbeit bedeutet.<sup>(1)</sup>

### (3) Über Eilinie und Eiflächen

1. Nach der gleichen Methode wie in GANAPATHIS Arbeit<sup>(2)</sup> ergibt sich der

**Satz 1:** *Man kann ungerade Anzahl von Rechtecken, die gleiche Strecken zwischen Gegenberührungspunkten haben, zu einer Eilinie umschreiben.*

**Satz 2:**  $v(\varphi) - v(\varphi + \pi/2)$  hat ungerade Anzahl von Nullstellen, wo

$$v(\varphi) \equiv p'(\theta) + p'(\theta + \pi)$$

ist.

**Satz:** *Schneiden wir eine Eiväche mit zwei senkrechten Ebenen, die zu einer festen Ebene senkrecht sind, so sind die Schnittinhalte einander gleich in ungeraden Paaren von der Anzahl von Schnittovalen.*

Setzen wir

$$\Phi(\theta) = p(\theta) \cdot p(\theta + \pi) - p\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \cdot p\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right),$$

so folgt

$$\Phi(\theta) = -\Phi\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).$$

Aus der Zeichnung von  $\Phi(\theta)$  ergibt sich der folgende

**Satz:** *In ungerader Anzahl von Rechtecken sind die Produkte der zwei Abstände von einem festen Innenpunkt zur Gegenseite einander gleich.*

(1) HAYASHI, T.: On the extremal Area of the Osculating Ellipse of an Oval, Tôhoku Math. Journ. 23 (1924) p. 301.

(2) GANAPATHI, P.: A note on the oval, Math. Zeitschrift Bd. 38 (1934) S. 490.

2. Hier werden wir einige Bemerkungen zur relativen Differentialgeometrie machen.

$\bar{p}, q, r, \bar{\rho}, s, \sigma, S, r, \epsilon, \dots$  sollen dieselbe Bedeutung haben wie in der Arbeit von Süss.<sup>(1)</sup>

Die entsprechenden Grössen in Gegenpunkten seien mit  $\hat{p}, \hat{q}$ , bezeichnet.

(1.) Nun definieren wir als „Relativ-Breite“ der Eilinie  $\mathfrak{x}$  bezüglich der Eilinie  $\mathfrak{c}$  als Eichkurve die Grösse<sup>(2)</sup>

$$(1) \quad b = \frac{2 \{ \bar{p} \bar{\rho}(\epsilon) + \hat{p} \hat{\rho}(\epsilon) \}}{q \bar{\rho}(\epsilon) + \hat{q} \hat{\rho}(\epsilon)}.$$

Dann wird

$$\oint b d\sigma = \oint \bar{p} \bar{\rho}(\epsilon) d\varphi + \oint \hat{p} \hat{\rho}(\epsilon) d\varphi = 2S$$

und

$$S = \oint r d\sigma = \frac{1}{2} \oint \bar{p} \bar{\rho}(\epsilon) d\varphi + \frac{1}{2} \oint \hat{p} \hat{\rho}(\epsilon) d\varphi = \int_0^\pi b d\sigma$$

für jeden Anfang der Integration nach  $\sigma$  oder  $\varphi$ .

Da besteht

$$S \leq \frac{D \Sigma}{2},$$

wo

$$D = \underset{\Psi}{\text{Max}} b(q).$$

Also

$$I_* \geq I.$$

(2.) Als Relativ-Breite einer Eifläche  $\mathfrak{x}$  bezüglich der Eifläche  $\mathfrak{u}$  definieren wir

$$b = \frac{2 \{ \bar{p} \bar{R}(\epsilon) + \hat{p} \hat{R}(\epsilon) \}}{q R(\epsilon) + \hat{q} \hat{R}(\epsilon)},$$

so besteht

$$M \leq \frac{D}{2} \Omega,$$

(1) Süss, W.: Zur relativen Differentialgeo., I, Jap. Journ. of Math. IV (1927) S. 57.

(2) NAKAJIMA, S.: Über die Relativ-Breite von Eibereichen, Jap. Journ. of Math. Vol. VI (1923) S. 21.

wo

$$D = \text{Max } b.$$

3. Nach derselben Methode in GANAPATHIS Arbeit<sup>(1)</sup> kann man den folgenden Satz beweisen.

**Satz:**

$$\left[ \frac{2 \{ \bar{\rho}(\epsilon) + \hat{\bar{\rho}}(\epsilon) \}}{q \bar{\rho}(\epsilon) + \hat{q} \hat{\bar{\rho}}(\epsilon)} \right]_{\phi} + \left[ \frac{2 \{ \bar{\rho}(\epsilon) + \hat{\bar{\rho}}(\epsilon) \}}{q \bar{\rho}(\epsilon) + \hat{q} \hat{\bar{\rho}}(\epsilon)} \right]_{\phi+\pi}$$

$$\text{od} \quad \left[ \frac{\bar{\rho}(\xi)}{q(\xi)} \right]_{\phi} + \left[ \frac{\bar{\rho}(\xi)}{q(\xi)} \right]_{\phi+\pi}$$

sei mit  $\pi/2$  periodisch in ungerader Anzahl von  $\phi$ .

4. Aus<sup>(2)</sup>

$$(1) \quad \tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds},$$

ergibt sich

$$(2) \quad \rho = \bar{\rho}(\xi) / \bar{\rho}(\epsilon) = \int \tan \bar{\varphi}(s) d\bar{s}(\xi) / \int \tan \bar{\varphi}(\epsilon) ds(\epsilon),$$

$$(3) \quad 2I(\xi) = \oint r ds = \oint r \{ \tan \bar{\varphi}(\xi) d\bar{s}(\xi) \} / \int \tan \bar{\varphi}(\epsilon) ds(\epsilon),$$

$$(4) \quad S = \oint ds = \int \{ \tan \bar{\varphi}(\xi) d\bar{s}(\xi) / \int \tan \bar{\varphi}(\epsilon) d\bar{s}(\epsilon) \} d\sigma$$

u. s. w.,

ebenso ergibt sich für  $R_*$ -Kreis:

$$(5) \quad \int \tan \bar{\varphi}(\xi) ds(\xi) = \int \tan \bar{\varphi}(\epsilon) d\bar{s}(\epsilon).$$

wenn  $\rho' = 0$ , so folgt aus (2)

$$(6) \quad \tan \bar{\varphi}(\xi) = \tan \bar{\varphi}(\epsilon),$$

so erhalten wir den

**Satz:** Jede Eilinie besitzt mindestens vier Stellen, für die (6) besteht.

Ist für eine elliptisch gekrümmte Eilinie

$$\frac{\int \tan \bar{\varphi}(\xi) d\bar{s}(\xi)}{\int \tan \bar{\varphi}(\epsilon) d\bar{s}(\epsilon)} = \text{const.},$$

so ist sie eine Ellipse.

(1) P. GANAPATHI: A note on the Oval, Math. Zeitschrift 38 (1934) S. 490.

(2) MATSUMURA, S.: Über eine Affinegeo., Tôhoku Math. Journ. 36 (1932) S. 189.

**(4) Über Differentialgleichungen, die die Relation mit Raumkurven besitzen.**

1. Im Folgenden behandle ich die Lösung des Problems:<sup>(1)</sup>

$$(1) \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

$$(2) \quad \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 = 0.$$

Setzt man

$$(3) \quad \frac{dx}{ds} = \cosh \theta,$$

$$(4) \quad \frac{dy}{ds} = \sinh \theta \cdot \sin \varphi$$

$$(5) \quad \frac{dz}{ds} = \sinh \theta \cdot \cos \varphi,$$

so sind die Gleichungen (1) identisch erfüllt.

Aus (3), (4), (5) folgt:

$$(6) \quad \frac{d^2x}{ds^2} = \sinh \theta \cdot \frac{d\theta}{ds},$$

$$(7) \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \cosh \theta \cdot \sin \varphi \frac{d\theta}{ds} + \sinh \theta \cdot \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds},$$

$$(8) \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \cosh \theta \cdot \cos \varphi \frac{d\theta}{ds} - \sinh \theta \cdot \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds}.$$

Setzt man (6), (7), (8) in (2) ein, dann folgt:

$$(9) \quad \varphi = \kappa \pm \sqrt{-1} \int \frac{1}{\sinh \theta} d\theta,$$

wo  $\kappa$  eine Konstante bedeutet.

Setzen wir (9) in (3), (4), (5) ein, dann folgt:

$$(10) \quad \frac{dx}{ds} = \cosh \theta,$$

$$(11) \quad \frac{dy}{ds} = \sinh \theta \cdot \sin \left( \kappa \pm \sqrt{-1} \int \frac{1}{\sinh \theta} d\theta \right),$$

(1) Vergl. KUBOTA, T.: Imaginäre Kurven mit der Krümmung Null, Tôhoku Math. Journ., Vol. 26 (1925) p. 12.

MATSUMURA, S.: Imaginäre Kurven mit der Krümmung Null, Tôhoku Math. Journ., Vol. 39 (1934) p. 233.

$$(12) \quad \frac{dz}{ds} = \sinh \theta \cdot \cos \left( \kappa \pm \sqrt{-1} \int \frac{1}{\sinh \theta} d\theta \right).$$

Aus (10), (11), (12) folgt:

$$(13) \quad x = \int \cosh \theta ds + c,$$

$$(14) \quad y = \int \sinh \theta \sin \left( \kappa \pm \sqrt{-1} \int \frac{1}{\sinh \theta} d\theta \right) ds + c,$$

$$(15) \quad z = \int \sinh \theta \cdot \cos \left( \kappa \pm \sqrt{-1} \int \frac{1}{\sinh \theta} d\theta \right) ds + c.$$

Schliesslich erhält man den **Satz**:

Die Lösung von (1), (2) ist (13), (14), (15).

Für die Gleichungen

$$(16) \quad \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 - \left( \frac{dz}{ds} \right)^2 = 1,$$

$$(17) \quad \left( \frac{d^2 x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2 y}{ds^2} \right)^2 - \left( \frac{d^2 z}{ds^2} \right)^2 = 0,$$

haben wir

$$(18) \quad x = \int \sin \left( \kappa \pm \int \cosh \theta d\theta \right) \cdot \cosh \theta ds + c,$$

$$(19) \quad y = \int \cos \left( \kappa \pm \int \cosh \theta d\theta \right) \cdot \cosh \theta ds + c,$$

$$(20) \quad z = \int \sinh \theta ds + c.$$

2. Im Folgenden behandle ich das Problem der Bestimmung aller imaginären analytischen Kurven mit der Krümmung Null. Es seien  $x, y, z$  die rechtwinkligen Koordinaten des Kurvenpunktes und  $s$  die Kurvenlänge, und  $x, y, z$  analytische Funktion von  $s$ .

Damit die Kurve die Krümmung Null besitzt, müssen<sup>(1)</sup>

$$(1) \quad \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dz}{ds} \right)^2 = 1$$

$$(2) \quad \left( \frac{d^2 x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2 y}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2 z}{ds^2} \right)^2 = 0$$

gelten.

Wir setzen statt (1) eine von den beiden Gleichungen

---

(1) Vergl. T. KUBOTA: Imaginäre Kurven mit der Krümmung Null, Tôhoku Math. Journ. 26 (1925) p. 12.

$$(3) \quad \frac{\frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds}}{1 - \frac{dz}{ds}} = \frac{1 + \frac{dz}{ds}}{\frac{dx}{ds} - i \frac{dy}{ds}} = u(s)$$

oder

$$(4) \quad \frac{\frac{dx}{ds} - i \frac{dy}{ds}}{1 - \frac{dz}{ds}} = \frac{1 + \frac{dz}{ds}}{\frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds}} = -\frac{1}{v(s)}$$

wo  $i = \sqrt{-1}$  ist.

Aus (3) und (4) folgt durch Auflösen:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{1 - u'(s) \cdot v(s)}{u(s) - v(s)}, & \frac{dy}{ds} = \frac{i(1 + u(s) \cdot v(s))}{u(s) - v(s)} \\ \frac{dz}{ds} = \frac{u(s) + v(s)}{u(s) - v(s)}, & \text{wo } u \neq v. \end{cases}$$

Setzen wir (5) in (2) ein, so folgt

$$(6) \quad u = \text{const.},$$

oder

$$(7) \quad v = \text{const.}$$

Aus (5), (6) und (7) ergibt sich

$$(8) \quad \begin{cases} x = \int \frac{1 - u_0 \cdot v'(s)}{u_0 - v(s)} ds + c, & y = i \int \frac{1 + u_0 \cdot v'(s)}{u_0 - v(s)} ds + c, \\ z = \int \frac{u_0 + v(s)}{u_0 - v(s)} ds + c, \end{cases}$$

oder

$$(9) \quad \begin{cases} x = \int \frac{1 - u(s) \cdot v'_0}{u(s) - v_0} ds + c, & y = i \int \frac{1 + u(s) \cdot v'_0}{u(s) - v_0} ds + c, \\ z = \int \frac{u(s) + v_0}{u(s) - v_0} ds + c. \end{cases}$$

Schliesslich erhält man der Satz:

*Die imaginären analytischen Kurven mit der Krümmung Null, die keine Gerade sind, sind durch das Gleichungssystem*

$$\begin{cases} x = \int \frac{1 - u_0 \cdot v'(s)}{u_0 - v(s)} ds + c, \\ y = i \int \frac{1 + u_0 \cdot v'(s)}{u_0 - v(s)} ds + c, \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s = \int \frac{u_0 + v(s)}{u_0 - v(s)} ds + c, \end{array} \right.$$

oder

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \int \frac{1 - u(s) \cdot v_0}{u(s) - v_0} ds + c, \\ y = i \int \frac{1 + u(s) \cdot v_0}{u(s) - v_0} ds + c, \\ z = \int \frac{u(s) + v_0}{u(s) - v_0} ds + c, \end{array} \right.$$

darstellbar, wo  $u_0, v_0, c$  die Konstanten bedeuten.

## (5) Über zwei Flächen, die eine Beziehung haben

Wir denken uns nun wieder die folgenden Gleichungen:

$$(A) \quad \lambda \xi_{uv} + \sigma \xi_u + \xi_v = 0, \quad (\xi = x, y, z)$$

1. Wir denken nun hier an den Fall, dass man (A) zu

$$(1) \quad A \Phi_{uv} + B \Phi_v + C \Phi + D = 0$$

umformen kann, so kann man setzen

$$(2) \quad \Phi = V_0 + V_1 U_1 + V_2 U_2,$$

wo die Koeffizienten  $A, B, C, D$  gewisse Funktionen von  $v$  allein bedeuten.

Aus (2) ergibt sich

$$(3) \quad x = x_0 + U_1 l + U_2 \lambda, \dots\dots$$

und es ist unmittelbar einleuchtend, dass drei Gleichungen dieser Form, in denen  $x_0, \dots, l, \dots, \lambda, \dots$  durch die Gleichungen

$$(4) \quad \begin{aligned} x_0 &= \int V_0 \alpha(v) dv, \dots\dots, \\ l &= \int V_1 \alpha(v) dv, \dots\dots, \\ \lambda &= \int V_2 \alpha(v) dv, \dots\dots \end{aligned}$$

erklärt sind, stets eine Affingeesimsfläche darsellen können, welche auch die willkürlichen Funktionen  $V_u, V_1, V_2, \alpha, \beta, \gamma$  sein mögen.<sup>(1)</sup>

2. Besteht in (A)

$$(1) \quad \begin{cases} \xi_u' = \phi(u, v) \xi_u, \\ \xi_v' = \psi(u, v) \xi_v, \end{cases}$$

(1) SALKOWSKI, E.: Über affine Geometrie, Math. Zeitschrift 17 (1923) S. 144.

so folgt<sup>(2)</sup>

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \log I}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial u} \left[ 1 + \frac{1}{I} \frac{\sigma}{\lambda} \right] - \frac{\partial}{\partial v} \left[ (I-1) \frac{1}{\lambda} \right] = 0,$$

$$I = \frac{\varphi}{\psi}.$$

Wenn

$$(3) \quad \varphi \equiv \sigma, \quad \psi \equiv \lambda,$$

so folgt

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \log \frac{\sigma}{\lambda}}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\lambda - \sigma}{\lambda^2} \right) = 0,$$

3. Wir betrachten uns nun eine Fläche  $\mathfrak{x}$ , so kann man mit  $\tilde{\mathfrak{x}}$  affine Flächennormal bezeichnen, wo

$$(1) \quad \tilde{\mathfrak{x}}_u = -\frac{1}{R_1} \mathfrak{x}_u, \quad \tilde{\mathfrak{x}}_v = -\frac{1}{R_2} \mathfrak{x}_v;$$

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}$$

affine Linien von Krümmung,  $R_i$  Hauptkrümmungsradius von  $\mathfrak{x}$  sind.

Aus (1) ergibt sich

$$(2) \quad \mathfrak{x}_{uv} + \frac{\left(\frac{1}{R_1}\right)_v}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \mathfrak{x}_v + \frac{\left(-\frac{1}{R_2}\right)_u}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \mathfrak{x}_u = 0$$

Um  $v = \text{const.}$  der Örter von Berührungspunkten des Umschriebene-Zylinders oder Kegel müssen

$$(3) \quad \frac{\left(\frac{1}{R_1}\right)_v}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = 0$$

oder

$$-\frac{\left(\frac{1}{R_1}\right)_v \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right)_u}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{R_1}\right)_v}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2}} \right\}$$

sein.

---

(2) GRAUSTEIN, W.: Parallel Map of Surfaces, Transactions of the American Math Society Vol. 23 (1922) p. 298.



## (6) Über eine meiner Arbeiten

### Zum Teil I

Aus Dimensionsgründen ist eine andere Potenz der Grösse  $(R_1 R_2)$  im Ansatz natürlich.

Wir beweisen den **Satz**:<sup>(1)</sup>

*Die Kugel ist die einzige Eifläche, für die in Gegenpunkten  $\xi$  und  $\bar{\xi}$  stets die Gleichung gilt:*

$$(1) \quad \xi + \tau \eta = \bar{\xi} + \bar{\tau} \bar{\eta}, \bar{\tau} = (R_1 R_2)^{\frac{1}{2}}.$$

$\eta$  ist dabei Affinnormal-Vektor.

Wir benutzen BLASCHKES Differentialgeometrie II zum Beweis.

Aus (1) folgt

$$(1') \quad \bar{\xi}_i - \xi_i = \tau_i \eta - \bar{\tau}_i \bar{\eta} + \tau B_i^j \xi_j - \bar{\tau} \bar{B}_i^j \bar{\xi}_j.$$

Wegen

$$(\xi_1 \xi_2 \xi_i) = 0$$

und

$$\mathcal{X} = \tau^{\frac{1}{2}} \xi = -\lambda \bar{\mathcal{X}} = -\lambda \bar{\tau}^{\frac{1}{2}} \bar{\xi}$$

ist

$$(2) \quad \lambda \bar{\tau}^{\frac{1}{2}} = \tau^{\frac{1}{2}}$$

und nach (1)

$$(\bar{\xi} - \xi) \mathcal{X} = \tau + \lambda \bar{\tau} = \tau^{\frac{1}{2}} (-\xi \xi - \bar{\xi} \bar{\xi}) = \tau^{\frac{1}{2}} (\rho + \bar{\rho})$$

wegen (2)

$$= \tau + \tau^{\frac{1}{2}} \cdot \tau^{\frac{1}{2}};$$

also ist

$$(3) \quad \tau^{\frac{1}{2}} + \bar{\tau}^{\frac{1}{2}} = \rho + \bar{\rho} = b = \text{Breite}$$

Durch Ableitung folgt

$$b_i = \frac{2}{3} \left[ \frac{\tau_i}{\tau^{\frac{1}{2}}} + \frac{\bar{\tau}_i}{\bar{\tau}^{\frac{1}{2}}} \right].$$

Multipliziert man (1') skalar mit  $\xi$ , so wird nach (2)

$$\tau_i + \lambda \bar{\tau}_i = 0,$$

also

---

(1) MATSUMURA, S.: Über konvex-geschlossene Flächen, Tôhoku Math. Journ. 36 (1932) S. 192/5.

$$\frac{\tau_l}{\tau^{\frac{1}{2}}} + \frac{\bar{\tau}_l}{\bar{\tau}^{\frac{1}{2}}} = 0, \text{ d. h. } b_l = 0, b = \text{const.}$$

Unsere Fläche muss also zunächst konstante Breite haben: ein „*Gleichdick*“ sein.

Nun ist

$$\sigma = \frac{R_1 + R_2}{2} \leq \sqrt{R_1 R_2} = \tau^{\frac{1}{2}},$$

also ist nach (3):

$$\tau^{\frac{1}{2}} + \bar{\tau}^{\frac{1}{2}} = b = \text{const.} = \sigma + \bar{\sigma} \geq \tau^{\frac{1}{2}} + \bar{\tau}^{\frac{1}{2}},$$

also gilt stets das Gleichheitszeichen, d. h. es ist

$$R_1 \equiv R_2,$$

die Fläche hat überall Nabelpunkte, muss also die Kugel sein, w.z.b.w.

## Zum Teil II

Gleichung (1) muss heißen:

$$(1) \quad r_1^2 + r_2^2 = \frac{2f(0)}{\pi} = \text{const.}$$

Auf S. 195 ist nach Zeile 4 zu ergänzen:

Für die Richtung des Durchmessers  $D$  von  $f$  sei

$$r_1 = r + \varepsilon, \quad r_2 = r - \varepsilon,$$

also

$$r_1^2 + r_2^2 = 2(r^2 + \varepsilon^2).$$

Dann wird nach (3)

$$\begin{aligned} f(0) &= \pi(r^2 + \varepsilon^2) = i \leq \frac{\pi d^2}{4} \\ &\leq \frac{\pi D^2}{4} = \pi r^2, \end{aligned}$$

also für die  $D$ -Richtung:

$$\varepsilon = 0, \quad r_1 = r_2 = r, \quad d = D$$

und es gilt in (3) das Gleichheitszeichen.

Es wird

$$D \equiv 2r = r_1 + r_2$$

und nach (1)

$$r_1^2 + r_2^2 \equiv 2 r^2 \text{ [= } r_1^2 + r_2^2 \text{ für die } D\text{-Richtung!]},$$

also sogar

$$\varepsilon \equiv 0, \quad r_1 \equiv r_2$$

und 0 ist Mittelpunkt aller Kreise, w.z.b.w..

# BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN(XII)

Sôji MATSUMURA

(Accepted for publication, February 21, 1935)

## (1)

Es sei

$$(1) \quad f(\xi^a) = \text{const.} \quad [a = \text{I, II, III}]$$

die Gleichung eines Kurvenpaares in  $R_3$  und

$$(2) \quad f(\xi^a + \delta \xi^a) = f(\xi^a),$$

wo  $\xi^a$  die Kugeln in  $R_3$  bezeichnen.

Aus (2) folgt

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial \xi^a} \delta \xi^a = 0.$$

Bezeichnen wir mit  $p_a$  die Momente der senkrechten Richtung  $p$  von  $\delta \xi^a$ , so ist

$$(4) \quad p_a \delta \xi^a = 0.$$

Die Koeffizienten der  $\delta \xi^a$  in (3) und (4) müssen somit einander proportional sein, so folgt

$$(5) \quad f_a = \rho p_a,$$

wo  $\rho$  ein Proportionalitätsfaktor ist.

## (2)

Betrachten wir

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = \frac{T^{ab} \rho_a \rho_b}{A^{ab} \rho_a \rho_b}, \quad [a = \text{I, II}]$$

so folgt

$$(2) \quad -\cos^2 \varphi \cdot A^{ab} \rho_a \rho_b + T^{ab} \rho_a \rho_b = 0.$$

Differenzieren wir (2) nach  $\rho_1$ , so folgt

$$(3) \quad -\cos^2 \varphi \cdot (A^{11}\rho_1 + A^{12}\rho_2) + T^{11}\rho_1 + T^{12}\rho_2 = 0.$$

Differenzieren wir (2) nach  $\rho_2$  wieder, so folgt

$$(4) \quad -\cos^2 \varphi \cdot (A^{12}\rho_1 + A^{22}\rho_2) + T^{12}\rho_1 + T^{22}\rho_2 = 0.$$

(3), (4) sind die Bedingungen dafür, dass  $\cos^2 \varphi$  Maximum- oder Minimumwerte annimmt.

Aus (3), (4) folgt

$$(5) \quad \begin{vmatrix} A^{11}\rho_1 + A^{12}\rho_2 & T^{11}\rho_1 + T^{12}\rho_2 \\ A^{12}\rho_1 + A^{22}\rho_2 & T^{12}\rho_1 + T^{22}\rho_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Aus (5) ergibt sich  $\rho_1:\rho_2$ , wofür die Richtung von  $\cos^2 \varphi$  Maximum- und Minimumwerte annimmt.

Der Wert von Maximum- und Minimumwerten von  $\cos^2 \varphi$  ergibt sich aus

$$(6) \quad \begin{vmatrix} \cos^2 \varphi \cdot A^{11} - T^{11} & \cos^2 \varphi \cdot A^{12} - T^{12} \\ \cos^2 \varphi \cdot A^{12} - T^{12} & \cos^2 \varphi \cdot A^{22} - T^{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Aus (6) folgt

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \frac{1}{\cos^2 \varphi_2} = \frac{A^{11} T^{22} + A^{12} T^{11} - 2A^{12} T^{12}}{A^{11} A^{22} - (A^{12})^2}, \\ \frac{1}{\cos^2 \varphi_1 \cdot \cos^2 \varphi_2} = \frac{T^{11} T^{22} - (T^{12})^2}{A^{11} A^{22} - (A^{12})^2}, \end{cases}$$

wo  $\rho_1, \rho_2$  zwei Wurzeln von (6) sind.

Wenn

$$(8) \quad \frac{A^{11}}{T^{11}} = \frac{A^{12}}{T^{12}} = \frac{A^{22}}{T^{22}},$$

so ist  $\cos^2 \varphi$  von  $\rho_1:\rho_2$  unabhängig.

### (3)

In Weingartens Fläche kann man die Gleichung von Minimallinien

$$(1) \quad \frac{\theta(a)^2}{a^2} dt^2 + \left\{ \frac{\theta(a) - a\theta'(a)}{\theta'(a)} \right\}^2 d\tau^2$$

setzen, wo  $a$  eine Funktion von  $t, \tau$  und  $\theta$  eine Funktion von  $a$  ist.

### (4)

Wenn eine zweidimensionale Kurvenpaarschar gegeben ist durch:

$$\xi = \xi(t, a, b)$$

$$\eta = \eta(t, a, b),$$

wo  $\xi, \eta$  zwei Kreise sind,

so gilt für den Schnittpunkt von zwei benachbarten Kurvenpaaren dieser Schar:

$$\xi(t+dt, a+da, b+db) = \xi(t, a, b)$$

$$\eta(t+dt, a+da, b+db) = \eta(t, a, b)$$

oder nach Taylor entwickelt sich:

$$\xi_t dt + \xi_a da + \xi_b db = 0$$

$$\eta_t dt + \eta_a da + \eta_b db = 0.$$

D.h. die eindimensionale Schar der Einhüllenden unserer Kurvenpaaren muß folgender Differentialgleichung genügen:

$$da (\xi_t \eta_a - \eta_t \xi_a) + db (\xi_t \eta_b - \eta_t \xi_b) = 0.$$

(5)

Aus

$$(1) \quad \begin{cases} x = \varphi(s), \\ y = k \varphi(s) \pm \sqrt{1+k^2} s + q, \\ z = \pm i \sqrt{1+k^2} \varphi(s) + i k s + q \end{cases}$$

in KUBOTAS Arbeit<sup>(1)</sup> ergibt sich

$$(2) \quad \begin{cases} x = \varphi'(s) \\ y = k \varphi'(s) \pm \sqrt{1+k^2}, \\ z = i (\pm \sqrt{1+k^2} \varphi'(s) + k) \end{cases}$$

als Gleichung von Minimallinien auf einer Kugelfläche.

Aus (2) folgt

$$(3) \quad \begin{cases} y = \pm \sqrt{1+k^2} + kx, \\ z = i (\pm \sqrt{1+k^2} x + k), \end{cases}$$

die eine Gleichung von Gerade ist. Also folgt der

**Satz:** Die Minimallinien auf einer Kugelfläche sind mit (2) gegeben. (2) ist eine Minimalgerade.

---

(1) KUBODA, T.: Imaginäre Kurven mit der Krümmung Null, Tôhoku Math. Journ. 26 (1926) p. 16.

Aus (2) folgt

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dy}{ds} = k \frac{dx}{ds}, \\ \frac{dz}{ds} = \pm i \sqrt{1+k^2} \frac{dx}{ds}, \end{cases}$$

oder

$$(5) \quad \frac{dz}{ds} = \pm i \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \frac{dy}{ds},$$

oder

$$(6) \quad \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = -\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right\}.$$

So folgt der

**Satz:** Zwischen  $x, y, z$  und  $s$  bestehen (4), (5), (6).

Aus meiner Arbeit<sup>(2)</sup> ergibt sich

$$(7) \quad \begin{cases} x = \sin \theta, \\ y = \cos \theta \cdot \sin \left\{ k \pm \sqrt{-1} \log \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right\}, \\ z = \cos \theta \cdot \cos \left\{ k \pm \sqrt{-1} \log \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right\}, \end{cases}$$

als Minimallinien auf einer Kugelfläche.

(6)

Ist

$$\varphi(t, \tau) = \text{const.}$$

die Gleichung einer Kurvenschar einer Kreisfläche, dann werden deren orthogonale Trajektorien bekanntlich dargestellt durch:

$$(1) \quad \left\{ (\theta_t, \theta_t) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - (\theta_t, \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} d\tau + \left\{ (\theta_t, \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - (\theta_\tau, \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} dt = 0.$$

Wenn unsre Kurvenscharen zueinander senkrecht sind, so folgt

$$(2) \quad (\theta_t, \theta_\tau) = 0.$$

Aus (1), (2) ergibt sich

(2) MATSUMURA, S.: Imaginäre Kurven mit der Krümmung Null, Tôhoku Math. Journ. Vol. 39, p. 233.

$$(3) \quad (\theta_i, \theta_i) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} dt = (\theta_r, \theta_r) \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\tau.$$

Für das Katenoid gelten folgende Fundamentalgrößen

$$(4) \quad (\theta_i, \theta_i) = \frac{t''^2}{t''^2 - a^2}, \quad (\theta_r, \theta_r) = t''^2.$$

Setzen wir ferner

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{a}{t''^2 - a^2}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 1, \end{cases}$$

wo  $a$  eine Konstante ist.

So ergibt sich nach Gleichung (1) die Differentialgleichung der Orthogonalen der geodätischen Linien

$$(6) \quad d\tau = \frac{dt''}{a}.$$

Somit ist

$$\tau = \frac{t''}{a} + \text{const.}$$

die endliche Gleichung der Orthogonalen.

### (7)

Wir betrachten nun

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = \frac{T^{11}\rho_1^2 + 2T^{12}\rho_1\rho_2 + T^{22}\rho_2^2}{A^{11}\rho_1^2 + 2A^{12}\rho_1\rho_2 + A^{22}\rho_2^2}$$

wieder.

Es folgt:

$$(2) \quad -\cos^2 \varphi \cdot (A^{11}\rho_1^2 + 2A^{12}\rho_1\rho_2 + A^{22}\rho_2^2) + T^{11}\rho_1^2 + 2T^{12}\rho_1\rho_2 + T^{22}\rho_2^2 = 0.$$

Differenzieren wir (2) nach  $\rho_1$ , so ergibt sich

$$(3) \quad -\cos^2 \varphi \cdot (A^{11}\rho_1 + A^{12}\rho_2) + T^{11}\rho_1 + T^{12}\rho_2 = 0.$$

Differenzieren wir (2) nach  $\rho_2$ , so folgt

$$(4) \quad -\cos^2 \varphi \cdot (A^{12}\rho_1 + A^{22}\rho_2) + T^{12}\rho_1 + T^{22}\rho_2 = 0.$$

(2), (4) bestehen für Maximum- oder Minimumwert von  $\cos^2 \varphi$ . Nun bezeichnen wir den Maximum- und Minimumwert von  $\cos^2 \varphi$  mit  $C$  bzw.  $c$ .

Die Elimination von  $\cos^2 \varphi$  aus diesen beiden Gleichungen (3), (4) ergibt die Differentialgleichung von  $c$  und  $C$ :



$$(5) \quad \begin{vmatrix} A^{11}\rho_1 + A^{12}\rho_2 & T^{11}\rho_1 + T^{12}\rho_2 \\ A^{12}\rho_1 + A^{22}\rho_2 & T^{12}\rho_1 + T^{22}\rho_2 \end{vmatrix} = 0.$$

So folgt

$$(6) \quad \begin{vmatrix} \cos \varphi \cdot A^{11} - T^{11} & \cos \varphi \cdot A^{12} - T^{12} \\ \cos \varphi \cdot A^{12} - T^{12} & \cos \varphi \cdot A^{22} - T^{22} \end{vmatrix} = 0,$$

d.h.

$$(7) \quad \cos^4 \varphi \{A^{11}A^{22} - (A^{12})^2\} - \cos^2 \varphi (A^{11}T^{22} + A^{22}T^{11} - 2A^{12}T^{12}) \\ + \{T^{11}T^{22} - (T^{12})^2\} = 0.$$

Also ergibt sich

$$(8) \quad \begin{cases} c + C = \frac{A^{11}T^{22} + A^{22}T^{11} - 2A^{12}T^{12}}{A^{11}A^{22} - (A^{12})^2} \\ cC = \frac{T^{11}T^{22} - (T^{12})^2}{A^{11}A^{22} - (A^{12})^2}. \end{cases}$$

(5) ist genau die JACOBISCHE Form der Quadratischeformen

$$T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta$$

und

$$A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta.$$

Wir schlieszen also den Fall:

$$(9) \quad A^{11} : A^{12} : A^{22} = T^{11} : T^{12} : T^{22},$$

in dem  $\cos^2 \varphi$  immer konstant ist.

Wir nennen  $c, C$  Hauptwert von  $\cos^2 \varphi$  und (9) auch in dem Falle Nabelpunkt.

Wenn (5) ist gleich

$$(10) \quad \rho_1 \rho_2 = 0,$$

So folgt

$$(11) \quad A^{11}T^{12} - T^{11}A^{12} = 0, \quad A^{12}T^{22} - A^{22}T^{12} = 0,$$

d.h.

$$(12) \quad A^{11}/T^{11} = A^{12}/T^{12} = A^{22}/T^{22},$$

oder

$$(13) \quad A^{12} = 0, \quad T^{12} = 0.$$

Wenn (12) nicht besteht, so folgt

$$(14) \quad \cos^2 \varphi = \frac{T^{11}\rho_1^2 + T^{22}\rho_2^2}{A^{11}\rho_1^2 + A^{22}\rho_2^2}$$

und

$$(15) \quad c = T^{11}/A^{11}, \quad C = T^{22}/A^{22},$$

also

$$(16) \quad \cos^2 \varphi = \frac{\frac{A^{11}}{c} \rho_1^2 + \frac{A^{22}}{C} \rho_2^2}{A^{11} \rho_1^2 + A^{22} \rho_2^2} \\ = c \left( \frac{\sqrt{A^{11}} \rho_1}{\sqrt{A^{11}} \rho_1} \right)^2 + C \left( \frac{\sqrt{A^{22}} \rho_2}{\sqrt{A^{22}} \rho_2} \right)^2.$$

Setzen wir

$$(17) \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{A^{11}} \rho_1}{\sqrt{A^{11}} \rho_1}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{A^{22}} \rho_2}{\sqrt{A^{22}} \rho_2},$$

so folgt

$$(18) \quad \cos^2 \varphi = c \cos^2 \theta + C \sin^2 \theta.$$

Weiter setzen wir

$$f_1 \equiv A^{11} \rho_1^2 + 2A^{12} \rho_1 \rho_2 + A^{22} \rho_2^2, \\ f_2 \equiv T^{11} \rho_1^2 + 2T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2,$$

und bilden

$$(19) \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad J(f_1, f_2) = 0, \quad J(f_1, J(f_1, f_2)) = 0, \\ J(f_2, J(f_1, f_2)) = 0,$$

so spielt (19) eine grosse Rolle in unserer Kreisgeometrie wie in der Flächentheorie in elementarer Differentialgeometrie, z.B. wir machen geltend den folgenden **Satz**:<sup>(1)</sup>

*Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Paar Richtungen, für welche*

$$(20) \quad \cos^2 \bar{\varphi} = \cos^2 \varphi$$

besteht, harmonisch von einander getrennt sind, ist<sup>(1)</sup>

$$\frac{\bar{T}^{11} \bar{T}^{22} - (\bar{T}^{12})^2}{\bar{A}^{11} \bar{A}^{22} - (\bar{A}^{12})^2} = \frac{T^{11} T^{22} - (T^{12})^2}{A^{11} A^{22} - (A^{12})^2}.$$

(8)

Wir nehmen Krümmungslinien Parameterlinien, so bestehen

(1) Vergl. OGURA, K.: On the Theory of Representation of Surfaces, Tôhoku Math. Journ. Vol. 12, p. 241.

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{(\theta_r, \theta_r)}{(\theta_i, \theta_i)}} \frac{d\tau}{d\tau},$$

$$\tan \theta' = \sqrt{\frac{(\theta_r, \theta_r)}{(\theta_i, \theta_i)}} \frac{\delta\tau}{\delta\tau},$$

auf Kreisflächen, wo  $\theta$  und  $\theta'$  jede die Tangente zur konjugierten Richtung mit der Tangente von

$$\tau = \text{const.}$$

bilden, wo  $1/\rho_i$  die Hauptkrümmungen sind.

### (9)

Nehmen wir einen Punkt  $P$  auf einer Kreisfläche  $S$  und ziehen zwei Kurven  $c_1, c_2$  durch  $P$  auf  $S$ , deren Gleichung ist:

$$(1) \quad \theta d\tau^2 + 2\Phi d\tau d\tau + \Psi d\tau^2 = 0,$$

so ergibt sich<sup>(1)</sup> für eine Kurve  $K$  durch  $P$ :

$$(2) \quad \delta s^2 \cos \alpha \cos \beta = J/I,$$

wo

$$(3) \quad \begin{cases} J = \{(\theta_i, \theta_i) \delta t + (\theta_i, \theta_r) \delta \tau\}^2 \Psi + 2 \{(\theta_i, \theta_i) \delta t + (\theta_i, \theta_r) \delta \tau\} \times \\ \quad \{(\theta_i, \theta_r) d\tau + (\theta_r, \theta_r) \delta \tau\} \Psi + \{(\theta_r, \theta_r) \delta t + (\theta_r, \theta_r) \delta \tau\}^2 \theta, \\ I = \{[(\theta_i, \theta_i) \Psi - 2(\theta_i, \theta_r) \Phi + (\theta_r, \theta_r) \theta]^2 - 4[(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2] \times \\ \quad [\theta \Psi - \Phi^2]\}^{\frac{1}{2}} \\ \alpha = \text{Winkel zwischen } C_1 \text{ und } K, \\ \beta = \text{Winkel zwischen } C_2 \text{ und } K, \\ \delta s = \text{Linearelement von } K. \end{cases}$$

Nehmen wir einen Punkt  $A$  auf  $K$  nahe  $P$  und ziehen aus  $A$  Senkrechtegeraden  $AB, AC$  zu  $C_1$  bzw.  $C_2$ , so ist der Inhalt von Dreieck  $PBC$  gleich

$$\frac{J}{2I} \times \sin(\alpha + \beta).$$

Wenn  $C_1$  und  $C_2$  zueinander senkrecht sind, so kann man setzen:

$$(4) \quad \Phi = 0,$$

also folgt

$$(5) \quad \delta s^2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) =$$

$$= \frac{[(\theta_i, \theta_i) \delta t + (\theta_i, \theta_r) \delta \tau]^2 \Psi + [(\theta_i, \theta_r) \delta t + (\theta_r, \theta_r) \delta \tau]^2 \theta}{\{[(\theta_i, \theta_i) \Psi + (\theta_r, \theta_r) \theta]^2 - 4 [(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2](\theta \Psi)\}^{\frac{1}{2}}}$$

Aus (5) ergibt sich der<sup>(1)</sup>

**Satz:** Man kann den Inhalt eines kleinen Rechteckes auf Kreisfläche mit

$$\frac{[(\theta_i, \theta_i) \delta t + (\theta_i, \theta_r) \delta \tau]^2 \Psi + [(\theta_i, \theta_r) \delta t + (\theta_r, \theta_r) \delta \tau]^2}{\{[(\theta_i, \theta_i) \Psi + (\theta_r, \theta_r) \theta]^2 - 4 [(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2](\theta \Psi)\}^{\frac{1}{2}}}$$

geben.

Aus (5) folgt

$$(6) \quad \delta s^2 \cdot \sin 2\alpha =$$

$$2 \frac{[(\theta_i, \theta_i) \delta t + (\theta_i, \theta_r) \delta \tau]^2 \Psi + [(\theta_i, \theta_r) \delta t + (\theta_r, \theta_r) \delta \tau]^2}{\{[(\theta_i, \theta_i) \Psi + (\theta_r, \theta_r) \theta]^2 - 4 [(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2](\theta \Psi)\}^{\frac{1}{2}}}$$

Aus (6) kann man  $\alpha$  finden.

Wenn unsere Kurvenschar auf  $S$  auch senkrecht ist, so kann man setzen in (5):

$$(\theta, \theta_r) = 0,$$

aus (5) folgt

$$(7) \quad \delta s^2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \\ = \frac{[(\theta_i, \theta_i) \delta t]^2 \Psi + [(\theta_r, \theta_r) \delta \tau]^2 \theta}{\{[(\theta_i, \theta_i) \Psi + (\theta_r, \theta_r) \theta]^2 - 4 (\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r)(\theta \Psi)\}^{\frac{1}{2}}}$$

(7) ist unser Inhalt eines kleinen Rechteckes auf einer Kreisfläche.

Aus zwei Formeln in Forsyths Buch<sup>(2)</sup> kann man erhalten:

$$(8) \quad \delta s^2 \cdot \cos(\alpha + \beta) = \frac{I}{I} - \frac{[(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2]}{I} \times \\ \{ \theta \delta t^2 + 2\Phi \delta t \delta \tau + \Psi \delta \tau^2 \},$$

$$(9) \quad \delta s^2 \cdot \cos(\alpha - \beta) = \frac{I}{I} + \frac{[(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2]}{I} \times \\ \{ \theta \delta t^2 + 2\Phi \delta t \delta \tau + \Psi \delta \tau^2 \}.$$

Aus (8), (9) kann man  $\alpha, \beta$  finden, oder wissen<sup>(2)</sup>:

(1) FORSYTH, A. R.: Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces, Cambridge, 1920, p. 61.

NAKAJIMA, S.: Kugelgeo. von Möbius, Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ. Vol. 2 (1929) p. 36.

(2) l. c. (1).

$$(10) \quad \delta s^2 \cdot \sin(\alpha - \beta) = \frac{2V}{I} \left| \begin{array}{cc} (\theta_i, \theta_i) \delta t + (\theta_i, \theta_r) \delta \tau & (\theta_i, \theta_r) \delta t + (\theta_r, \theta_r) \delta \tau \\ \theta \delta t + \Phi \delta \tau & \Phi \delta t + \Psi \delta \tau \end{array} \right|,$$

wo

$$V^2 = [(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2].$$

Wenn  $\Phi = 0$ , so folgt

$$\cos(\alpha + \beta) = 0.$$

Aus (8) ergibt sich also:

$$(11) \quad J = [(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2] \{ \theta \delta t^2 + 2\Phi \delta t \delta \tau + \Psi \delta \tau^2 \}.$$

Aus

$$(12) \quad \delta s^2 \cos \alpha \cos \beta = \frac{J}{I},$$

$$\delta s^2 \sin \alpha \sin \beta = - \frac{V^2}{I} (\theta \cdot \delta t^2 + 2\Phi \delta t \delta \tau + \Psi \delta \tau^2)$$

folgt der

**Satz:** Bilden wir ein kleines Viereck in einem Kreis und ist  $PA$  ein Durchmesser, so ist das Produkt  $PB \cdot BA \cdot AC \cdot CP$  gleich

$$(13) \quad \left| \frac{V^2 J}{I^2} (\theta \cdot \delta t^2 + 2\Phi \delta t \cdot \delta \tau + \Psi \delta \tau^2) \right|$$

oder aus (1) ergibt sich

$$(14) \quad \tan \alpha \cdot \tan \beta = - \frac{V^2}{J} (\theta \cdot \delta t^2 + 2\Phi \delta t \cdot \delta \tau + \Psi \delta \tau^2).$$

Aus (9), (10) folgt

$$(15) \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{2V}{I} \left| \begin{array}{cc} (\theta_i, \theta_i) \delta t + (\theta_i, \theta_r) \delta \tau & (\theta_i, \theta_r) \delta t + (\theta_r, \theta_r) \delta \tau \\ \theta \delta t + \Phi \delta \tau & \Phi \delta t + \Psi \delta \tau \end{array} \right| \div \left\{ \frac{J}{I} + \frac{V}{I} (\theta \delta t^2 + 2\Phi \delta t \delta \tau + \Psi \delta \tau^2) \right\}.$$

Wenn wir anstatt (1) Minimallinien nehmen:

$$(16) \quad (\theta_i, \theta_i) dt^2 + 2(\theta_i, \theta_r) dt d\tau + (\theta_r, \theta_r) d\tau^2 = 0,$$

so folgt

$$(17) \quad \delta s^2 \cos \alpha \cos \beta = J/I,$$

$$(18) \quad \delta s^2 \sin \alpha \sin \beta = - \frac{V^2}{I} R,$$

$$(19) \quad \delta s^2 \sin(\alpha - \beta) = \frac{2V}{I} \left| \begin{array}{cc} (\theta_i \theta_i) \delta t + (\theta_i \theta_r) \delta \tau, & (\theta_i \theta_r) \delta t + (\theta_r \theta_r) \delta \tau \\ (\theta_i \theta_i) \delta t + (\theta_i \theta_r) \delta \tau, & (\theta_i \theta_r) \delta t + (\theta_r \theta_r) \delta \tau \end{array} \right| = 0,$$

wo

$$(20) \quad I = [(\theta_i \theta_i) \delta t + (\theta_i \theta_r) \delta \tau]^2 (\theta_r \theta_r) - 2 [(\theta_i \theta_i) \delta t + (\theta_i \theta_r) \delta \tau] \times \\ [(\theta_i \theta_r) \delta t + (\theta_r \theta_r) \delta \tau] (\theta_i \theta_r) + [(\theta_i \theta_r) \delta t + (\theta_r \theta_r) \delta \tau]^2 (\theta_i \theta_i),$$

$$(21) \quad I = \{[(\theta_i \theta_i)(\theta_r \theta_r) - 2(\theta_i \theta_r)^2 + (\theta_r \theta_r)(\theta_i \theta_i)]^2 - 4[(\theta_i \theta_i)(\theta_r \theta_r) - (\theta_i \theta_r)^2][\theta_r \theta_i)(\theta_r \theta_r) - (\theta_i \theta_r)^2]\}^{\frac{1}{2}}$$

$$(22) \quad R = (\theta_i \theta_i) \delta t^2 + 2(\theta_i \theta_r) \delta t \cdot \delta \tau + (\theta_r \theta_r) \delta \tau^2.$$

### (10)

Sind die parametrischen Kurven auf unserer Kreisfläche  $S$  orthogonal, so wird die Gleichung einer beliebigen Kurve  $K$  auf  $S$  mit

$$(1) \quad \frac{dt}{d\tau} = \left[ \frac{(\theta_r \theta_r)}{(\theta_i \theta_i)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \tan \alpha, \quad (\alpha = \text{const.})$$

gegeben,<sup>(1)</sup> wo  $\alpha$  den Winkel zwischen  $K$  und  $t = \text{const.}$  bedeutet. Der kleine normale Abstand zwischen  $\delta n$  und  $S$  längs der Kurve (1) ist durch

$$(2) \quad \frac{dt}{(\theta_r \theta_r) \sqrt{(\theta_i \theta_i)}} = \frac{d\tau}{-(\theta_i \theta_i) \sqrt{(\theta_r \theta_r)} \tan \alpha} \\ = \frac{dn}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_r \theta_r) \tan^2 \alpha + (\theta_r \theta_r)(\theta_i \theta_i)}} \\ V^2 = (\theta_i \theta_i)(\theta_r \theta_r)$$

zu berechnen.

Aus (1) folgt

$$(3) \quad t = \int_0^\tau \left[ \frac{(\theta_r \theta_r)}{(\theta_i \theta_i)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \tan \alpha \cdot d\tau.$$

Dies ist die Beziehung zwischen  $t$  und  $\tau$ .

Dies ist Isogonaltrajektorie des durch sie bestimmten Kreisbuschels.

Die Kurve (3) ist also eine Loxodrome auf der Kreisfläche.

Aus (3) folgt

$$(4) \quad \frac{t_1 - t_2}{\tau_1 - \tau_2} = \frac{\tan \alpha}{\tau_1 - \tau_2} \int_{\tau_2}^{\tau_1} \left[ \frac{(\theta_r \theta_r)}{(\theta_i \theta_i)} \right]^{\frac{1}{2}} d\tau,$$

(1) Vergl. FORSYTH, A. R.: Lectures on the Differentialgeometry of Curves and Surfaces, Cambridge (1920) p. 62, p. 159.

so folgt der

**Satz:** Das Verhältniss zwischen den Differenzen  $t$  und  $\alpha$  ist gleich.

$$(5) \quad \frac{\tan \alpha}{\tau_1 - \tau_2} \int_{\tau_2}^{\tau_1} \left[ \frac{(\theta_\tau, \theta_\tau)}{(\theta_i, \theta_i)} \right]^{\frac{1}{2}} d\tau.$$

$$(6) \quad \tau_2 + \tan^2 \alpha \cdot \left\{ \int_0^\tau \left[ \frac{(\theta_\tau, \theta_\tau)}{(\theta_i, \theta_i)} \right]^{\frac{1}{2}} d\tau \right\}^2 = \text{const.}$$

bezeichnet den Schnittpunkt mit unserer Kreisfläche und der Kugel, deren Mittelpunkt in  $(0, 0)$  ist.

Setzen wir  $t=0$  in (3) ein, so folgt  $\tau=0$ , so geht unsere Kurve durch den Punkt

$$(t=0, \quad \tau=0).$$

Setzen wir

$$(7) \quad (\theta_i, \theta_\tau) = 0, \quad \theta = 0, \quad \Psi = 0,$$

so folgt aus wohlbekannten Formeln<sup>(2)</sup>:

$$(8) \quad \begin{cases} \delta s^2 \cdot \cos \alpha \cos \beta = \frac{J}{I}, \\ \delta s^2 \cdot \sin \alpha \sin \beta = -\frac{2V^2}{I} \Phi \delta t \cdot d\tau, \\ \delta s^2 \cdot \sin(\alpha - \beta) = \frac{2V}{I} \left| \begin{matrix} (\theta_i, \theta_i) \delta t, & (\theta_\tau, \theta_\tau) \delta \tau \\ \Phi \delta \tau, & \Phi \delta t \end{matrix} \right| \end{cases}$$

wo

$$(9) \quad \begin{cases} J = -2 [(\theta_i, \theta_i) \delta t][(\theta_\tau, \theta_\tau) \delta \tau] \Phi, \\ I = 2V(\theta_i, \theta_i)(\theta_\tau, \theta_\tau) \Phi, \\ V^2 = (\theta_i, \theta_i)(\theta_\tau, \theta_\tau) \\ \beta = \text{Winkel zwischen unserer Kurve und } \tau = \text{const.}, \\ s = \text{Kurvenlänge von } K. \end{cases}$$

Aus (1) folgt

$$(10) \quad \frac{\delta t}{\delta \tau} = \frac{(\theta_\tau, \theta_\tau)^{\frac{1}{2}} \cdot \tan \alpha}{(\theta_i, \theta_i)^{\frac{1}{2}}},$$

also ergibt sich

$$\frac{(\delta t)^2 + (\delta \tau)^2}{(\delta \tau)^2} = \frac{(\theta_i, \theta_i) + (\theta_\tau, \theta_\tau) \tan^2 \alpha}{(\theta_i, \theta_i)},$$

d.h.

$$(11) \quad \delta s^2 = \frac{(\theta_i \theta_i) + (\theta_r \theta_r) \tan^2 \alpha}{(\theta_i \theta_i)} \delta \tau^2.$$

Demnach kann man setzen

$$\delta s = \sqrt{\frac{(\theta_i \theta_i) + (\theta_r \theta_r) \tan^2 \alpha}{(\theta_i \theta_i)}} \cdot \delta \tau.$$

d.h.

$$(12) \quad s = \int_0^\tau \sqrt{\frac{(\theta_i \theta_i) + (\theta_r \theta_r) \tan^2 \alpha}{(\theta_i \theta_i)}} d\tau.$$

Sind

$$(\theta_i \theta_i), \quad (\theta_r \theta_r)$$

von  $\tau$  unabhängig, so folgt

$$(13) \quad s = \sqrt{\frac{(\theta_i \theta_i) + (\theta_r \theta_r) \tan^2 \alpha}{(\theta_i \theta_i)}} \tau + \text{const.}$$

Nach (1) kann man setzen

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{d\tau}{ds} = \frac{\sqrt{(\theta_i \theta_i)}}{\sqrt{(\theta_i \theta_i) + (\theta_r \theta_r) \tan^2 \alpha}}, \\ \frac{dt}{ds} = \frac{\sqrt{(\theta_r \theta_r)} \tan \alpha}{\sqrt{(\theta_i \theta_i) + (\theta_r \theta_r) \tan^2 \alpha}}. \end{cases}$$

Setzen wir

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{d\tau}{ds} = \cos \tau, \\ \frac{dt}{ds} = \sin \tau, \end{cases}$$

so folgt

$$(16) \quad \begin{cases} \cos \tau = \frac{\sqrt{(\theta_i \theta_i)}}{\sqrt{(\theta_i \theta_i) + (\theta_r \theta_r) \tan^2 \alpha}}, \\ \sin \tau = \frac{\sqrt{(\theta_r \theta_r)} \tan \alpha}{\sqrt{(\theta_i \theta_i) + (\theta_r \theta_r) \tan^2 \alpha}}. \end{cases}$$

wo  $\tau$  den Winkel zwischen  $\delta s$  und  $dt = \text{const.}$  bedeutet.

Aus (1) folgt

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{(\theta_r \theta_r)}}{\sqrt{(\theta_r \theta_r) + (\theta_i \theta_i) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2}},$$



$$(17) \quad \begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{(\theta_i, \theta_i)} \frac{dt}{d\tau}}{\sqrt{(\theta_r, \theta_r) + (\theta_i, \theta_i) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2}}, \\ \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r)} \frac{dt}{d\tau}}{2 \left\{ (\theta_r, \theta_r) + (\theta_i, \theta_i) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \right\}}. \end{cases}$$

Aus (17) folgt

$$(18) \quad \alpha = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r)} \frac{dt}{d\tau}}{2 \left\{ (\theta_r, \theta_r) + (\theta_i, \theta_i) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \right\}} \right\}.$$

Aus (18) kann man  $\alpha$  finden.

Ist  $(\theta_r, \theta_r) = 0$  oder  $(\theta_i, \theta_i) = 0$  in (14), so folgt

$$(19) \quad t = \text{const.},$$

oder

$$(20) \quad \tau = \text{const.},$$

d.h. parametrische Kurven.

Sind parametrische Linien isometrisch, so folgt

$$(21) \quad (\theta, \theta_i) = (\theta_r, \theta_r),$$

so erhält man aus (1)

$$(22) \quad \frac{dt}{d\tau} = \tan \alpha = \text{const.}$$

Der Flächeninhalt wird mit

$$(23) \quad \iint dt d\tau = \iint \sqrt{\frac{(\theta_r, \theta_r)}{(\theta_i, \theta_i)}} \tan \alpha \cdot (d\tau)^2$$

gegeben.

Ist

$$(24) \quad ds^2 = 0,$$

so folgt aus (13)

$$(25) \quad (\theta_i, \theta_i) + (\theta_r, \theta_r) \tan^2 \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \tau = \text{const.}$$

(25) ist die Bedingung dafür, dass unsere Kurve auf Kreisfläche Minimallinie ist.

## (11)

Sind

$$(1) \quad \psi(t, \tau, a) = \text{const.} \quad (a = \text{Parameter!})$$

die Gleichungen von Geodätischelinien, so besteht

$$(2) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \delta \tau = 0$$

längs der Geodätischelinien.

Berechnen wir orthogonale Richtung  $dt/d\tau$  von (2), so folgt

$$(3) \quad \left[ (\theta_t, \theta_t) \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - (\theta_t, \theta_\tau) \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] dt + \left[ (\theta_\tau, \theta_\tau) \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - (\theta_\tau, \theta_t) \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] d\tau = 0$$

als die Gleichung von geodätischer Parallele.<sup>(1)</sup>

## (12)

Wir betrachten nun

$$(1) \quad \Delta'' \varphi = 0.$$

(1) bedeutet, dass es eine Funktion  $\psi$  derart gibt, dass

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{(\theta_t, \theta_t) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - (\theta_t, \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial t}}{\sqrt{(\theta_t, \theta_t)(\theta_\tau, \theta_\tau) - (\theta_t, \theta_\tau)^2}}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{(\theta_\tau, \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (\theta_\tau, \theta_t) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}}{\sqrt{(\theta_t, \theta_t)(\theta_\tau, \theta_\tau) - (\theta_t, \theta_\tau)^2}} \end{cases}$$

ist, denn bildet man aus den beiden Gleichungen (2)  $\partial^2 \psi / \partial t \partial \tau$  und setzt die beiden Werte einander gleich, so ergibt sich

$$(3) \quad \Delta'' \varphi = 0.$$

Diese Funktion  $\psi$  lässt sich also durch eine Quadratur finden:

$$(4) \quad \psi = \int \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} dt + \frac{\partial \psi}{\partial \tau} d\tau \right).$$

Löst man die Gleichungen (2) nach  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$  auf, so folgt<sup>(1)</sup>

(1) FORSYTH, A. R.: Lectures on the Differentialgeometry of Curves and Surfaces, Cambridge (1920) p. 169.

$$(5) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{(\theta_i, \theta_i) \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - (\theta_i, \theta_r) \frac{\partial \psi}{\partial t}}{\sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = - \frac{(\theta_r, \theta_r) \frac{\partial \psi}{\partial t} - (\theta_i, \theta_r) \frac{\partial \psi}{\partial \tau}}{\sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2}}.$$

Daraus folgt aber, dass

$$\Delta''\psi = 0$$

ist, oder dass Kurve  $\psi = \text{const.}$  ein Isothermensystem bildet.<sup>(1)</sup>

### (13)

Wir betrachten den ersten und zweiten Zentrimental der  $W$ -Kreisflächen.

Es sind dann die Differentialgleichungen der Asymptotenlinien auf  $C_1$  und  $C_2$  mit

$$(1) \quad (\theta_i, \theta_i) R_2^2 \frac{\partial R_1}{\partial t} dt^2 - (\theta_r, \theta_r) R_1^2 \frac{\partial R_2}{\partial \tau} d\tau^2 = 0,$$

bzw.

$$(2) \quad (\theta_i, \theta_i) R_1^2 \frac{\partial R_1}{\partial \tau} d\tau^2 - (\theta_r, \theta_r) R_2^2 \frac{\partial R_2}{\partial t} dt^2 = 0$$

gegeben.<sup>(2)</sup>

### (14)

$\phi(t, \tau) = 0$  bezeichnet eine Kurve auf einer Kreisfläche  $S$ .

$t = \text{const.}$ ,  $\tau = \text{const.}$  bezeichnen parametrische Kurven auf  $S$ .

Wenn  $\omega$  der Winkel zwischen parametrischen Kurven ist, so folgt

$$(1) \quad \sin \omega = \frac{\sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2}}{\sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r)}}, \quad \tan \omega = \frac{\sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2}}{(\theta_i, \theta_r)}.$$

Seien (2)  $\phi(t, \tau) = c$  Kurve  $PC$  auf einer Kreisfläche, so folgt

$$(3) \quad \phi_1 dt + \phi_2 d\tau = 0,$$

$$(4) \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_r, \theta_r) - (\theta_i, \theta_r)^2} \frac{d\tau}{ds}}{\sqrt{(\theta_r, \theta_r)}} \\ = \frac{V \phi_2}{\sqrt{(\theta_r, \theta_r)[(\theta_i, \theta_i) \phi_2^2 - 2(\theta_i, \theta_r) \phi_1 \phi_2 + (\theta_r, \theta_r) \phi_1^2]}}$$

(1) Vergl. KOMMERELL, V. und KOMMERELL, K.: Theorie der Raumkurven und krummen Flächen, II, Berlin und Leipzig (1931) p. 34.

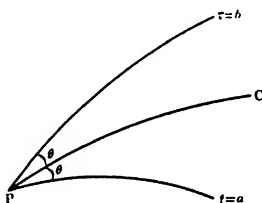
(2) Vergl. KOMMERELL, V. und KOMMERELL, K.: Theorie der Raumkurven und krummen Flächen, II, Berlin und Leipzig (1931) S. 63.

wo  $c$  eine Konstante,  $s$  Kurvenlänge längs (2) und  $\theta$  den Winkel zwischen  $PC$  und  $t = a$  bezeichnen.

Seien  $\theta'$  der Winkel zwischen  $PC$  aus  $S$  und  $\tau = b$ , so folgt

$$(5) \quad \cos \theta' = \frac{(\theta_t \theta_t) \frac{dt}{ds} + (\theta_t \theta_\tau) \frac{d\tau}{ds}}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)}} \\ = \frac{(\theta_t \theta_t) \phi_2 - (\theta_t \theta_\tau) \phi_1}{\{(\theta_t \theta_t)[(\theta_t \theta_t) \phi_2^2 - 2(\theta_t \theta_\tau) \phi_1 \phi_2 - (\theta_\tau \theta_\tau) \phi_1^2]\}^{\frac{1}{2}}},$$

$$(6) \quad \sin \theta' = \frac{\sqrt{\frac{d\tau}{ds}}}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)}} \\ = - \frac{\sqrt{\phi_1}}{\{(\theta_t \theta_t)[(\theta_t \theta_t) \phi_2^2 - 2(\theta_t \theta_\tau) \phi_1 \phi_2 + (\theta_\tau \theta_\tau) \phi_1^2]\}^{\frac{1}{2}}},$$



wo  $\theta + \theta' = \omega$ ,  $a, b, c$  Konstanten sind.

Nun nehmen wir andere Kurve  $PC'$  auf  $S$ , deren Gleichung ist:

$$(7) \quad \psi(t, \tau) = c',$$

so folgt

$$(8) \quad \cos x = \frac{(\theta_t \theta_t) \phi_2 \psi_2 - (\theta_t \theta_\tau)(\phi_2 \psi_1 + \psi_2 \phi_1) + (\theta_\tau \theta_\tau) \phi_1 \psi_1}{[(\theta_t \theta_t) \phi_2^2 - 2(\theta_t \theta_\tau) \phi_2 \phi_1 + (\theta_\tau \theta_\tau) \phi_1^2]^{\frac{1}{2}} [(\theta_t \theta_t) \psi_2^2 - 2(\theta_t \theta_\tau) \psi_2 \psi_1 + (\theta_\tau \theta_\tau) \psi_1^2]^{\frac{1}{2}}},$$

$$(9) \quad \sin x = \frac{\sqrt{(\phi_2 \psi_1 - \psi_2 \phi_1)}}{[(\theta_t \theta_t) \phi_2^2 - 2(\theta_t \theta_\tau) \phi_2 \phi_1 + (\theta_\tau \theta_\tau) \phi_1^2]^{\frac{1}{2}} [(\theta_t \theta_t) \psi_2^2 - 2(\theta_t \theta_\tau) \psi_2 \psi_1 + (\theta_\tau \theta_\tau) \psi_1^2]^{\frac{1}{2}}},$$

$$(10) \quad X = L(PC, PC').$$

Wenn zwei Richtungen  $dt: d\tau$  und  $\delta t: \delta \tau$  orthogonal sind, so folgt

$$(11) \quad (\theta_t \theta_t) dt \delta t + (\theta_t \theta_\tau)(dt \delta \tau + d\tau \delta t) + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau \delta \tau = 0.$$

Ist  $X$  der Winkel zwischen zwei Richtungen durch

$$(12) \quad \theta dt^2 + 2\Phi dt d\tau + \Psi d\tau^2 = 0,$$

so folgt

$$(13) \quad \frac{\sin x}{2V(\Phi^2 - \theta\psi)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\cos x}{(\theta_i \theta_i) \psi - 2(\theta_i \theta_r) \Phi + (\theta_r \theta_r) \theta}.$$

Ist  $X = \pi/2$ , so besteht

$$(14) \quad (\theta_i \theta_i) \psi - 2(\theta_i \theta_r) \Phi + (\theta_r \theta_r) \theta = 0$$

Die orthogonale Kurve zu

$$(15) \quad f(t, \tau) = a$$

ist durch

$$(16) \quad \left[ (\theta_i \theta_i) \frac{\partial f}{\partial \tau} - (\theta_i \theta_r) \frac{\partial f}{\partial t} \right] d\tau + \left[ (\theta_r \theta_r) \frac{\partial f}{\partial \tau} - (\theta_r \theta_i) \frac{\partial f}{\partial t} \right] dt = 0$$

gegeben, wo  $a$  beliebige Konstante ist.

Wenn  $\omega$  der Winkel zwischen parametrischen Kurven ist, so ist

$$(17) \quad \cos \omega = \frac{(\theta_i \theta_i)}{[(\theta_i \theta_i)(\theta_r \theta_r)]^{\frac{1}{2}}}$$

Ist  $(\theta_i \theta_r) = 0$ , so folgt  $\omega = \pi/2$ .

Für Nulllinie besteht

$$(18) \quad (\theta_i \theta_i) \left( \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right)^2 - 2(\theta_i \theta_r) \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + (\theta_r \theta_r) \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 = 0.$$

### (15)

Zwei Tangenten einer Kreisfläche, die von einem Punkt  $M$  der Kreisfläche ausgehen, heißen nach DUPAN konjugiert, wenn sie bezüglich der Indikatrix konjugiert sind.

Zeichnen wir die Krümmungslinien mit  $t, \tau$  und den Neigungswinkel der beiden konjugierten Tangenten der Kurve  $\tau$  mit  $\theta, \theta'$ , so haben wir zufolge der obigen Festsetzungen:

$$(1) \quad \tan \theta \cdot \tan \theta' = -\frac{r_1}{r_2}.$$

Wenden wir ferner das Symbol  $d$  bei den Zunahmen längs der ersten,  $\delta$  bei denjenigen längs der konjugierten Richtung an, so haben wir

$$(2) \quad \begin{cases} \tan \theta = \sqrt{\frac{(\theta_r \theta_r)}{(\theta_i \theta_i)}} \frac{d\tau}{dt}, \\ \tan \theta' = \sqrt{\frac{(\theta_r \theta_r)}{(\theta_i \theta_i)}} \frac{\delta \tau}{\delta t}, \end{cases}$$

demnach<sup>(1)</sup>:

$$(3) \quad \frac{(\theta_i, \theta_j)}{r^2} dt \delta t + \frac{(\theta_i, \theta_j)}{r_1} d\tau \delta \tau = 0.$$

(16)

Setzen wir

$$(1) \quad \cos^2 \varphi \equiv \rho^2,$$

so folgt<sup>(1)</sup>

$$(2) \quad \rho^2 = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = T_{\alpha\beta} \rho^\alpha \rho^\beta.$$

Ist  $\varphi = \text{const.}$ , so ergibt sich aus (2)

$$(3) \quad \frac{d(\rho^2)}{ds} = \frac{d}{ds} (T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta) = 0,$$

wo  $s$  die Kurvenlänge längs  $\mathfrak{K}$  aus dem festen Punkt auf  $\overline{\mathfrak{K}}$  bedeutet.

(3) ist die Bedingung dafür, dass  $\varphi$  unabhängig ist von der Stelle des Schnittpunktes von Kugel  $\mathfrak{y}$  und  $\overline{\mathfrak{K}}$ .

Durch die Ausführung der Transformation<sup>(2)</sup>

$$(4) \quad \rho_\alpha = \dot{Q}_\beta^{\alpha} \bar{\rho}^\beta$$

geht (2) über in

$$(5) \quad \bar{\rho}^2 = \bar{T}^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\alpha \bar{\rho}_\beta.$$

Der transformierte Tensor  $\bar{T}^{\alpha\beta}$  lässt sich ursprünglich mittels der Formeln bezeichnen:

$$(6) \quad \bar{T}_{\gamma\delta} = T_{\alpha\beta} \dot{Q}_\gamma^\alpha \dot{Q}_\delta^\beta.$$

Setzen wir

$$(7) \quad T^{\alpha\beta} \rho_\beta = \rho^\alpha$$

in (2), so folgt

$$(8) \quad \rho^2 = \rho_\alpha \rho^\alpha.$$

Die Grössen (8) sind die Momente der Richtung.

(1) LUKAT, M.: Bianchis Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig und Berlin (1910) S. 106.

Vergl. Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ. Vol. V (1933) p. 303.

(2) LEVI-CIVITA: Der absolute Differential-Kalkül, Berlin (1928) S. 16.

## (17)

Setzen wir

$$(\mathfrak{x}^a \mathfrak{x}^b) = A^{ab},$$

wo  $\mathfrak{x}^a$  die Kugel im  $R_3$  bedeutet.

Für  $A = 0$  schrumpft der Kreis auf einen Punkt zusammen, da sich dann die  $\mathfrak{x}^a$  berühren, für  $A < 0$  ist er imaginär.

Ist  $A^{ab} \equiv 0$ , so erhalten wir im komplexen Gebiet als Ausartung eine Minimalgerade.

## (18)

Zwei gerichtete Kugeln  $\mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{y}$  schreiben mit Hilfe einer Hilfskugel, die  $\mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{y}$  gleichsinnig berührt, einen Winkelkosinus:

$$(1) \quad \cos \varphi = \kappa = (\mathfrak{x} \mathfrak{y})(\mathfrak{y} \mathfrak{z})(\mathfrak{z} \mathfrak{x}).$$

Es gelten nämlich die Vorzeicheninvarianten

$$(2) \quad \varepsilon = \text{sgn}(\mathfrak{x}^I \mathfrak{x}^{II})(\mathfrak{x}^{II} \mathfrak{x}^{III})(\mathfrak{x}^{III} \mathfrak{x}^I)$$

drei Kugeln  $\mathfrak{x}^a$ . Es ist z.B.  $\varepsilon = -$ , wenn die drei Kugeln sich durch stetige Abänderungen in Möbiuss Räume auf Punkte zusammenziehen lassen, ohne dass sie dabei in „orthogonal Lage“ kommen.

(1) ROTH, R.: Aufgabe aus der Kurventheorie, Archiv der Mathematik und Physik III Reihe XXVIII, Heft 3/4, S. 171.



$$\Delta(s) = 3 \cdot \exp(3s/c) \cdot \int \tan \varphi \cdot \exp(3s/c) ds$$

ist.

In dieser Note möchte ich die Arbeiten von KUBOTA,<sup>(1)</sup> TAKASU, NARUMI und natürliche Geometrie mit der oben genannten Arbeit vergleichen und dadurch die Fundamentalsätze über Inversionsgeometrie, LAGUERRE-Geometrie und allgemeine Formulae in die natürliche Geometrie in einer etwas modifizierten Form setzen.

## § 2. Zur Inversionsgeometrie

Bezeichnet man nämlich die natürliche Gleichung der Ebenenkurve mit

$$\rho =$$

wo  $\rho$  den Krümmungsradius und  $s$

bleibt

$$(4) \quad \frac{d\Delta}{ds}$$

durch möbiussche Involution unge-  
durch Inversion ändert.

zeichen

Gleiches gilt für

$$(5) \quad I = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\frac{d\Delta}{ds}} - \frac{d\Delta}{ds} \right) + \left( \frac{\Delta}{\frac{d\Delta}{ds}} \right)^2$$

Auch gelten die folgenden Satz

Damit die beiden Ebenenkurve

$$(6) \quad \rho = \Delta(s)$$

gegeben sind, durch eine Möbiussche Inversion und eine Bewegung<sup>(2)</sup> zueinander überführbar seien, ist es notwendig und hinreichend, dass in den Punkten, in denen die Zuordnung durch

$$(7) \quad \frac{d\Delta \cdot ds}{\Delta^2} = \frac{d\bar{\Delta} \cdot d\bar{s}}{\bar{\Delta}^2}$$

definiert ist, die Invariante  $I$  den gleichen Wert hat.

Damit die durch eine Inversion und eine Bewegung zueinander über-

(1) KUBOTA, T.: Beiträge zur Inversionsgeometrie und Laguerre-Geometrie, Japanese Journal of Mathematics Vol. 1 (1924) p. 41.

(2) MATSUMURA, S.: Beiträge zur Inversionsgeometrie, Tôhoku Math. Jour. Vol. 37 (1933) p. 468.

föhrbar seien, ist es notwendig und hinreichend, dass in den Punkten, in denen die Zuordnung durch

$$\frac{d\Delta \cdot ds}{\Delta^2} = \frac{d\bar{\Delta} \cdot d\bar{s}}{\bar{\Delta}^2}$$

definiert ist, die Invariante  $I$  den entgegengesetzt gleichen Wert hat.

Bezeichnet man

$$(8) \quad \int \frac{1}{\Delta} \sqrt{\pm \frac{d\Delta}{ds}} ds$$

als Inversionsparameter  $p$ , so kann die Relation

$$(9) \quad \pm I = \varphi(p),$$

als natürliche Gleichung der Ebenenkurve in der Inversionsgeometrie betrachtet werden.

### § 3. Differentialinvarianten der Laguerreschen Gruppe

Wenn die beiden Ebenenkurven jede mit den natürlichen Gleichungen

$$(10) \quad \rho = \Delta(s), \quad \bar{\rho} = \bar{\Delta}(\bar{s})$$

durch eigentliche Laguerresche Transformation ineinander überföhrbar sind, dann gilt

$$(11) \quad \frac{d\Delta \cdot ds}{\Delta} = \frac{d\bar{\Delta} \cdot d\bar{s}}{\bar{\Delta}};$$

wenn sie durch eigentliche Laguerresche Transformation ineinander überföhrbar sind, dann gilt

$$(12) \quad \frac{d\Delta \cdot ds}{\Delta} = - \frac{d\bar{\Delta} \cdot d\bar{s}}{\bar{\Delta}}.$$

Gleiches gilt auch für die Invariante:

$$(13) \quad I = \frac{5}{4} \frac{(\Delta'')^2 \Delta}{(\Delta')^3} + \frac{1}{4} \frac{\Delta'}{\Delta} + \frac{1}{\Delta \Delta'} - \\ - \frac{\Delta \Delta'''}{(\Delta')^2} - \frac{3}{2} \frac{\Delta''}{\Delta'},$$

wobei die Differentiation in Bezug auf  $S$  zu nehmen ist. Damit die beiden Ebenenkurven durch eine eigentliche Laguerresche Transformation zueinander überföhrbar seien, ist es notwendig und hinreichend, dass in den Punkten, in denen die Zuordnung durch

$$(14) \quad \frac{ds \cdot d\Delta}{\Delta} = \frac{d\bar{s} \cdot d\bar{\Delta}}{\bar{\Delta}}$$

definiert ist, auch die Beziehung

$$(15) \quad I = \bar{I}$$

gilt.

Damit die beiden Ebenenkurven durch eine eigentliche Laguerresche Transformation ineinander überführbar seien, ist es notwendig und hinreichend, dass in den Punkten, in denen die Zuordnung durch

$$(16) \quad \frac{ds \cdot d\Delta}{\Delta} = - \frac{d\bar{s} \cdot d\bar{\Delta}}{\bar{\Delta}}$$

definiert ist, auch die Beziehung

$$(17) \quad I = -I$$

gilt.

Bezeichnet man

$$(18) \quad \int \sqrt{\pm \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{ds}} ds$$

als Laguerreparameter  $p$ , so kann

$$(19) \quad \pm I = \varphi(p)$$

als natürliche Gleichung der Ebenenkurve in der Laguerregeometrie betrachtet werden.

#### § 4. Über natürliche Geometrie

Aus (1) folgt

$$(20) \quad ds = \{3(\tan \varphi + \rho/c)\}^{-1} d\rho,$$

so folgt

$$(21) \quad \phi = \int_0^{\rho} \{3(\tan \varphi + \rho/c)\}^{-1} d\rho,$$

wobei  $\phi$  der Winkel ist, den die Tangente in  $P$  mit einer festen Gerade bildet.

Als Kettenlinie bezeichnet man die durch die Gleichung

$$(22) \quad \rho = a + s^2/a$$

dargestellte Kurve, wo  $a$  eine Konstante ist.

Aus (22) ergibt sich

$$(23) \quad \rho = a + \frac{1}{a} \left( \int_0^a \{3 (\tan \varphi + \rho/c)\}^{-1} d\rho \right)^2,$$

oder (24)  $\Delta \equiv a + s^2/a$ .

(i)  $\frac{1}{\Delta} \equiv 0$  bezeichnet eine Gerade.

(ii)  $\Delta = \text{const.}$  bezeichnet einen Kreis.

(iii)  $\Delta \equiv a \sqrt{e^{\frac{s^2}{a}} - 1}$  bezeichnet Traktrix, wo  $a$  eine Konstante ist.

(iv)  $\frac{s^2}{a^2} + \frac{\Delta^2}{b^2} \equiv 1$  bezeichnet Epicycloide, Hypocycloide oder Cycloid, wo  $a, b$  Konstanten sind.

(v)  $\Delta \equiv ka \sqrt{1 - e^{-\frac{s^2}{a}}}$  bezeichnet Pseudotractrices, wo  $k$  eine Konstante ist, u.s.w..

Auch besteht die Beziehung

$$(24') \quad \lim \phi/s = \lim 1/\Delta.$$

Wenn zwischen zwei reellen Veränderlichen  $s, \Delta$  eine Gleichung

$$(25) \quad f(s, \Delta) = 0$$

gegeben wird, durch welche  $\Delta$  für ein den Wert

$$s = 0$$

enthaltendes Intervall als eine von Null verschiedene Funktion von  $s$  bestimmt wird, so kann man von einer ebenen Linie  $l$  fordern, sie soll von singulären Punkten frei und ausserdem so beschaffen sein, dass ihre von einem festen Anfang bis zu einem beweglichen Endpunkt  $P$  gemessene und in der einen Richtung positiv, in der andern negativ gerechnete Bogenlänge mit  $s$  und ihr Krümmungsradius in  $P$  mit  $\Delta$  übereinstimmt.

Durch diese Forderung wird die Gestalt von  $l$  bestimmt, während die Lage unbestimmt bleibt.

Eine Gleichung dieser Art heisst hier eine natürliche Gleichung der betreffenden Linie.

Aus der natürlichen Gleichung

$$f(s, \Delta) = 0$$

einer Linie kann man eine Parameterdarstellung derselben gewinnen, indem man zunächst eine Funktion  $\tau$  von  $s$  durch die Gleichung

$$(26) \quad \tau = \int \frac{ds}{\Delta}$$

bestimmt, wo die Integrationskonstante willkürlich gewählt werden kann, und demnach

$$(27) \quad x = \int \cos \tau \, ds, \quad y = \int \sin \tau \, ds$$

setzt.

Hat man aus der natürlichen Gleichung eine Linie  $l$  die Krümmung

$$k = 1/\Delta$$

als Funktion der Bogenlänge  $s$  berechnet:

$$(28) \quad k = g(s)$$

so erhält man, wenn  $\tau$  die ganze Krümmung des Bogens  $s$  bezeichnet, zunächst:

$$(29) \quad \frac{dk}{d\tau} = \frac{dk}{ds} \frac{ds}{d\tau} = \frac{dk}{ds} \cdot \frac{1}{k} = \frac{g'(s)}{g(s)}$$

und kann aus dieser und der vorangehenden durch Elimination von  $s$  eine Gleichung:

$$(30) \quad \frac{dk}{d\tau} = \omega(k)$$

zwischen den beiden ersten Differentialinvarianten  $k$  und  $dk/d\tau$  ableiten.

Eine Parameterdarstellung von  $l$  kann man aus ihr dadurch gewinnen, dass man aus der Gleichung

$$(31) \quad \int \frac{dk}{\omega(k)} = \tau,$$

in welcher die Integrationskonstante beliebig gewählt werden darf,  $k$  als Funktion von  $\tau$  berechnet und sodann:

$$(32) \quad x = \int \frac{\cos \tau}{k} d\tau, \quad y = \int \frac{\sin \tau}{k} d\tau$$

setzt.

Ist die Gleichung der ebenen Kurve  $C$  mit

$$(33) \quad \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

gegeben, wo  $(x, y)$  Kartessische Koordinaten von beliebigem Punkt auf  $C$ ,  $t$  ein Parameter bedeutet, dann folgt

$$(34) \quad \Delta = \frac{(\varphi'^2 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi' \psi'' - \psi' \varphi''}.$$

Bezeichnen wir nun die auf dasselbe Koordinatensystem bezogenen Koordinaten des Krümmungsmittelpunkt  $R$  von  $P(x, y)$  mit  $\xi, \eta$ , so lauten die Gleichungen für den Teilbogen der  $R$ -Kurve:

$$(35) \quad \begin{cases} \xi = x - \Delta \cdot \sin \alpha, \\ \eta = y + \Delta \cdot \cos \alpha, \end{cases}$$

wo

$$(36) \quad \begin{cases} \sin \alpha = y'/s', \\ \cos \alpha = x'/s' \end{cases}$$

und

$$(37) \quad s' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

ist und  $x', y'$  die Ableitungen der Funktionen

$$(38) \quad \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Wenn das Bogendifferential der  $R$ -Kurve mit  $d\sigma$  bezeichnet wird, dann folgt

$$(39) \quad \frac{d\sigma}{dt} = \pm \frac{d\Delta}{dt}.$$

Aus

$$(40) \quad \rho''(\theta) + \rho(\theta) = \nabla(\theta),$$

folgt

$$(41) \quad \begin{aligned} \rho(\theta) = \sin \theta \left[ \int_0^\theta \nabla(t) \cos t \, dt + c_1 \right] - \\ - \cos \theta \left[ \int_0^\theta \nabla(t) \sin t \, dt + c_2 \right], \end{aligned}$$

wo

$$(42) \quad \rho = \Delta(s) = \nabla(\theta),$$

$c_1, c_2$  zwei Konstanten von  $\rho(\theta)$  Stützfunktion sind.<sup>(1)</sup> Setzen wir

$$(43) \quad \begin{cases} U(\theta) = \int_0^\theta \nabla(t) \cos t \, dt + c_1, \\ V(\theta) = \int_0^\theta \nabla(t) \sin t \, dt + c_2, \end{cases}$$

(1) Vergl. JORDAN, C. et FIEDLER, R.: Contribution à L'étude des Courbes Convexes fermées et de certaines courbes qui s'y Rattachent, Paris (1912), p. 5.

so folgt

$$(44) \quad \begin{cases} p(\theta) = U(\theta) \sin \theta - V(\theta) \cos \theta, \\ p'(\theta) = U(\theta) \cos \theta + V(\theta) \sin \theta, \\ r(\theta) = \sqrt{p^2(\theta) + p'^2(\theta)} = \sqrt{U^2 + V^2}, \end{cases}$$

wo  $r(\theta)$  Polarkoordinaten von  $(x, y)$  sind.

So ist

$$p^2 + p'^2 = U^2 + V^2 = \text{const.}$$

die Gleichung des Kreises.

Die natürliche Gleichung des Kegelschnitts ist mit

$$(45) \quad s = \frac{1}{3} \int \frac{d\Delta}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{b\Delta}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right)\left(\frac{a\Delta}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}}$$

gegeben, wo  $a, b$  zwei Konstanten sind.

Aus (1) folgt

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{dp}{3(\tan \varphi + \rho/c) dt},$$

wo  $v$  die Geschwindigkeit von einem Bewegungsmasspunkt auf einer ebenen Kurve,  $t$  die Zeit bezeichnet, so ergibt sich

$$(46) \quad N = \left\{ \frac{1}{9\rho(\tan \varphi + \rho/c)^2} \right\} \cdot \left( \frac{dp}{dt} \right)^2,$$

wo  $N$  die Komponentenzerlegung von Beschleunigung längs der Normal von ebener Kurve der Bewegung<sup>(1)</sup> ist.

Zeigen wir die kinematische Energie mit  $T$ , dann folgt

$$(47) \quad T = \left\{ \frac{m}{18} \right\} \left( \frac{dp}{dt} \right)^2 \left\{ \frac{1}{(\tan \varphi + \rho/c)} \right\},$$

wo  $m$  das Mass von Bewegungskörper bedeutet.

Zu den wesentlichen Eigenschaften einer Kurve gehört unter anderm der Zusammenhang zwischen der Grösse der fortschreitenden und der drehenden Bewegung eines Punktes, der als die Kurve erzeugend gedacht wird.

Bezeichnen wir die Länge des Bogens einer Kurve von einem Anfangspunkt  $A$  bis zu einem beliebigen Punkt  $P$  mit  $s$ , die Grösse des Winkels, den die Tangente am Punkt  $P$  mit der am Punkte  $A$ , oder einer sonstigen Richtung bildet, mit  $\theta$ , so gibt die Gleichung

(1) ROUTH, E. J.: A treatise on Dynamics of a Particle, Cambridge (1898), p. 12.

$$(48) \quad \int_0^{\rho} \{3 (\tan \varphi + \rho/c)\}^{-1} d\rho = \varphi(\omega)$$

den erwähnten Zusammenhang an.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Ebenenkurve periodisch ist, ist die

$$\int_0^{2\pi} \Delta(t) \sin t \, dt = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \Delta(t) \cos t \, dt = 0,$$

oder

$$\int_0^{2\pi} \Delta'(t)(a_0 + \cos(t-a)) dt = 0,$$

wo  $a_0, a_1$  zwei beliebige Konstanten sind.

Aus Satz von MINKOWSKI folgt der

**Satz:** *Alle Kurven derselben konstanten Breite  $b$  haben denselben Umfang  $b\pi$ , wo*

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\Delta} = k,$$

$$\nabla(\theta) + \nabla(\theta + \pi) = b$$

ist.

Es sei  $p(\theta)$  die Stützgeradenfunktion der  $C''$  Klasse von einer konvexgeschlossenen Kurve  $C$  in  $R_2$ . Die Bedingung dafür, dass  $C$  eine Mittelpunktkurve ist, ist dann mit

$$\nabla(\theta) = \nabla(\theta + \pi)$$

bezeichnet, wo

$$p''(\theta) + p(\theta) = \nabla(\theta).$$

Wir betrachten ebene Kurven, die in jeder Richtung mindestens zwei parallele Tangenten besitzen, und bezeichnen den Abstand  $b$  zweier paralleler Tangenten als Breite der Kurve. Nach ARVESEN werden die Bogenlänge  $s$ , der Krümmungsradius  $\Delta(s)$  und der Winkel  $\theta$ , den die variable Tangente mit einer festen Tangente einschlieszt, als Funktionen von  $b$  dargestellt:<sup>(1)</sup>

$$s = \{3 \tan \varphi + \rho/c\}^{-1} d\rho$$

$$= \int \Phi(b) db = \int \Phi(\Delta(\theta) + \Delta(\theta + \pi)) d(\Delta(\theta) + \Delta(\theta + \pi)),$$

(1) ARVESEN, O. P.: Quelques études sur la largeur des courbes, Avhandling Oslo 1926, Nr. 5, S. 18.



$$\rho = \Delta(s) = \psi(b),$$

$$\theta = \int \frac{\Phi(b)}{\psi(b)} db.$$

Wir setzen die bekannte Tatsache auseinander, dass die "*elastischen Linien*" in der Ebene zusammenfallen mit den Extremalen des Variationsproblems<sup>(1)</sup>

$$\int \frac{ds}{\{\Delta(s)\}^2} = \text{Minimum.}$$

Die Gleichung

$$\begin{aligned} & -\frac{\Delta(s) \frac{d^3 \Delta}{ds^3}}{\left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2} + \frac{1}{\Delta \frac{d\Delta}{ds}} - \frac{3 \frac{d^2 \Delta}{ds^2}}{2 \frac{d\Delta}{ds}} + \\ & + \frac{5\Delta \left(\frac{d^2 \Delta}{ds^2}\right)^2}{4 \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^3} + \frac{\frac{d\Delta}{ds}}{4\Delta} = \phi(p) \end{aligned}$$

ist als natürliche Gleichung von ebener Kurve unter Laguerrescher Transformation benützbar, wo

$$dp = \sqrt{\frac{d\Delta \cdot ds}{\Delta}}.$$

ist.<sup>(2)</sup>

$$36 \Delta^2 \Delta_1 + 40 \Delta_1^3 - 45 \Delta \Delta_1 \Delta_2 + 9 \Delta^2 \Delta_3 = 0$$

ist die Gleichung von Kegelschnitt<sup>(3)</sup>.

Im Folgenden betrachten wir elliptisch-konvexe Ovale.<sup>(4)</sup>

Es sei  $f(x, y) = 0$  die Gleichung einer analytischen Kurve ( $M$ ), die ein konvexes Oval bildet, und es sei ferner  $\varphi$  der Winkel der äusseren Normale gegen die X-Achse.

Es werde weiter mit  $\Delta(s)$  der durchweg positiv gerechnete Krümmungsradius von ( $M$ ) im Punkte  $(x, y)$  oder  $s$  bezeichnet; dann bestehen für die Punkte von ( $M$ ) die Gleichungen

(1) APPEL: Courbe de raccordement et élastique plane, S. M. F. Bull. 49 (1921), 105-108.

(2) TAKASU, T.: Natural Equations of curves under circular point-Transformation Group and their Duals, I, Japanese Journ. of Math. Vol. 1 (1924) p. 52.

(3) NARUMI, S.: On the characteristic property of the Conic Section, Tôhoku Math. Journ. Vol. 19 (1921) p. 196.

(4) BÖHMER, P.: Über elliptisch-konvexe Ovale, Math. Ann. 60 (1905) S. 256.

$$(49) \quad \begin{cases} \frac{dx}{d\varphi} = -\Delta(s) \sin \varphi, \\ \frac{dy}{d\varphi} = \Delta(s) \cos \varphi. \end{cases}$$

Spezialisieren wir die Lage des Koordinatensystems dahin, dass die X-Achse (M) im Punkte  $x=0$  berührt und daher  $\varphi = -\pi/2$  ist, so hat der im Koordinatenursprunge (M) fünfpunktig berührende Kegelschnitt eine Gleichung von der Form

$$(50) \quad y = \frac{1}{2} (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2).$$

Setzt man  $d\rho/d\varphi = \rho_1$  und  $d^2\rho/d\varphi^2 = \rho_2$ , so lassen sich die Gröößen A, B und C durch die Werte ausdrücken, die  $\rho$ ,  $\rho_1$  und  $\rho_2$  im Oskulationspunkte besitzen; denn differenziert man (2) viermal nach  $\varphi$  und setzt dann in den vier so entstehenden Gleichungen für  $x$ ,  $y$  und  $\varphi$  bezüglich 0 o und  $-\pi/2$  ein, so verschwindet die erste der vier Gleichungen identisch und aus den drei übrig gebliebenen erhält man

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\Delta(s)}; \quad B = -\frac{\rho_1}{3\rho^2} = -\frac{\Delta'(s)\frac{ds}{d\varphi}}{3\Delta^2}; \quad C = \frac{9\rho^2 + 5\rho_1^2 - 3\rho\rho_2}{9\rho^3} = \\ = \frac{9\Delta^2(s) + 5\Delta'^2(s)\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 - 3\Delta(s)\frac{d}{d\varphi}\left(\Delta'\frac{ds}{d\varphi}\right)}{9\Delta^2(s)}. \end{aligned}$$

Erteilt man C statt des vorstehenden Wertes eine stetige Folge von reellen Werten, so liefert die Gleichung (2) eine einfache Schar von Kegelschnitten, die mit (M) die Tangente und die Gröößen  $\rho$  und  $\rho_1$  oder  $\Delta'(s)ds/d\varphi$  gemein haben, und daher (M) im Nullpunkte vierpunktig berühren; unter ihnen gibt es eine einzige Parabel, die durch das Verschwinden der Determinante  $AC - B^2$  bestimmt ist, während  $AC - B^2 > 0$  den Ellipsen,  $AC - B^2 < 0$  den Hyperbeln der Schar zukommt.

Bildet man den Ausdruck  $AC - B^2$  für (M), so erhält man

$$(51) \quad \frac{1}{9\rho^3} (9\rho^2 + 4\rho_1^2 - 3\rho\rho_2) = \frac{P}{9\rho^3}, \quad \left( \rho_1 = \Delta'(s) \frac{ds}{d\varphi} \right),$$

und es ist der positive oder negative Wert von P das Kriterium dafür, ob der oskulierende Kegelschnitt eine Ellipse oder eine Hyperbel ist.

Anstatt (1) setzen wir

$$(52) \quad \tan(\varphi + \eta) = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds},$$

so folgt

$$(53) \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \eta = 0.$$

Sind  $\rho \neq 0$ ,  $d\rho/ds \neq \infty$ , so folgt

$$(54) \quad \lim_{c \rightarrow 0} \eta = -\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right).$$

Mit (52) kann man untersuchen wie in meiner Arbeit.<sup>(1)</sup>

Für einen gewöhnlichen Kurvenpunkt ist  $\varphi$  ein Winkel zwischen  $-\pi/2$  und  $+\pi/2$ .

Die Punkte, für die er gleich Null ist, heißen Scheitel.

Aus (1) ergibt sich der

**Satz:** Die Scheitel ist diejenige Stelle ebener Kurve, an welcher

$$\tan \varphi = -\frac{\rho}{c}$$

besteht.

Dies ist der verallgemeinerte Satz<sup>(2)</sup> von TAKASU.

Wenn

$$\varphi = 0,$$

in (1), so folgt

$$\frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds} = \frac{\rho}{c},$$

oder

$$\rho = \text{const.} \cdot e^{\frac{3}{c}s},$$

z.B. wenn in der Kurve

$$\rho = as^b, \quad (a, b \text{ konstanten sind}),$$

und wenn

$$\varphi = 0,$$

so folgt

$$s^{b-1} \left[ \frac{1}{3} b - \frac{a}{c} s \right] = 0,$$

oder

$$s = \frac{bc}{3a},$$

(1) MATSUMURA, S.: Über einen affineo. Satz und die Deviation ebener Kurven, Tôhoku Math. Jour. 36 (1933) p. 189.

(2) TAKASU, T.: Vierscheitelsatz in der Lieschen höheren Kreisgeo. Tôhoku Math. Journ. Vol. 38 (1933) p. 300.

$$s=0 \text{ (wenn } b>1),$$

Den Ort der Krümmungsmittelpunkte einer Ebenenkurve pflegt man ihre Krümmungsmittelpunktkurve (auch Evolute) zu nennen.

Als Gleichungen dieser Kurve treten die folgenden auf:

$$(55) \quad \begin{cases} x_1 = x - \Delta(s) \cdot g_2'(s), \\ y_1 = y + \Delta(s) \cdot g_1'(s), \end{cases}$$

wo  $\tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{dp}{ds} - \frac{\rho}{c}$  ist.

Hier sind  $x_1$  und  $y_1$  als Funktionen der Bogenlänge  $s$  der Ausgangskurve  $(x, y)$  dargestellt;  $q$  spielt dieselbe Rolle, wie in der zitierten Arbeit.<sup>(1)</sup>

Wir fragen zunächst nach der Bogenlänge der Krümmungsmittelpunktskurve.

Bezeichnet  $s_1$  die dem fraglichen Intervall entsprechende Bogenlänge der Krümmungsmittelpunktskurve, so entsteht:

$$(56) \quad s_1 = \int_0^s |\Delta'(s)| ds,$$

wenn wir die Bogenlänge  $s_1$  mit wachsendem  $s$  als wachsend ansehen und unter  $|\Delta'(s)|$ , wie üblich, den absoluten Wert von  $\tan q$  verstehen.

In dem Falle, dass die Brennpunkte durch Reflexion in einer Ebene liegen, liegt der leuchtende Punkt im Unendlichen und es wird

$$r = \frac{3}{4} \rho \left( -\frac{1}{3} \frac{dp}{ds} \cos \bar{\varphi} + \sin \bar{\varphi} \right),$$

wo  $\bar{\varphi}$  den Winkel zwischen dem einfallenden Strahl und der Normale  $n$  von einer ebenen Kurve bedeutet.<sup>(1)</sup>

Also folgt aus  $\tan q = \frac{1}{3} \frac{dp}{ds} - \frac{\rho}{c}$ :

$$r = \frac{3}{4} \rho \left[ -\left( \frac{\rho}{c} + \tan \varphi \right) \cos \bar{\varphi} + \sin \bar{\varphi} \right].$$

Oder aus  $\tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{dp}{ds} - \frac{\rho}{c}$  folgt:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{3 \tan \varphi} \frac{dp}{dt} \left/ \left( 1 + \frac{\rho}{c} \right) \right.,$$

(1) MATSUMURA, S.: Über die Deviation ebener Kurven. Tôhoku Math. Journ. Vol. 39, p. 239.

(2) Vergl. MATSUMURA, S.: Über die Deviation ebener Kurven, Tôhoku Math. Journ. Vol. 39 (1934) p. 241.

$$\text{d. h. (57)} \quad v = \frac{1}{3 \tan \varphi} \frac{d\rho}{dt} / \left(1 + \frac{\rho}{c}\right),$$

wo  $v$  die Geschwindigkeit des Körpers bei der Bewegung und  $t$  die Zeit bedeutet.

Aus (57) folgt

$$N = \frac{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2}{9\rho \tan^2 \varphi} / \left(1 + \frac{\rho}{c}\right)^2,$$

wo  $N$  die Komponentenzerlegung der Beschleunigung längs der Normale ist.

Das vom Mittelpunkt des zu  $S$  gehörenden Kreises auf die Potenzlinie gefällte Lot besitze die Masszahl  $\pm h$ , dann folgt

$$h^2 - \rho^2 = \frac{\left(3 \tan \varphi + \frac{3\rho}{c}\right)^2 \cdot \Delta s^2 + \dots}{4 \left(3 \tan \varphi + \frac{3\rho}{c}\right)^2 + \dots},$$

wo  $S$  die Bogenlänge der ebenen Kurve und  $\rho$  der Krümmungshalbmesser ist.

Nun ist

$$\tau - \rho = \frac{1}{6\rho^2} \frac{d\rho}{ds} \cdot \Delta s^2 + \dots$$

also

$$\tau - \rho = \frac{1}{6\rho^2} \left(3 \tan \varphi + \frac{3\rho}{c}\right) \cdot \Delta s^2 + \dots$$

Wissen wir in (1) Deviation  $\frac{1}{3} d\rho/ds$ ,  $c$ , so kann man  $\tan \varphi$  berechnen.

# **Studies on Concentrating the Hydrogen Isotope $H^2$ by the Electrolysis of Water.**

## **Part II.**

### **The Production of Heavy Water and its Apparatus.**

Yoritsune OTA

Accepted for publication, March 7, 1935)

#### **I.**

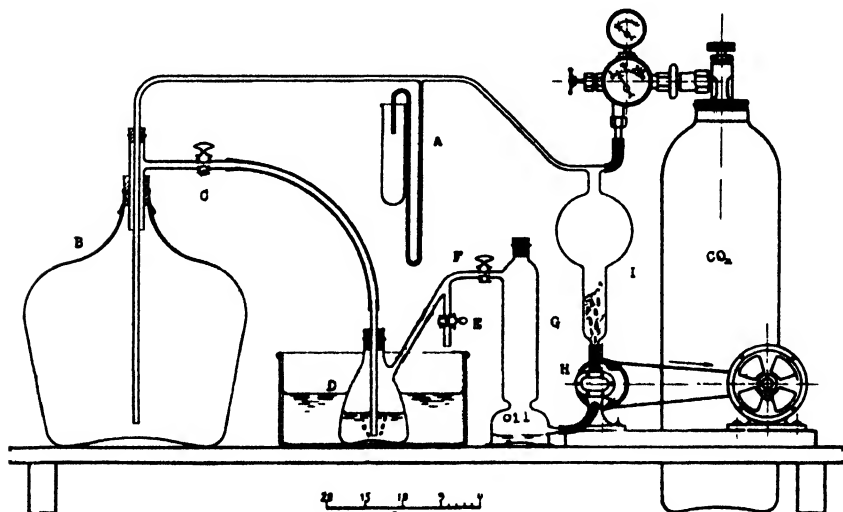
As it was very difficult to get here in Taihoku a supply of electrolyte from commercial electrolytic cells, we were obliged to start the production of heavy water with ordinary water. The electrolytic cells were those used in the previous experiment.<sup>1)</sup> The electrodes of the cell being made of iron, the 1.25-1.50 molal solution of NaOH was used in order to prevent corrosion of the electrodes. The electrolysis with a current of 7-8 amperes was adopted and so the 40 cells were connected in series in a D.C. 120 volts circuit. The current density was then about 0.032-0.036 amperes per square centimetre at the cathode. The sufficient cooling of the electrolyte was achieved by dividing these 40 cells into 4 set of ten cells. With five sets of 40 cells the preliminary work for producing heavy water was carried out.

The most effective method of electrolytic separation of the hydrogen isotopes is to reduce the electrolyte to a small amount without adding water to the electrolyte. In this method, however, a higher concentration of NaOH in the electrolyte requires more work. Therefore the following method was adopted. Introducing 120 cc of 1.25-1.50 molal solution into each cell, the electrolysis was carried

out with a current of 7-8 amperes, adding water three time a day till the volume of the electrolyte reached its initial 120 cc in the course of five days, which is the optimum duration of time necessary. In the following two days the electrolyte in each cell was reduced to the quantity of 30 cc. This method decreases the efficiency of concentrating  $H^+$  a little, if compared with the ordinary one, but the labour in the operation is much saved. In this way 6 liters of electrolyte was obtained.

Reserving 600 cc of the electrolyte for the moment, through the rest of it  $CO_2$  was allowed to bubble until neary all the alkali ~~was~~ was converted into  $Na_2CO_3$  following the procedure of G. N. LEWIS and R. T. MACDONALD.<sup>3)</sup> An arrangement for this procedure is shown in Fig. 1.

Fig. 1.



The operation is as follows. First the electrolyte is introduced into the flask D. Stop-cocks C and E are opened and a stop-cock F is closed. Next, carefully opening the valve of the bomb containing liquid  $CO_2$ , and those of the pressure gauge,  $CO_2$  is made to flow through the large bottle B, the flask D, and out of the stop-cock E.

When the air in the whole arrangement was replaced by  $CO_2$ , the stop-cock E is closed and the stop-cock F is opened. Setting the small pump H, commonly used in circulating water, in motion, a portion of the oil in the bottle G is led into the pump. Then  $CO_2$  begins to circulate quickly. Adjusting valves of the pressure gauge to compensate the loss caused by the chemical reaction, the operation is continued till the pressure within the apparatus remains constant for some time after the valves of the pressure gauge have been closed. The solution is then distilled from an iron kettle. In this way, about 4.5 liters of distilled water was obtained, in which the relative abundance of  $H^3 : H^1 = 1 : 800$ .

## II.

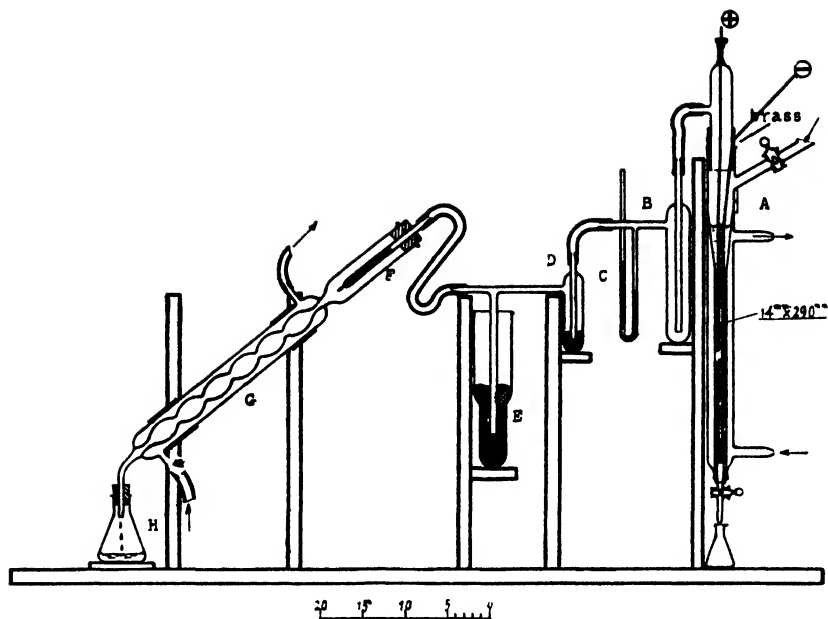
Adding this distilled water to the reserved 600 cc of the electrolyte, 2.4 liters of 1.25 molal solution was made and introduced into 20 of the cells. The electrolysis was done, adding the distilled water obtained three times a day, and finally the electrolyte in each cell was reduced to the quantity of 30 cc. The electrolyte thus obtained was reduced by electrolysis to the quantity of 150 cc, and 120 cc of the water was obtained, in which the relative abundance of  $H^3 : H^1 = 1.5 : 100$ .

## III.

From this stage onwards the hydrogen evolved during electrolysis contains an appreciable amount of  $H^3$  and so a device to recover it is necessary. A number of useful methods for its recovery have been reported by several investigators. The method used in our laboratory is that of H. S. TAYLOR, H. EYRING and A. A. FROST.<sup>1)</sup> The whole arrangement is shown in Fig. 2. A is the electrolytic cell. A portion of the cell which contains the electrolyte is a glass tube, 17 cm in inner diameter and 30 cm in length. Its lower end is connected with a stop-cock and its upper with a glass tube of a larger diameter having a branch tube for introducing the electrolyte. This glass tube



Fig. 2.



is connected by sealing-wax with a brass tube having a nickel plate, 1.4 cm in breadth, 29 cm in length and 0.5 mm in thickness. This brass tube is connected with a glass tube having a nickel plate of the same size. These two nickel plates serve as the electrodes and, to separate them, four pieces of glass tube of 3 mm in diameter and 1.2 cm in length are fastened to one of the electrodes by nickel wire. Into the lower portion of the cell where cooling is insufficient, a piece of glass rod is inserted. The electrolyte was 0.5 molal solution, and electrolysed with a current of 4 amperes. By using this cell 60 cc of the electrolyte was reduced to 8 cc.

The mixture of hydrogen and oxygen produced by electrolysis passes through a spray-trap B, a mercury-bubbler D having an obstruction of 1 cm mercury height and a T-tube E immersed in mercury to form a safety valve, and finally flows out through a capillary nozzle F where it flames. The water formed by the combustion is condensed in a Liebig condenser and collected in a flask H. For the

satisfactory operation of the above procedure, as already pointed out by H. S. TAYLOR, H. EYRING and A. A. FROST, it is very important to use a capillary nozzle of size adjusted in a favourable proportion to the rate of evolution of gases by electrolysis. This adjustment was done in the following way. A piece of glass capillary tube, 0.5 mm in inner diameter and about 7 cm in length, is drawn out at one end to form a finer nozzle. This capillary nozzle is tested with a current of 4 amperes. If the difference of the pressures within and without the apparatus is considerably higher than 5 cm mercury height, small portion of the capillary tube is cut off at the end so that their difference may reach about 5 cm mercury height. Then this capillary nozzle is brought close to a red hot nicrome wire to ignite the mixed gas. The gas burns in a flame of 1.5-2 mm long. In this condition the gas burns well for several days. If the difference of the pressures is far smaller, there is the danger of the flame burning back into the apparatus when the gas is ignited. In this way about 120 cc of the distilled water was reduced to about 20 cc by using two sets of the above arrangements. The water thus obtained contains  $H^2$  amounting nearly to 6% of the hydrogen.

#### IV.

With this water the 0.5 molal solution of NaOH was made. It was introduced into a cell of 25 cc capacity of the type similar to that mentioned above and reduced to the quantity of about 2 cc by the electrolysis with a current of 1.5-2 amperes. The arrangement of recovering  $H^2$  was the same as above except that the capillary nozzle was made finer than before in order to keep the difference of the pressures within and without the apparatus at 5 cm mercury height. The distilled water thus obtained contains  $H^2$  nearly amounting to 35% of the hydrogen. In the actual operation, the recovered water being utilized, a little more than 2 cc of such heavy water was obtained in the course of a week. Taking 6 cc and 10 cc of the heavy water under consideration respectively, and reducing each to

2 cc by electrolysis, the heavy water of 70%  $H^2$  and that of 90%  $H^2$  were obtained in each case.

Lastly we state that the relative abundance of  $H^2$  to  $H^1$  of the heavy water in each stage was examined by the density measurement and the refractive index measurement<sup>4)</sup> by a Rayleigh interference refractometer.

The writer wishes to express his hearty thanks to Prof. B. ARAKATSU for his encouragement given in carrying out this work, and also to THE FOUNDATION for the PROMOTION of SCIENTIFIC and INDUSTRIAL RESEARCH of JAPAN for the grant of the expence required for the experiments.

#### Literatures.

- (1) Y. OTA. This Memoir, Vol. X, No. 3, 71 (1934).
- (2) G. N. LEWIS and R. T. MACDONALD, Journ. Chem. Phys., 1, 341 (1933).
- (3) H. S. TAYLOR, H. EYRING and A. A. FROST, Journ. Chem. Phys., 1, 823 (1933).
- (4) R. H. CRIST, G. M. MURPHY and H. C. UREY, Journ. Chem. Phys., 2, 112 (1934).  
D. B. LUTEN, Phys. Rev., 45, 161 (1934).

昭和十年六月十五日印刷

昭和十年六月十八日發行

編纂兼發行者 臺北帝國大學理農學部

印刷者 穎 川 首

臺北市大正町二ノ三七

印刷所 株式會社臺灣日日新報社

臺北市榮町四ノ三二

購買申込所 株式會社臺灣日日新報社

臺北市榮町四ノ三二

同 丸 善 株 式 會 社

東京市日本橋區堀二丁目



# ÜBER FLÄCHEN UND KURVEN (XI):

## Zur relativen und natürlichen Geometrie

Sôji MATSUMURA

(Accepted for publication, March 14, 1935)

### (1)

Zeichnet man nun die Kurvenlänge  $\bar{s}$  der konvexen Parellelkurve  $\bar{\xi}$  einer gegebenen konvexen geschlossenen Kurve  $\xi$  so, dass  $s$  und  $\bar{s}$  einander entsprechen, so ergibt sich die Relation:

$$(1) \quad \frac{d\bar{s}}{ds} = 1 + \frac{h}{r},$$

wo  $h$  eine gewisse Konstante,  $r$  den Krümmungsradius der Kurve im Kurvenpunkte  $s$  bedeutet<sup>(1)</sup>

So ergibt sich<sup>(2)</sup>

$$(2) \quad \frac{d\bar{s}}{ds} = \rho = 1 + \frac{h}{r},$$

wo  $\rho$  der „*R.-Krümmungsradius*“ von  $\bar{\xi}$  bezüglich  $\xi$  ist.

Für den „*R.-Scheitel*“ entsteht:

$$\rho' = 0,$$

$$\text{d.h.} \quad r' = 0.$$

Für den „*R.-Kreis*“ folgt

$$r = \text{const.}$$

Für den R.-Umfang gilt

$$S = \oint \left(1 + \frac{h}{r}\right) d\bar{s}.$$

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Vol. XV, No. 5, July, 1935.]

(1) KUBOTA, T.: Über die Schwerpunkte der konvexen geschlossenen Kurven und Flächen, Tôhoku Math. Journ. Vol. 14, p. 20.

WOLKENHAUER, W.: Zur Theorie der Parallelkurven, Inaugural-Dissertation, Jena, (1874).

(2) SÜSS, W.: Zur relativen Differentialgeometrie (I), Jap. Journ. of Math. Vol. 4 (1927) p. 57.

## (2)

Soll der Abstand der beiden parallelen Ebenerkurven  $= \pm c$  sein, so ist nun nachzuweisen, dass

$$(1) \quad \rho' - \rho = \pm c$$

isa, wo  $\rho'$ ,  $\rho$  Krümmungsradien der beiden Kurven<sup>(1)</sup> sind.

Aus (1) ergibt sich

$$\frac{1}{3} \frac{d\rho'}{ds} = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds}$$

d.h.

$$\tan \varphi' = \tan \varphi,$$

so folgt der

**Satz:** Wenn zwei Kurven zueinander parallel sind, so sind Affinenormalen in den entsprechenden Punkten zueinander parallel.

## (3)

In dieser ote vergleiche ich die drei Arbeiten von TSUJI<sup>(2)</sup>, FREGE<sup>(3)</sup> und SÜSS<sup>(4)</sup> und setze dadurch die Fundamentalformeln über relative Differentialgeometrie in eine etwa modifizierte Form.

$p, q, \rho, r$ , u.s.w. sollen die gleiche Bedeutung haben wie die in der Arbeit von Süss.

Setzen wir

$$\varphi = \varphi_1 + i \varphi_2,$$

$$p = p_1 + i p_2,$$

$$q = q_1 + i q_2,$$

wo  $\varphi_1, \varphi_2, p_1, p_2, q_1, q_2, \dots$  reell und  $\sqrt{-1} = i$  ist.

So folgt

(1) Vergl. MATSUMURA, S.: Über einen affineo. Satz und die Deviation ebener Kurven, Tôhoku Math. Journ. 36 (1933) p. 189.

(2) TSUJI, M.: On Imaginary Elements in Geometry, Nippon Sugaku-Buturi-gakkai Kiji, Vol. 4 (1922) p. 194.

(3) FREGE, G.: Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene, Inaugural-Dissertation der philosophischen Facultät zu Göttingen, Jena, (1873).

(4) SÜSS, W.: Zur relativen Differentialgeometrie (I), Japanese Journ. of Math. Vol. 4 (1927) p. 57.

$$r = \frac{p_1 + i p_2}{q_1 \pm i q_2},$$

$$\rho = \frac{\bar{\rho}_1(x) + i \bar{\rho}_2(x)}{\bar{\rho}_1(e) + i \bar{\rho}_2(x)}.$$

Für R.-Kreise ist  $\rho$  konstant.

Für den Kurvenpunkt, in welchem der „R.-Krümmungsradius“ einen stationären Wert besitzt ( $\rho' = 0$ ), sei „R.-Scheitel“.

Für den geometrischen Flächeninhalt  $I(x)$  erhält man

$$2I(x) = \oint r ds = \oint r \rho d\sigma,$$

während der „Eichumfang“

$$\Sigma = \oint d\sigma = 2I(e)$$

wird.

(4)

$p, q, \rho, \hat{p}, \hat{q}$ , u.s.w. sollen die gleiche Bedeutung haben wie die in einer meiner Arbeiten.<sup>(1)</sup>

Dann definieren wir als „Relativ-Breite“ der Eilinie  $x$  bezüglich der Eilinie als Eichkurve die

$$(1) \quad b = 2 \frac{\hat{p} + \hat{p}'}{\hat{q} + \hat{q}'},$$

So wird

$$(2) \quad \oint b d\sigma = 2S$$

und

$$(3) \quad S = \int_0^\pi b d\sigma$$

für jeden Anfang der Integration nach  $\sigma$  oder  $\varphi$ .

So folgt

$$(4) \quad S \leq \frac{D \cdot \Sigma}{2},$$

und hat man dieselben Sätze in meiner oben erwähnten Arbeit<sup>(1)</sup>.

(1) NAKAJIMA, S.: Über die Relativ-Breite von Eibereichen, Jap. Journ. of Math. Vol. VI (1929) p. 27.



Für Eiflächen kann man das oben erwähnte ebenso verallgemeinern. Definieren wir „*R.-Abstand zwischen zwei Berührungspunkten von parallelen Tangenten*“ als

$$(5) \quad \frac{(p + \hat{p})^2 + (p' + \hat{p}')^2}{(q + \hat{q})^2 + (q' + \hat{q}')^2},$$

so folgt der<sup>(2)</sup>

**Satz:** Wenn „*R.-Abstand zwischen zwei Berührungspunkten von parallelen Tangenten*“ konstant ist, so folgt „*R.-Breite*“ auch konstant und umgekehrt, wenn *R.-Breite* konstant ist, also ist *R.-Abstand zwischen zwei Tangenten* auch konstant.

Dieser Beweis wird mit der gleichen Methode geführt, wie ich in meiner Arbeit<sup>(3)</sup> benutze.

Definieren wir „*R.-Winkel zwischen einer Strecke zweier Berührungspunkte von zwei parallelen Tangenten*“ und der Tangente mit

$$\frac{p'(\theta) + p'(\theta + \pi)}{p(\theta) + p(\theta + \pi)} \bigg/ \frac{q'(\theta) + q'(\theta + \pi)}{q(\theta) + q(\theta + \pi)}$$

so folgt der folgende verallgemeinerte Satz meiner Arbeit<sup>(4)</sup>.

**Satz:** Wenn „*R.-Winkel in einer Strecke zweier Berührungspunkte von zwei parallelen Tangenten*“ konstant ist, so sind unsere Kurven die *R.-Konstantenbreitenkurven*.

Mit der gleichen Methode kann man die Sätze in meiner Arbeit<sup>(5)</sup> verallgemeinern.

## (5)

Hier möchten wir die Herstellung von BERTRAND-Kurven mitteilen.

Wie man weiß, gibt es zu einer Raumkurve  $\gamma$  dann und nur dann eine zweite, mit der sie ein Paar assoziierte Bertrandkurven bildet, wenn zwischen ihrer Krümmung  $1/\rho$  und ihrer Windung  $1/\tau$  eine lineare inhomogene Gleichung gültig ist:

$$(*) \quad \frac{A}{\rho} + \frac{B}{\tau} = 1.$$

(2) NAKAJIMA, S.: On some Characteristic Properties of Curves and Surfaces. Tôhoku Math. Journ. 18 (1920) p. 280 § 12.

(3) NAKAJIMA, S.: Einige Problem über konvexe geschlossene Kurven und Flächen, Tôhoku Math. Journ. 26 (1926) p. 108 § (II).

(4) l. c. (2) p. 275 § 2.

(5) l. c. (2).

(Vergl. z.B. BLASCHKE, Differentialgeometrie I.)

Ich will hier ein auch bekanntes Herstellungsverfahren für BERTRANDsche Kurven  $\mathfrak{z}$  aus Raumkurven konstanter Krümmung und Kurven konstanter Windung einfach beweisen.

(Vergl. TAJIMA, Tōh. Math. Journ. 18, S. 128.)

Es seien zwei Raumkurven  $\mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{y}$  einander durch parallele Tangenten punktweise eineindeutig zugeordnet.

$\mathfrak{x}$  habe konstante Krümmung:  $\rho(\mathfrak{x}) = \alpha = \text{konst.};$

$\mathfrak{y}$  habe konstante Windung:  $\tau(\mathfrak{y}) = \beta = \text{konst.}$

Dann ist nach der Voraussetzung

$$(1) \quad \mathfrak{x}' = \mu \mathfrak{y}',$$

wo bekanntlich

$$(2) \quad \mu = \frac{\rho(\mathfrak{x})}{\rho(\mathfrak{y})} = \frac{\tau(\mathfrak{x})}{\tau(\mathfrak{y})}$$

ist.

In unserem Fall ist also:

$$(2') \quad \tau(\mathfrak{x}) \rho(\mathfrak{y}) = \alpha \cdot \beta = \text{konst.},$$

Die Verbindungssehnens entsprechender Punkte teilt man nun in festem Verhältnisse, d.h., man bildet die Linearkombination

$$(3) \quad \mathfrak{z} = (1-c) \mathfrak{y} + c \mathfrak{x}, \quad (c = \text{konst.}).$$

Nach (1) ist dann

$$\mathfrak{z}' = (1-c + \mu c) \mathfrak{y}' = \left( \frac{1-c}{\mu} + c \right) \mathfrak{x}'$$

und analog (2) ist also:

$$(4) \quad \begin{cases} 1-c + \mu c = \frac{\tau(\mathfrak{z})}{\beta}, \\ \frac{1-c}{\mu} + c = \frac{\rho(\mathfrak{z})}{\alpha}. \end{cases}$$

Aus (4) folgt

$$\frac{\alpha}{\rho(\mathfrak{z})} = \frac{\mu}{1-c + \mu c}, \quad \frac{\beta}{\tau(\mathfrak{z})} = \frac{1}{1-c + \mu c},$$

also

$$(5) \quad \frac{c \alpha}{\rho(\mathfrak{z})} + \frac{(1-c) \beta}{\tau(\mathfrak{z})} = 1.$$

$\mathfrak{z}$  genügt daher der Bedingung (\*), w.z.b.w..

## (6)

Wir betrachten nun nun  $\xi, \eta$ , wo

$$(1) \quad \xi = k \eta, \quad (k = \text{konst.})$$

so entsteht

$$\xi' = k \eta',$$

Es ist

$$(2) \quad \mu = \frac{\rho(\xi)}{\rho(\eta)} = \frac{\tau(\xi)}{\tau(\eta)}.$$

In unserem Falle ist also:

$$(2') \quad \rho(\xi) \cdot \tau(\eta) = \tau(\xi) \cdot \rho(\eta).$$

Die Verbindungssehnen entsprechender Punkte teilt man nun in festem Verhältnisse, d.h., man bildet die Linearkombination

$$(3) \quad \zeta = (1 - c) \eta + c \xi.$$

Nach (2) ist dann

$$\zeta' = (1 - c + kc) \eta' = \left( \frac{1-c}{k} + k \right) \xi'$$

und analog (2) ist also

$$(4) \quad \begin{cases} 1 - c + kc = \frac{\tau(\zeta)}{\tau(\eta)}, \\ \frac{1-c}{k} + c = \frac{\rho(\zeta)}{\rho(\xi)}. \end{cases}$$

Aus (4) folgt

$$(5) \quad \frac{c\rho(\xi)}{\rho(\zeta)} + \frac{(1-c)\tau(\eta)}{\tau(\zeta)} = 1$$

(5) genügt also der Bedingung für  $\zeta$ , wo  $\xi, \eta, \zeta$  die Raumkurven bedenten.

## (7)

Wir betrachten nun die Raumkurven (Schraubenlinien), bei denen das Verhältnis von Krümmung zu Torsion konstant ist. Seien  $\xi$  und  $\eta$  zwei Raumkurven, die durch parallele Tangenten punktweise einander eindeutig zugeordnet sind, so folgt

$$(1) \quad \xi' = \mu \eta',$$

$$(2) \quad \text{Const.} = \mu = \frac{\rho(\mathfrak{x})}{\rho(\mathfrak{y})} = \frac{\tau(\mathfrak{x})}{\tau(\mathfrak{y})}.$$

Also muss

$$(3) \quad \mu = 1$$

sein.

Ist  $\mathfrak{z}$  die dritte Kaumkurve, die die Verbindungssehnem entsprechenden Punkte  $\mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{y}$  in festem Verhältnisse teilt, so entsteht die Liniarkombination:

$$(4) \quad \mathfrak{z} = (1 - c) \mathfrak{y} + c \mathfrak{x}, \quad (c = \text{konst.}).$$

Nach (1), (4) ist dann

$$(5) \quad \mathfrak{z}' = \mathfrak{y}' = \mathfrak{x}'$$

und analog (2) ist also:

$$(6) \quad 1 = \frac{\tau(\mathfrak{z})}{\tau(\mathfrak{y})}, \quad 1 = \frac{\rho(\mathfrak{z})}{\rho(\mathfrak{x})} = \frac{\rho(\mathfrak{z})}{\tau(\mathfrak{x})}.$$

Aus (6) folgt

$$(7) \quad \tau(\mathfrak{z}) : \rho(\mathfrak{z}) = 1,$$

d.h.,  $\mathfrak{z}$  muss eine Schraubenlinie sein.

Im allgemeinen besteht

$$(8) \quad \frac{\tau(\mathfrak{x})}{\rho(\mathfrak{x})} = \frac{\tau(\mathfrak{y})}{\rho(\mathfrak{y})} = \frac{\tau(\mathfrak{z})}{\rho(\mathfrak{z})}.$$

Wenn  $\rho(\mathfrak{x}) = \text{const.}$ , so

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\rho(\mathfrak{z}) \cdot \tau(\mathfrak{x})}{\tau(\mathfrak{z})} = \text{const.}, \\ \frac{\tau(\mathfrak{x}) \cdot \rho(\mathfrak{y})}{\tau(\mathfrak{y})} = \text{const.}, \\ \frac{\rho(\mathfrak{z}) \cdot \tau(\mathfrak{y})}{\rho(\mathfrak{y}) \cdot \tau(\mathfrak{z})} = 1. \end{cases}$$

Aus (8) ergibt sich<sup>(1)</sup>:

$$(10) \quad \frac{\tau(\mathfrak{x}) - \rho(\mathfrak{x})}{\rho(\mathfrak{x})} = \frac{\tau(\mathfrak{y}) - \rho(\mathfrak{y})}{\rho(\mathfrak{y})} = \frac{\tau(\mathfrak{z}) - \rho(\mathfrak{z})}{\rho(\mathfrak{z})},$$

$$(11) \quad \tan H(\mathfrak{x}) = \tan H(\mathfrak{y}) = \tan H(\mathfrak{z}).$$

(1) Vergl. SALKOWSKI, E.: Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung, Leipzig und Berlin, (1914) S. 30.

Nach LANCRETScher Gleichung folgt:

$$(12) \quad \frac{\frac{1}{r^2(\xi)}}{\frac{1}{r^2(\xi)}} = \frac{\frac{1}{r^2(\eta)}}{\frac{1}{r^2(\eta)}} = \frac{\frac{1}{r^2(\zeta)}}{\frac{1}{r^2(\zeta)}},$$

wo  $H$  der Winkel der rektifizierenden Gerade mit der Tangente ist.<sup>(1)</sup>

Wenn

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\rho(\xi)}{r(\xi)} \right) = 0,$$

so

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\rho(\eta)}{r(\eta)} \right) = 0, \quad \frac{d}{ds} \left( \frac{\rho(\zeta)}{r(\zeta)} \right) = 0.$$

Also ergibt sich der<sup>(2)</sup>

**Satz:** Ist  $\xi$  allgemeine Schraubenlinie, so sind  $\eta$  und  $\zeta$  auch dieselbe Kurven.

**N.B.** Wenn

$$\xi' = \mu \eta', \quad a r(\xi) = s \rho(\xi)$$

bestehen, so ist auch<sup>(3)</sup>

$$a r(\eta) = s \rho(\eta)$$

### (8)

$\xi$  und  $\eta$  seien zwei Linien in  $R_2$ , die durch parallele Tangenten punktweise eindeutig einander zugeordnet, so folgt

$$(1) \quad \xi' = \lambda \eta'$$

d.h.

$$(2) \quad \lambda = \frac{\rho(\xi)}{\rho(\eta)},$$

wo  $\rho$  Krümmungsradius ist.

Ist  $\zeta$  dritte Eilinie, die die Verbindungssehnens entsprechender Punkte  $\xi$  und  $\eta$  in festem Verhältnisse teilt, so folgt

$$(3) \quad \zeta = (1 - c) \eta + c \xi, \quad (c = \text{const.}).$$

Aus (3) folgt

(2) 1. c. (1) S. 18.

(3) KUBOTA, T.: Differentialgeometrie (I), Iwanami-koza, p. 21.

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \mathfrak{z}' &= (1-c) \mathfrak{y}' + c \mathfrak{x}' \\
 &= (1-c+c\lambda) \mathfrak{y}' = \left( \frac{1-c}{\lambda} + c \right) \mathfrak{x}'.
 \end{aligned}$$

Aus (4), analog (2), ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \frac{\rho(\mathfrak{z})}{\rho(\mathfrak{y})} &= 1-c+c\lambda, \\
 \frac{\rho(\mathfrak{z})}{\rho(\mathfrak{x})} &= \frac{1-c}{\lambda} + c,
 \end{aligned}$$

so folgt der

**Satz:**  $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$  seien zwei Eiliniien in  $R_2$ . Teilt man die Verbindungssehn  $\mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{y}$  in  $\mathfrak{z}$  in festem Verhältnisse, so ist in entsprechenden Punkten das Verhältniß von Krümmungsradien zwischen  $\mathfrak{z}, \mathfrak{y}$  bzw.  $\mathfrak{z}, \mathfrak{x}$  konstant, d.h., der R.-Krümmungsradius ist konstant.

### (9)

Hier möchte ich eine Bemerkung über meine Arbeit<sup>(1)</sup> mittheilen. Setzen wir

$$E_1 = E, \quad F_1 = F, \quad G_1 = G$$

in EISENHARTS Arbeit<sup>(2)</sup>, so entsteht

$$K_1 = K,$$

also folgt der

**Satz:**  $\mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{x}_1$  seien zwei konvexe Flächen, deren Punkte eindeutig durch parallele und gleichgerichtete Flächennormalen einander zugeordnet sind.

Für jede Wahl von gemeinsamen Flächenparametern  $u, v$  seien die ersten Fundamentalgrößen in zugeordneten Punkten einander gleich:

$$E_1 = E, \quad F_1 = F, \quad G_1 = G.$$

Dann sind die beiden Flächen in Gaußkrümmungen einander gleich. Oder aus CHRISTOFFELS Satz<sup>(3)</sup> kann man den oberen Satz beweisen.<sup>(3)</sup>

(1) NAKAJIMA, S.: Über die ersten Fundamentalgrößen bei Eiflächen, Jap. Journ. of Math. Vol. 4 (1927) p. 101.

(2) EISENHART, L. P.: Associate Surfaces, Math. Ann. Bd. 62 (1906) S. 506.

(3) Bianchi, Lezioni sulla Teoria die Gruppi Continui die Trasformazioni II, Bologna, (1918) p. 11.

## (10)

Nehmen wir Radiusvektoren  $r, s$  anstatt Stützfunktionen  $p, q$  in Süss' <sup>(4)</sup> Arbeit, so kann man ähnliche Resultate wie in Süss' Arbeit <sup>(4)</sup> erhalten.

## (11)

Wir nennen  $\bar{x} = \bar{x}(s)$ ,  $\bar{x} = \bar{x}(s)$  ein Paar der konjugierten affinen Bertrand-Kurven, wenn

$$(1) \quad \bar{x}(\bar{s}) = x + \rho x'', \quad \bar{x}'' = a x''$$

sind, <sup>(1)</sup> wo die Parameter ihre Affinlänge sind.

$\bar{x}, x$  seien mit parallelen Tangenten eineindeutig punktweise einander zugeordnet, so folgt

$$(2) \quad \bar{x}' = \lambda x'$$

Aus (2) ergibt sich

$$(3) \quad \bar{x}'' = \lambda' x' + \lambda x'',$$

so folgt nach (1)

$$(4) \quad \lambda = a, \quad \lambda' = 0,$$

(1), (2) lauten also:

$$\bar{x} = x + \rho x'', \quad \bar{x}'' = a x'', \quad \bar{x}' = a x', \quad (a = \text{const.}),$$

so bestehen <sup>(1)</sup>

$$\frac{\rho(\bar{x})}{\rho(x)} = \frac{\tau(\bar{x})}{\tau(x)} = \text{const.},$$

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = \text{const.}$$

(4) Süss, W.: Zur relativen Differentialgeometrie (I), Jap. Journ. of Math. Vol. IV (1927) p. 57.

(1) OGIWARA, S.: Über affine Bertrand-Kurven, Jap. Journ. of Math. Vol. 4 (1927) p. 93.

# On the Emission Band Spectrum of the OD Molecule

(With Plate I)

Yoritsune OTA

(Accepted for publication, May 16, 1935.)

## Abstract

Passing the electric discharge through water vapour containing the deuterium amounting 65% of the hydrogen isotopes, photographs of the (0, 0) OD band of the  $^2\Sigma^+ \rightarrow ^2\Pi$  transition were taken by a large quartz prism spectrograph. From the relative intensity of lines in each of  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $Q_1$  and  $Q_2$  branches, the nature of the abnormal rotation of the excited OD molecule was considered.

## Introduction

According to BONHOEFFER and PEARSON<sup>1)</sup> the (0, 0) OH band of the  $^2\Sigma^+ \rightarrow ^2\Pi$  transition, when it was obtained by passing the electric discharge through water vapour, is considered to be excited mainly in one process of simultaneous dissociation of the  $\text{OH}_2$  and excitation of the OH. The intensity distribution in each branch is quite peculiar. That is, lines corresponding to transitions from levels of very high rotational energy are emitted very strongly although experiments are performed at approximately room temperature. Such phenomenon is not explicable with the relative number of molecules in these levels expected from the thermal distribution. OLDENBERG<sup>2)</sup> gave an explanation of it as follows: During the process of simultaneous dissociation of the  $\text{OH}_2$  and excitation of the OH, the H atom when flying away produces very probably some rotation of the remaining

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. XV, 8, June, 1935.]



OH molecule as the atoms in the normal  $\text{OH}_2$  molecule form an angle of  $105^\circ$ .

The author has made an investigation on the corresponding band of the OD molecule to know the nature of the above phenomenon in detail.

### Experimental.

The band spectrum of the OD molecule has been obtained and analyzed by JOHNSTON and DAWSON<sup>1)</sup> and SHOW and GIBBS<sup>2)</sup>, but details of the experimental material, such as wave-lengths of lines and so forth, have not been published. Therefore in the present investigation the results obtained by the author are used.

The spectrograph was a large quartz prism spectrograph of the Littrow mounting, its optical train consisting of one quartz lens of 7.5 cm aperture and 300 cm focal length and one  $30^\circ$  quartz prism of  $9.5 \text{ cm} \times 5.6 \text{ cm}$  face made by Hilger & Co. The dispersion was 3.07 Å/mm at  $\lambda$  3040 Å and 3.76 Å/mm at  $\lambda$  3260 Å. The arrangements for exciting the spectrum were similar to those employed by JACK<sup>3)</sup>. A small bulb containing heavy water was connected by a capillary tube to one end of a discharge tube of 1 cm in diameter provided with a quartz window. The other end was connected through glass tube to a Cenco Hyvac pump. The heavy water contained the deuterium amounting 65% of the hydrogen isotopes, being produced in this laboratory by the method reported by the author.<sup>4)</sup> The water vapour was excited by means of the discharge from a 30 kilovolts transformer, the vapour pressure in the discharge tube being kept at a few tenths mm. The current density was about 30 miliamperes. The photographic plate used was Agfa Isochromatic Plate 2700 H. & D. and fine photographs of the (0, 0) band of the OD molecule were obtained in 30 minutes. The photographs were shown in Plate I, together with that of ordinary water.

In determining the wave-lengths of lines the arc spectra of iron and nickel were used as the comparison spectra, and positions of lines

were measured by a comparator made by Hilger & Co., its accuracy being 1/1000 mm.

As the band now under consideration involves the electronic transition  $^2\Sigma^+ \rightarrow ^2\Pi$ , the principal branches are  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $R_1$  and  $R_2$  and the intensity relations among them are  $Q > P > R$  and  $Q_1 > Q_2$ ,  $P_1 > P_2$ ,  $R_1 < R_2$ . After several trials lines constructing these six branches and a  $^{RR}R$  branch could be classified. To determine the values of quantum numbers  $K'$  and  $K''$  of these lines the wave-numbers of first few lines of these branches were calculated by following formula, which were derived from the data of the OH molecule,

$$\begin{aligned} \nu(K', K') &= 32681.1 + 1146.2 + 9.049 K'(K' + 1) \\ &\quad - \{1348.8 + 9.946 [(K'' + 1)^2 - 1 - \frac{1}{2} \sqrt{4(K'' + 1)^2 + 255.4}] \} \\ &\quad \text{(for } P_1, Q_1, R_1 \text{ and } ^{RR}R \text{ branches)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu(K', K'') &= 32681.1 + 1146.2 + 9.049 K'(K' + 1) \\ &\quad - \{1348.8 + 9.946 [K''^2 - 1 + \frac{1}{2} \sqrt{4K''^2 + 255.4}] \} \\ &\quad \text{(for } P_2, Q_2 \text{ and } R_2 \text{ branches)} \end{aligned}$$

and the calculated values were compared with the observed ones. In this way the values of the quantum numbers of lines in  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $Q_1$  and  $Q_2$  branches could be definitely determined. But in case of  $R_1$ ,  $R_2$  and  $^{RR}R$  branches the ordinary method was needed as their band heads were formed at lines of relatively large values of  $K$  and there were two or more lines unresolved. In the present investigation the  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $Q_1$  and  $Q_2$  branches were examined to study the nature of the abnormal molecular rotation. In Table I the results obtained were given, and in Plate I positions of lines together with their  $K'$  values were shown. In the table, when they were purely lines of the OD molecule they were marked by A, and when they were covered by lines of the OH molecule marked by B. The wave-lengths and intensities of those OH lines were the values of GREBE and HOLTZ.<sup>5)</sup>

TABLE I

Q<sub>1</sub> branch

K'	K''	$\lambda$ (I. A.)	$\nu$ vac. (cm <sup>-1</sup> )	$\Delta\nu$		OH lines	
						$\lambda$ (I. A.)	Int.
1	1	3071.57	32547.21		A		
2	2	3072.55	32536.83	10.38	A		
3	3	3073.56	32526.14	10.69	A		
4	4	3074.67	32514.40	11.74	A		
5	5	3075.83	32502.14	12.26	A		
6	6	3077.15	32488.19	13.95	A		
7	7	3078.36	32475.42	12.77	B	3078.430	3
8	8	3080.07	32457.40	18.02	A(B)	3079.962	3
9	9	3081.73	32439.92	17.48	B	3081.638	2
10	10	3083.53	32420.98	18.94	A		
11	11	3085.48	32400.38	20.60	A		
12	12	3087.55	32378.66	21.72	A		
13	13	3089.73	32355.92	22.74	B	3089.720	3
14	14	3092.14	32330.70	25.22	A		
15	15	3094.74	32303.55	27.15	B	3094.601	3
16	16	3097.48	32274.97	28.58	A		
17	17	3100.36	32244.99	29.98	A		
18	18	3103.47	32212.68	32.31	B	3103.338	2
19	19	3106.73	32178.88	33.80	(A)B	3106.534	3
20	20	3109.99	32145.14	33.74	B	3110.212	2
21	21	3113.74	32106.43	38.71	A		
22	22	3117.56	32067.10	39.33	A		
23	23	3121.55	32026.11	40.99	A		
24	24	3125.73	31983.29	42.82	A		
25	25	3130.15	31938.12	45.17	B	3130.241	3
26	26	3134.76	31891.16	46.96	A		
27	27	3139.62	31841.79	49.37	A		
28	28	3144.69	31790.46	51.33	A		
				52.83			

Q<sub>1</sub> branch

(Continued)

K'	K''	$\lambda$ (I. A.)	$\nu$ vac. (cm <sup>-1</sup> )	$\Delta\nu$		OH lines	
						$\lambda$ (I. A.)	Int.
29	29	3149.93	31737.58	55.22	B	{ 3149.851 3150.040	1
30	30	3155.42	31682.36		A		1
31	31	3161.09	31625.53		A		
32	32	3167.14	31565.12	60.41	B	3167.154	2
33	33	3173.41	31502.76	62.36	A		
34	34	3179.87	31437.18	65.58	A		
35	35	3186.64	31371.98	68.15	A	3200.944	2
36	36	3193.66	31303.83	72.20	A		
37	37	3200.96	31231.63	74.75	B		
38	38	3208.64	31156.88	76.42	A		
39	39	3216.53	31080.46	79.61	A		
40	40	3224.79	31000.85	82.17	A		
41	41	3233.36	30918.68		A		

Q<sub>2</sub> branch

K'	K''	$\lambda$ (I. A.)	$\nu$ vac. (cm <sup>-1</sup> )	$\Delta\nu$		OH lines	
						$\lambda$ (I. A.)	Int.
1	1	3083.98	32416.46	-4.52	B	3084.035	1
2	2	3083.53	32420.98	-1.05	A		
3	3	3083.43	32422.03	1.05	B		3
4	4	3083.53	32420.98	2.52	A	3085.182	
5	5	3083.77	32418.46	5.89	A		
6	6	3084.33	32412.57	8.41	A		
7	7	3085.13	32404.16	10.37	B		3
8	8	3086.12	32393.79	12.72	B	3086.224	1
9	9	3087.33	32381.07	14.88	B	3087.326	3
10	10	3088.75	32366.19	17.07	A	{ 3090.275 3090.363	1
11	11	3090.38	32349.12	18.42	B		2

Q<sub>2</sub> branch

(Continued)

K'	K''	$\lambda$ (I. A.)	$\nu$ vac. (cm <sup>-1</sup> )	$\Delta\nu$		OH lines	
						$\lambda$ (I. A.)	Int.
12	12	3092.14	32330.70		A		
13	13	3094.13	32309.91	20.79	A		
14	14	3096.31	32287.17	22.74	B	3096.337	2
15	15	3098.63	32262.99	24.18	B	9098.68	1
16	16	3101.20	32236.26	26.73	B	3101.220	3
17	17	3103.94	32207.80	28.46	A		
18	18	3106.92	32176.91	30.89	A		
19	19	3109.99	32145.14	31.77	A		
20	20	3113.32	32110.77	34.37	B	3113.352	3
21	21	3116.83	32074.61	36.16	A		
22	22	3120.54	32036.48	38.13	B	3120.596	1
23	23	3124.46	31996.29	40.19	A		
24	24	3128.56	31954.46	41.83	B	3128.491	1
25	25	3132.91	31909.99	44.47	A		
26	26	3137.48	31863.51	46.48	A		
27	27	3142.28	31814.84	48.67	A		
28	28	3147.27	31764.50	50.34	B	3147.256	1
29	29	3152.53	31711.40	53.10	B	3152.437	1
30	30	3157.92	31657.28	54.12	A		
31	31	3163.61	31600.34	56.94	A		
32	32	3169.59	31540.72	59.62	B	3169.590	3
33	33	3175.77	31479.35	61.37	A		
34	34	3182.23	31415.45	63.90	A		
35	35	3189.01	31348.66	66.79	A		
36	36	3196.01	31280.00	68.66	A		
37	37	3203.29	31208.91	71.09	A		
38	38	3210.73	31136.60	72.31	B	3210.706	1

P<sub>1</sub> branch

K'	K''	$\lambda$ (I. A.)	$\nu$ vac. (cm <sup>-1</sup> )	$\Delta\nu$		OH lines	
						$\lambda$ (I. A.)	Int.
0	1	3073.28	32529.10		A		
1	2	3075.92	32501.19	27.91	A		
2	3	3078.71	32471.73	29.46	A		
3	4	3081.48	32442.55	29.18	B	3081.526	3
4	5	3084.33	32412.57	29.98	A	3087.326	3
5	6	3087.33	32381.07	31.50	B	{ 3090.275 3090.363	1
6	7	3090.38	32349.12	31.95	B		2
7	8	3093.67	32314.72	34.40	B	3093.718	2
8	9	3097.02	32279.77	34.95	A		
9	10	3100.51	32243.43	36.34	A		
10	11	3104.12	32205.93	37.50	A		
11	12	3107.83	32167.50	38.43	B		
12	13	3111.72	32127.28	40.22	A		
13	14	3115.74	32085.83	41.45	A		
14	15	3119.92	32042.84	42.99	A		
15	16	3124.26	31998.33	44.51	A		
16	17	3128.80	31951.90	46.43	B	3128.762	1
17	18	3133.41	31904.90	47.00	A		
18	19	3138.30	31855.19	49.71	A		
19	20	3143.29	31804.62	50.57	A		
20	21	3148.48	31752.19	52.43	B	3148.406	1
21	22	3153.79	31698.73	53.46	A		
22	23	3159.27	31643.75	54.98	B	3159.115	1
23	24	3165.01	31586.36	57.39	A		
24	25	3170.88	31527.89	58.47	A		
25	26	3176.94	31467.76	60.13	A		
26	27	3183.22	31405.68	62.08	A		
27	28	3189.72	31341.68	64.00	A		
28	29	3196.35	31276.67	65.01	A		
29	30	3203.29	31203.91	67.76	A		
				70.95			

P<sub>1</sub> branch

(Continued)

K'	K''	$\lambda$ (I. A.)	$\nu$ vac. (cm <sup>-1</sup> )	$\Delta\nu$		OH lines	
						$\lambda$ (I. A.)	Int.
30	31	3210.59	31137.96		B	3210.486	1
31	32	3217.70	31069.16	68.80	A		
32	33	3225.25	30996.43	72.73	A		
33	34	3233.10	30921.17	75.26	A		
34	35	3241.09	30844.95	76.22	A		
35	36	3249.38	30766.25	78.70	A		
36	37	3257.96	30685.24	81.01	A		
37	38	3266.79	30602.29	82.95	A		
38	39	3275.89	30517.29	85.00	A		
39	40	3285.24	30430.43	86.86	A		

P<sub>2</sub> branch

K'	K''	$\lambda$ (I. A.)	$\nu$ vac. (cm <sup>-1</sup> )	$\Delta\nu$		OH lines	
						$\lambda$ (I. A.)	Int.
1	2	3086.99	32384.64		A	{ 3090.275 3090.362 3092.383 3094.601	1 2 3 3
2	3	3088.52	32368.60	16.04	A		
3	4	3090.38	32349.12	19.48	B		
4	5	3092.38	32328.19	20.93	B		
5	6	3094.60	32305.01	23.18	B		
6	7	3097.23	32277.58	27.43	A		
7	8	3099.85	32250.30	27.28	A		
8	9	3102.76	32220.05	30.25	A		
9	10	3105.92	32187.27	32.78	A		
10	11	3109.12	32154.14	33.13	A		
11	12	3112.52	32119.02	35.12	A	3116.278	2
12	13	3116.25	32090.58	38.44	B		
13	14	3120.09	32041.09	39.49	A		
14	15	3123.90	32002.02	39.07	B		
				42.45		3123.926	3

P<sub>2</sub> branch

(Continued)

K'	K''	$\lambda$ (I. A.)	$\nu$ vac. (cm <sup>-1</sup> )	$\Delta\nu$		OH lines	
						$\lambda$ (I. A.)	Int.
15	16	3128.05	31959.57		B	3128.264	3
16	17	3132.60	31913.15	46.42	A		
17	18	3137.15	31866.86	46.29	A		
18	19	3141.90	31818.69	48.17	B	3141.887	1
19	20	3146.78	31769.34	49.35	A		
20	21	3151.87	31718.04	51.30	A		
21	22	3157.09	31665.60	52.44	B	3157.093	3
22	23	3162.52	31611.23	54.37	A		
23	24	3168.18	31554.76	56.47	A		
24	25	3174.01	31496.81	57.95	A		
25	26	3179.87	31437.18	59.63	A		
26	27	3186.28	31375.50	61.68	B	3186.390	1
27	28	3192.69	31312.53	62.97	B	3192.719	1
28	29	3199.35	31247.35	65.18	A		
29	30	3206.22	31180.40	66.95	B	3206.227	1
30	31	3213.26	31112.08	68.32	A		
31	32	3220.62	31040.99	71.09	A		
32	33	3228.09	30969.16	71.83	A		
33	34	3235.89	30894.51	74.65	A		
34	35	3243.88	30818.41	76.10	A		
35	36	3252.21	30739.48	78.93	A		
36	37	3260.77	30658.79	80.69	A		
37	38	3269.58	30576.18	82.61	A		
38	39	3278.67	30491.42	84.76	A		

As to the intensity distribution within each of the branches a noticeable feature was discovered. The intensity reached its maximum value within first five lines, then gradually decreased and reached its minimum value within lines whose K' values are between 12 and 17. Along the following lines the intensity again increased remarkably



and reached its second maximum value within lines whose  $K'$  values are between 23 and 28, and the strongest lines in each branch were found in these lines. Then it began to decrease and the value of  $K'$  of the last line observed was 40.

Next, the intensity distribution in branches of the (0, 0) band of the OH molecule was examined by using two photographs which were obtained by passing the electric discharge through vapour of heavy water and ordinary water respectively. In two cases the intensity reached its minimum value within lines whose  $K'$  values are between 9 and 11. An interesting phenomenon was that the minimum was more distinct in the photographs obtained by using the heavy water than in the other. The same intensity distribution was also observed in the photograph obtained by the electrodeless ring discharge, where the vapour pressure was about a few thousandths mm.

### Discussion of the Results

As already stated, the (0, 0) band of the OH molecule is considered to be emitted by the OH molecule in the  $^2\Sigma^+$  state produced in the process of dissociation of the  $\text{OH}_2$  molecule. This consideration can be applied in our case. From the intensity distribution it was known that the relative number of the OD molecule in rotational levels in the  $^2\Sigma^+$  state has two distinct maxima, the one of them being within those levels whose  $K'$  values are 2 and 7 and the other within those whose  $K'$  values are between 23 and 28, and the former value of rotational energy is between  $18\text{ cm}^{-1}$  and  $500\text{ cm}^{-1}$  and the latter between  $5000\text{ cm}^{-1}$  and  $7300\text{ cm}^{-1}$ . And that the total amount of rotational and vibrational energies in the  $^2\Sigma^+$  state belonging to a line at which the second increase of the intensity began was about  $4200\text{ cm}^{-1}$  and the corresponding value in case of the OH molecule was nearly equal to the above value. It was also known that the total amount of rotational and vibrational energies in the  $^2\Sigma^+$  state corresponding to the highest rotational level observed was about  $16000\text{ cm}^{-1}$  in each case of the OH and the OD.

Lastly, about the intimate relationship between the abnormal rotation of the OH molecule in the  $^2\Sigma^+$  state and the absorption spectra of the OH<sub>2</sub> molecule in the extreme ultraviolet is mentioned. Rathenau<sup>7)</sup> made an investigation on the continuous absorption band with the long wave limit at  $\lambda$  1340.5 Å (9.2 volts), and came to the conclusion that by such absorption the OH<sub>2</sub> molecule in the normal state was excited to a state of a repulsive potential curve and then along this curve it dissociated to the OH molecule in the  $^2\Sigma^+$  state and the normal H atom. He also found that beside the continuous band stated there were a large number of discrete bands and in some of them the phenomena of predissociation were observed. Therefore he came to the conclusion that there was an excited bound state beside the repulsive curve and these two potential curves crossed each other, though he could not determine the positions of these points. Then the effective probability of transition from the normal state of the OH<sub>2</sub> to each point along the repulsive curve is to have appreciable effects due to the existence of the excited bound state. These considerations are also applicable in the excitation by the electron collision.

Similar phenomena are expected in case of the HOD and OD<sub>2</sub>. At present the author could not reach a definite interpretation of the abnormal intensity distribution observed, but is of the opinion that it is explicable in the way stated above.

### Literature

- (1) K. F. BONHOEFFER and T. G. PEARSON, *Zeits. f. Physik. Chemie* 14, 3 (1928); cf. W. H. RODEBUSH and M. H. WAHL, *J. Chem. Phys.* 1, 606 (1933).
- (2) O. OLDENBERG, *Phys. Rev.* 46, 210 (1934).
- (3) H. L. JOHNSTON and D. H. DAWSON, *Naturwiss.* 21, 495 (1933); *Phys. Rev.* 44, 1031 (1933); H. L. JOHNSTON, *Phys. Rev.* 45, 79 (1934).
- (4) R. W. SHAW and R. C. GIBBS, *Phys. Rev.* 45, 124 (1934).
- (5) D. JACK, *Proc. Roy. Soc. London* 115, 373 (1927).
- (6) Y. OTA, *Mem. Fac. Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ.* Vol. X. No. 3, 71 (1934); Vol. XV. No. 6, 165, (1935).
- (7) L. GREBE and O. HOLTZ, *Ann. d. Physik* 39, 1243 (1912).
- (8) G. RATHENAU, *Zeits. f. Physik* 87, 32 (1933).



昭和十年七月二十八日印刷

昭和十年七月三十日發行

---

編纂兼發行者 臺北帝國大學理農學部

印刷者 賴 川 首  
臺北市大正町二ノ三七

印刷所 株式會社臺灣日日新報社  
臺北市榮町四ノ五二

---

購買申込所 株式會社臺灣日日新報社  
臺北市榮町四ノ五二

同 丸 善 株 式 會 社  
東京市日本橋區二丁目



# Über Flächen und Kurven (XII):

## Über zwei Flächen, die zueinander eine Beziehung haben

Sôji MATSUMURA

(Accepted for publication, May 16, 1935.)

Im folgenden möchten wir

$$(A) \quad \lambda \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} + \sigma \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0, \quad (\xi = x, y, z)$$

erklären.<sup>(1)</sup>

( I )

Kann man in

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\sigma}{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log N}{\partial v}, \\ -\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log N}{\partial u}, \end{array} \right.$$

N finden, so geht (A) über in

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{N} \xi \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{N} \xi_u \right) = 0.$$

Es existieren daher drei Funktionen X, Y, Z, welche den Gleichungen

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_u = NX_u, \quad y_u = NY_u, \quad z_u = NZ_u, \\ -x_v = NX_v, \quad -y_v = NY_v, \quad -z_v = NZ_v, \end{array} \right.$$

genügen.

(1) NAKAJIMA, S.: Über zwei Flächen, welche zueinander eine Beziehung haben, Tohoku Math. Journ. Vol. 30 (1928) p. 142.

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. XV. No. 9. June, 1935.]

Die Fläche  $\mathfrak{x}$ , welche von den Punkten  $X, Y, Z$  gebildet wird, ist offenbar durch parallele Normalen auf  $\mathfrak{x}$  bezogen, allerdings in spezieller Weise.

Wir betrachten daher zunächst den allgemeinen Fall, wo zwei Flächen  $\mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{x}$ , deren rechtwinklige Koordinaten durch kleine und grosse Buchstaben von einander unterschieden werden sollen, überhaupt durch parallele Normalen auf einander bezogen sind.

Es ist dann

$$(4) \quad \begin{cases} \mathfrak{x}_u = \alpha x_u + \beta x_v \\ \mathfrak{x}_v = \alpha_1 x_u + \beta_1 x_v. \end{cases}$$

(4) wird geführt in

$$(5) \quad \begin{cases} \mathfrak{x}_{u'} = \lambda_1 x_u, \\ \mathfrak{x}_{v'} = \lambda_2 x_v. \end{cases}$$

Aus (3) kann man

$$(6) \quad \begin{cases} d^2 S = \frac{1}{N} [E du^2 - 2 F du dv + G dv^2], \\ d^2 s = E y u^2 + 2 F du dv + G dv^2 \end{cases}$$

erhalten, wo  $dS, ds$  lineare Elemente von  $\mathfrak{x}$  und  $x$  bedeuten.

Und zugleich findet zwischen den Krümmungsradien  $R, r$  der Koordinatenlinien  $u, v$  in entsprechenden Punkten die Beziehung

$$7) \quad R = \frac{1}{N} r$$

statt.

Für den Torsionsradius  $T, \tau$  der Kurve  $u$  besteht

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{N\tau},$$

und dieselbe Beziehung findet auch für die kurve  $v$  statt.<sup>(1)</sup>

(1) VOSS, A.: Zur Krümmung der Flächen, Math. Ann. 39 (1891) S. 228.

## (II)

Wir betrachten nun zwei LAPLACES Transformationen  $\xi_1$  und  $\xi_{-1}$  von  $\xi$ , so folgt

$$(1) \quad \begin{cases} \xi_1 = \xi + \frac{\lambda}{\sigma} \xi_v, \\ \xi_{-1} = \xi + \lambda \xi_u. \end{cases}$$

Ist  $\xi_1$  eine Kugel und  $\xi_{-1}$  eine nicht auf ihm gelegene Fläche, so ist

$$(2) \quad \begin{aligned} \eta &= 2 \left( \xi + \lambda \xi_u, \xi + \frac{\lambda}{\sigma} \xi_v \right) \left\{ \xi + \frac{\lambda}{\sigma} \xi_v \right\} - \left\{ \xi + \lambda \xi_u \right\} \\ &= 2 \left\{ (\xi \xi) + \lambda (\xi \xi_u) + \frac{\lambda}{\sigma} (\xi \xi_v) + \frac{\lambda^2}{\sigma} (\xi_u \xi_v) \right\} \\ &\quad \times \left\{ \xi + \frac{\lambda}{\sigma} \xi_v \right\} - \left\{ \xi + \lambda \xi_u \right\} \end{aligned}$$

die zu  $\xi_{-1}$  in bezug auf die Kugel  $\xi_1$  inverse Fläche.

Wenn  $\xi, \eta$  die Kugeln sind, so folgt

$$\text{d. h.} \quad \lambda^2 E = 0$$

$$(3) \quad \lambda = 0$$

oder

$$(4) \quad E = 0.$$

## (III)

Man kann

$$(1) \quad (\bar{\xi} \xi_1) = \left\{ \exp. \left( \frac{u}{\lambda} + \frac{\sigma}{\lambda} v \right) \right\} \left\{ (\xi \xi) + \frac{\sigma}{\lambda} (\xi \xi_v) \right\}$$

beweisen, wo

$$(2) \quad \bar{\xi} = \left\{ \exp. \left( \frac{u}{\lambda} + \frac{\sigma}{\lambda} v \right) \right\} \xi, \quad \xi_1 = \xi + \frac{\lambda}{\sigma} \xi_v$$

sind.



Wenn  $(\bar{x}x) = (\bar{x}x_1) = 1$ , so folgt aus (1)

$$1 = \exp. \left( -\frac{u}{\lambda} + \frac{\sigma}{\mu} v \right),$$

so ergibt sich

**Satz:** Ist  $x$  eine Kugel und  $\bar{x}$ ,  $x_1$  einander berühren, so müssen  $\bar{x}$  und  $x$  zusammenfallen.

#### (IV)

Ist  $x$  die Voss-Fläche,<sup>(1)</sup> so muss (A) mit

$$(1) \quad -\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{w_i}{\sin w} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{w_u}{\sin w} \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

zusammenfallen, woraus folgt

$$(2) \quad \frac{\sigma}{\lambda} = \frac{w_i}{\sin w}, \quad \frac{1}{\lambda} = -\frac{w_u}{\sin w}.$$

Aus (2) ergibt sich

$$(3) \quad \int \frac{\sigma}{\lambda} dv = \int \frac{1}{\lambda} du.$$

(3) ist die Bedingung dafür, dass  $x$  die Voss-Fläche ist.

#### (V)

Wenn eine Fläche von Halbparalleleabbildung ist,<sup>(2)</sup> so folgt

$$(1) \quad \frac{1}{\lambda} = 0, \quad \frac{1}{\sigma} = 0, \quad -\frac{\sigma}{\lambda} = \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}.$$

Hat  $x$  gleiche Invarianten, so gilt

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \log \sqrt{E}}{\partial u \partial v} = 0,$$

(1) DILLER, J. B.: Über die den ENNEPERSCHEN Flächen konstanten negativen Krümmungsmaszen entsprechenden Voss-Flächen, Würzburg.

(2) SLOTNIK, M. M.: Semi-parallel transformations of lines of curvature, Annals of Math. 30 (1929) p. 188.

d. h. (3)  $E=U+V$ , wo  $U=f(u)$ ,  $V=\zeta(v)$ .

Die Gleichungen<sup>(1)</sup> von  $N_{-1}$  und  $N_1$  sind

$$(4) \quad \theta_{-1} - \theta_u$$

$$\text{bzw. (5)} \quad \theta_1 = \theta_v - \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \cdot \theta, \text{ wo } \theta_k = \frac{\partial \theta}{\partial k}.$$

Aus (5) folgt

$$(6) \quad (\theta_1 \theta_1) = (\theta_v \theta_v) - 2 \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \cdot \theta \theta_v + \left\{ \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \right\}^2 \cdot (\theta \theta).$$

Sind  $\xi$  und  $N_1$  die Kugeln, so folgt

$$(7) \quad 1 = G + \left\{ \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \right\}^2.$$

Setzen wir  $\xi' = \frac{\xi}{\lambda}$ , so folgt

$$(8) \quad (\xi')_{uv} = \left\{ \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} \right\} \cdot (\xi')_u - \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} \cdot (\xi')_v.$$

Aus (8) kann man wissen, dass  $\xi'$  gleiche Invarianten hat, wenn  $\xi$  gleiche Invarianten besitzt.

Die Laplace-Transformation von  $\xi$  ist.

$$(9) \quad \xi'_1 = \xi' - \left\{ \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} \right\}^{-1} \cdot \frac{\partial \xi'}{\partial v}.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Tangenten zu  $v=\text{const.}$  auf  $\xi$  Ribaucours Kongruenzen bilden, ist die

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \log \sqrt{E}}{\partial u \partial v} = 0,$$

(1) EISENHART: Transformations of Surfaces, Princeton (1923) p. 81.

d.h. (11)  $\mathbf{E} = \mathbf{U} + \mathbf{V}.$

(VI)

Es sei  $\zeta$  ein beliebiges Integral der partiellen Differentialgleichung

$$(1) \quad \zeta_u + \frac{\sigma}{\lambda} \zeta_v + \frac{1}{\lambda} \zeta_w = 0.$$

Ferner setze man

$$(2) \quad \xi = \frac{\hat{\xi}_u}{\exp. \left\{ -\int \frac{\sigma}{\lambda} dv \right\}}, \quad \eta = \frac{\zeta}{\exp. \left\{ -\int \frac{1}{\lambda} du \right\}}$$

Dann lässt sich leicht versuchen, dass erstens  $\xi$  und  $\eta$  dem System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(3) \quad \xi_v = \frac{-\left[ \exp. \left\{ -\int \frac{1}{\lambda} du \right\} \right] \frac{1}{\lambda}}{\exp. \left\{ -\int \frac{\sigma}{\lambda} dv \right\}},$$

$$\eta_v = \frac{-\left[ \exp. \left\{ -\int \frac{\sigma}{\lambda} dv \right\} \right] \frac{\sigma}{\lambda}}{\exp. \left\{ -\int \frac{1}{\lambda} du \right\}}$$

genügen, wenn  $\zeta$  ein Integral von (1) ist. Ist zweitens umgekehrt das Funktionenpaar  $\xi, \eta$  eine Lösung des Systems (3), so ist

$$(4) \quad \zeta = \int \xi \left[ \exp. \left\{ -\int \frac{\sigma}{\lambda} dv \right\} \right] du + \eta \left[ \exp. \left\{ -\int \frac{1}{\lambda} du \right\} \right]$$

ein vom Wege unabhängiges Integral und liefert eine Lösung von (1).

Es ist nun bekannt, dass der Vektor

$$(5) \quad \mathbf{x} = \xi \frac{\mathbf{u}_u}{\exp. \left\{ -\int \frac{\sigma}{\lambda} dx \right\}} + \eta \frac{\mathbf{u}_v}{\exp. \left\{ -\int \frac{1}{\lambda} du \right\}} + \zeta \mathbf{u}$$

eine Bildfläche  $F$  von  $\zeta$  liefert,<sup>(1)</sup> wo  $\zeta$  ein Integral der Differential-

(1) Vgl. etwa DARBOUX, Théorie générale des surfaces 1, 2. Aufl., S. 292-294.

gleichung (1) ist, und  $\xi$  und  $\eta$  sich aus den Formeln (2) ergeben.

Bezeichnen  $X, Y, Z$  laufende Koordinaten, so liefert die Ebenengleichung

$$uX + vY + wZ = \zeta$$

die Tangentialebene an die Fläche  $F$  im Punkt  $\xi$ ; d.h.

$$u : v : w : -\zeta$$

sind die tangentiellen Koordinaten der Fläche  $F$ .

$$\zeta = \text{const.}$$

ist eine triviale Lösung von (1). Sie liefert als Bildfläche  $F$  eine Kugel mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt.

Andere triviale Lösungen von (1) sind

$$\zeta = au + bv + cw = a\alpha,$$

wo  $a = (a, b, c)$  einen von  $u$  und  $v$  unabhängigen Vektor bezeichnet.

In diesem Fall entartet  $F$  zu einem Punkt, und aus (5) ergibt sich

$$\xi = a.$$

## (VII)

Wenn zwischen  $n$  linear unabhängigen Integralen  $z_1, \dots, z_n, \dots$  einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1) \quad E = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\sigma}{\lambda} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

eine quadratische Beziehung besteht, die in der folgenden Normalform angenommen werden soll:

$$(2) \quad \sum_1^n z_v^2 = 1$$

und aus der durch das Differenzieren die beiden Gleichungen

$$(2a) \quad \sum_1^n z_v \frac{\partial z_v}{\partial u} = 0, \quad \sum_1^n z_v \frac{\partial z_v}{\partial v} = 0$$

folgen, so besteht zwischen den  $z_v$  ausserdem noch die Gleichung

$$(2b) \quad \sum_1^n v \frac{\partial z_v}{\partial u} \frac{\partial z_v}{\partial v} = 0.$$

Durch Multiplikation der  $v$  Gleichungen (1) mit  $z_v$  und darauf folgende Addition erhält man nämlich

$$\sum_1^n z_v \frac{\partial^2 z_v}{\partial u \partial v} = 0,$$

und anderseits ergibt sich durch Differentiation der ersten Gleichung (2a) nach  $v$ :

$$\sum_1^n v z_v \frac{\partial^2 z_v}{\partial u \partial v} + \sum_1^n v \frac{\partial z_v}{\partial u} \frac{\partial z_v}{\partial v} = 0,$$

womit das Bestehen der Gleichung (2b) bewiesen wird.

So folgt der

**Satz:** Wenn  $z$  in (1) eine Kugel ist, so muss unsere Kurvenschar senkrecht sein.

Bricht die Reihe mit  $E_i=0$  ab, so ist das allgemeine Integral dieser Gleichung<sup>(1)</sup>

$$(3) \quad z_i = \rho(u, v) [U(u) + \{\phi(v)\beta(u, v)dv]$$

wo  $\rho(u, v)$  und  $\beta(u, v)$  bestimmte Funktionen von  $u$  und  $v$ , und  $\phi(v)$  dagegen willkürliche Funktionen von  $u$ , bzw.  $v$  allein sind. Weiter kann man untersuchen wie in LAGALLYs Arbeit,<sup>(2)</sup>

### (VIII)

Betrachten wir die Flächen  $\xi$  in

$$(1) \quad \xi_{uv} = -\frac{\sigma}{\lambda} \xi_u - \frac{1}{\lambda} \xi_v,$$

(1) LAGALLY, M.: Beitrag zur LAPLACEschen CASCADENmethode Math. Ann. 80 (1921) S. 42.

(2) I. c. (1).

so erhält die Parameterkrümmung  $\frac{1}{P}$  den Ausdruck: <sup>(1)</sup>

$$(2) \quad \frac{D' \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{\sigma}{\lambda} \right) - \frac{\sigma}{\lambda^2} \right] du^2 + D'' \left[ \frac{\partial}{\partial v} \left( -\frac{1}{\lambda} \right) - \frac{\sigma}{\lambda^2} \right] dv^2}{\sqrt{EG - F^2} (E du^2 + 2 F dudv + G dv^2)}.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Paare von Richtungen <sup>(2)</sup>

$$(3) \quad \frac{1}{P^2} = \frac{1}{P^2}$$

in dieser Abbildung harmonisch getrennt sind, ist die

$$(4) \quad \frac{-D' \bar{D}' \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{\sigma}{\lambda} \right) - \frac{\sigma}{\lambda^2} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial v} \left( -\frac{1}{\lambda} \right) - \frac{\sigma}{\lambda^2} \right]}{(E \bar{G} - F^2)^2} \\ = \frac{-D' D' \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{\sigma}{\lambda} \right) - \frac{\sigma}{\lambda^2} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial v} \left( -\frac{1}{\lambda} \right) - \frac{\sigma}{\lambda^2} \right]}{(EG - F^2)^2}.$$

(IX)

Wenn

$$\frac{\sigma}{\lambda} = 0, \quad \frac{1}{\lambda} \neq 0, \quad \lambda \neq \infty$$

in (A), so

$$\left( \frac{\partial}{\partial u} \right) \log \left( \frac{\partial \xi}{\partial v} \right) = -\frac{1}{\lambda},$$

$$\text{d.h. } (1) \quad \xi = \int V \exp. \left\{ - \int \frac{\sigma}{\lambda} du \right\} dv + U.$$

Wenn

(1) Encyklopadie der Math. Wiss. III. 3. S. 180.

(2) OGURA, K.: On the Theory of Representation of Surfaces, Tôhoku Math. Journ., Vol. 12 (1917) p. 241.

$$\frac{\sigma}{\lambda} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\lambda} \right) = 0; \quad \frac{1}{\lambda} = f(u),$$

so<sup>(1)</sup>

$$(2) \quad \xi = \phi(u) [U + V].$$

Wenn

$$\frac{\sigma}{\lambda} = \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial v}, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial u},$$

so wird

$$h = -\frac{\partial \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right)}{\partial u} + \frac{\sigma}{\lambda^2} = 0, \quad k = \left\{ -\frac{\partial \left( \frac{1}{\lambda} \right)}{\partial v} \right\} + \frac{\sigma}{\lambda^2} = 0$$

zu

$$(3) \quad \left( -\frac{\partial^2 \bar{\lambda}}{\partial u \partial v} + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) \right) = 0.$$

Aus (3) ergibt sich

$$\left( -\frac{\partial}{\partial u} \right) \log \left( \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) = - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right),$$

$$\text{d.h.} \quad \lambda = \log (U + V),$$

so folgt

$$\frac{\sigma}{\lambda} = \frac{V}{U + V}, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{U}{U + V},$$

so wandelt (A) sich in

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} + \frac{V'}{U + V} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{U}{U + V} \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0,$$

so folgt

$$\xi = \frac{U + V}{U + V}.$$

---

(1) DARBOUX, Vol. I, (2nd ed., 1914), pp. 181-184.

## ( X )

Betrachten wir zwei Flächen  $\xi, \eta$ , wo

$$(1) \quad \xi_{uv} + \frac{\sigma}{\lambda} \xi_u + \frac{1}{\lambda} \xi_v = 0,$$

$$(2) \quad \xi_{uv} + \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\lambda}} \eta_u + \frac{1}{\bar{\lambda}} \eta_v = 0$$

bestehen.

Die Verbindungssehnens entsprechender Punkten  $\xi, \eta$  teile man nun in  $\zeta$  in festen Verhältnissen, d. h. man bilde die Linearkombination

$$(3) \quad \zeta = (1-c) \eta + c\xi, \quad (c = \text{const.}).$$

Aus (1), (2), (3) ergibt sich so:

$$\zeta_{uv} + \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\lambda}} \zeta_u + \frac{1}{\bar{\lambda}} \zeta_v = 0,$$

wo

$$\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\lambda}} = c \frac{\sigma}{\lambda} + (1-c) \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\lambda}},$$

$$\frac{1}{\bar{\lambda}} = c \frac{1}{\lambda} + (1-c) \frac{1}{\bar{\lambda}}.$$

So folgt der

**Satz:** Wenn  $\xi, \eta$  die Mittelflächen von anderen Flächen, so ist  $\zeta$  auch dieselbe Fläche.

### N. B. Berichtigung.

#### Über Flächen und Kurven (IX)

Seite	für	lies
56	TAKASU: .....	KUBOTA: .....





# Ueber Flächen und Kurven (XIII): Einige Bemerkungen über Flächen und Kurven.

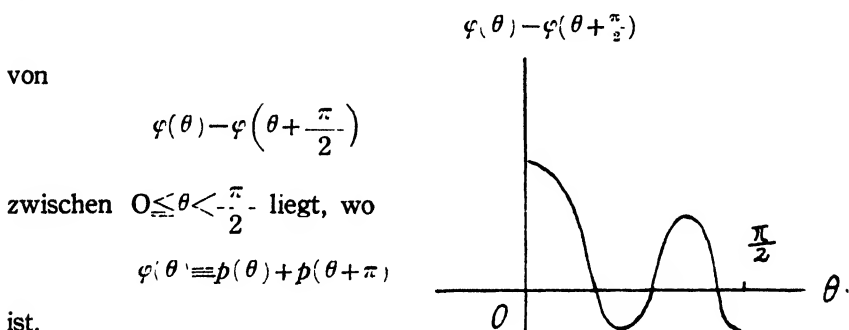
Sôji MATSUMURA

(Accepted for publication, May 16, 1935.)

## I

Hier möchten wir einen Satz von GANAPATHI<sup>(1)</sup> mit einer andern Methode beweisen.

Man kann leicht aus ihrer graphischen Darstellung wissen, daß die Ungeradeanzahl



Dies ist GANAPATHIS Satz.<sup>(2)</sup>

Mit gleichen Methoden kann man in relative Differentialgeometrie verallgemeinern.

## II

Setzen wir  $p$  anstatt  $\rho$  in GANAPATHIS Arbeit,<sup>(2)</sup> so ergibt sich

$$(1) \quad \int_0^{2\pi} p \cos 2 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} p \sin 2 \varphi d\varphi = 0$$

(1) GANAPATHI, P.: A note on the oval, Math. Zeitschrift. 38 (1933-34) S. 490. 9, June, 1935.]

(2) GANAPATHI, P.: On a certain class of ovals, Math. Zeit. 38 (1933 34) S. 687. [Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. XV, 9. June, 1935.]

anstatt Sus Bedingung

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} \rho \cos 2\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \rho \sin 2\varphi d\varphi = 0,$$

wo  $p, \varphi$  die Polartangentenkoordinaten sind.

Im Falle (I) kann man auch ähnliche Untersuchungen anstellen wie in GANAPATHIS Arbeit, und ein ähnlicher Satz ergibt sich wie in seiner Arbeit.

### III

Man kann leicht meine Sätze<sup>(1)</sup> in HILBERTS Raum verallgemeinern.

### IV

Hier möchten wir über eine Art gemischter Affinoberfläche mitteilen. W. BLASCHKE hat im Band II seiner Differentialgeometrie (S. 130, Nr. 12) die Integralinvariante gegenüber raumtreuen Affinitäten

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} I(\xi, c) &= \iint \left| l_{11} l_{22}^2 - 2 l_{12} l_{11}^* \times l_{22} l_{11}^* \right|^{\frac{1}{4}} dudv, \text{ worin} \\ A_{ik} &= (\xi_{ik} \xi_1 \xi_2), \quad A_{ik}^* = (c_{ik} c_1 c_2) \text{ ist,} \end{aligned} \right.$$

als gemischte Affinoberfläche der durch Parallelismus der Tangentenebenen aufeinander bezogen Flächen  $\xi$  und  $c$  bezeichnet. Ich will (I) durch Grösze der Affin- und Relativgeometrie (A bzw. R) darstellen, wobei ich mich an die Bezeichnungen des Buches von BLASCHKE und meiner Arbeit<sup>(2)</sup> in Jap. Journal, Bd. 7, anschliesze.

Es ist

$$(2) \quad A_{ik} = (g_{ik})_A \sqrt{|A|} = \sigma |g|_A^{\frac{1}{2}} (\mathfrak{G}_{ik})_R; \quad |A|^{\frac{1}{2}} = |g|_A^{\frac{1}{2}} = \sigma |\mathfrak{G}|_R^{\frac{1}{2}}.$$

Ferner ist nach den Ableitungsgleichungen der Relativgeometrie

- 
- (1) NAKAJIMA, S.: The Circle and the Straight Line nearest to a Given Points, a Given Straight Lines or a Given Curve, Tôhoku. Math. Journ. 19 (1921) p. 11.  
 (2) NAKAJIMA, S.: Die Grundformeln der relativen Flächentheorie, Jap. Journ. of Math. 6. (1930) p. 43.

$$(2^*) \quad A_{ik}^* = -B_i^j (\xi_{ik} e_1 e_2) = B_{ik} (e_1 e_2).$$

Wählen wir nun die Relativkrümmungslinien von  $\xi$  und  $e$  als Parameterlinien, so wird:

$$(3) \quad \begin{cases} A_{12} = A_{12}^* = 0, & \mathfrak{G}_{kk} + B_{kk} \cdot R_k = 0, \\ \mathfrak{G}_{12} = B_{12} = 0, & R_k e_k = \xi_k, \end{cases}$$

wobei  $R_k$  die *R.-Krümmungsradien* von  $\xi$  bezüglich  $u$  als Eichfläche sind.

Dann aber wird

$$(4) \quad \begin{aligned} A_{kk}^* &= -\frac{1}{R_1 R_2} B_{kk} (e_1 e_2) = -\frac{\sigma}{R_1 R_2} B_{kk} (\eta_1 \eta_2) \\ &= -\frac{\sigma |g|_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} B_{kk}}{R_1 R_2} = \frac{\sigma \mathfrak{G}_{kk}}{R_k \cdot R_1 R_2} |g|_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} = -\frac{|g|_{\Lambda}^{\frac{1}{2}}}{R_k R_1 R_2} (g_{kk})_{\Lambda}. \end{aligned}$$

Also wird nach (1), (2), (3) und (4):

$$(5) \quad \begin{aligned} I(\xi, e) &= \iint |g|^{\frac{1}{2}} \cdot \left| \left( -\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right|^{\frac{1}{2}} du dv \\ &= \iint K_R^{\frac{1}{2}} \cdot \left| 2H_R \right|^{\frac{1}{2}} d\mathcal{Q}(\xi) = \iint |R_1 R_2 \cdot (R_1 + R_2)|^{\frac{1}{2}} d\mathcal{Q}(e) \end{aligned}$$

wobei  $K_R = \frac{1}{R_1 R_2}$  und  $H_R = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$  die totale bzw. mittlere

Relativ-Krümmung von  $\xi$  bezüglich  $e$  sind und  $\mathcal{Q}(\xi)$  die Affinoberfläche von  $\xi$  bedeutet.

Es wäre von Interesse, alle symmetrischen simultanen Affinvarianten der niedrigsten Differentiationsordnungen aufzustellen.

Nach der HÖLDERSchen Ungleichung gilt nach einem Hinweis von Herrn SÜSS wegen (5):

$$(6) \quad [I(\xi, e)]^3 \leq \mathcal{Q}(\xi) \mathcal{Q}(e) \cdot \iint (R_1 + R_2)^{\frac{3}{2}} d\mathcal{Q}(e),$$

wobei das letzte Integral auch symmetrisch in  $\xi$  und  $e$  ist und das Gleichzeichen bei Eiflächen Homothetie bedeutet.

## V

Im folgenden möchten wir wieder eine relativgeometrische Erweiterung der affinen Flächentheorie mitteilen.

$$(1) \quad Q = \iint |LN - M^2|^{\frac{1}{4}} dudv \equiv \iint |A_{11}A^{22} - A_{12}^2|^{\frac{1}{4}} dudv$$

ist ein invariantes Affinoberflächenintegral.<sup>(1)</sup>

Nach (2) in (2) kann man (I) in

$$Q = \iint |\sigma^2| g|_A \{ (G_{11})_R (G_{22})_R - (G_{12})_R^2 \}^{\frac{1}{4}} dudv$$

umschreiben.

## VI

Wir betrachten zwei Raumkurven  $\xi$  und  $\epsilon$ , die durch parallele Tangenten punktweise eineindeutig zugeordnet sind, so folgt<sup>(2)</sup>

$$(1) \quad \xi' = \rho \epsilon',$$

also

$$(2) \quad \sigma = \frac{\bar{\rho}(\xi)}{\rho(\epsilon)} = \frac{ds(\xi)}{ds(\epsilon)} = \frac{\tau(\xi)}{\tau(\epsilon)},$$

wo  $\frac{1}{\tau}$  ihre Windung bedeutet, so folgt<sup>(3)</sup>

$$(3) \quad \frac{1}{\bar{\rho}(\xi)} = \sqrt{\xi'^2} = \frac{\sqrt{\epsilon'^2}}{\rho} = \frac{1}{\rho \bar{\rho}(\epsilon)} = \frac{\bar{\tau}(\epsilon)}{\bar{\tau}(\xi) \bar{\rho}(\epsilon)},$$

oder<sup>(4)</sup> aus (2) ergibt sich

(1) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Berlin (1923) S. 127.

(2) Für dieses Zeichen vergl. SÜSS: Zur relativen Differentialgeometrie I, Jap. Journ. of Math. Vol. IV (1927) p. 57.

(3) Vergl. SÜSS, W.: Zur relativen Differentialgeometrie IV, Tôhoku Math. Journ. 29 (1928) p. 361.

(4) Vergl. MYLLER, M. A.: Courbure normal et torsion géodésique, Comptes Rendus, t. 183 (1926), pp. 515-516.

$$\rho = \frac{\bar{\rho}(\xi)}{\bar{\rho}(\epsilon)} = \frac{\bar{ds}(\xi)}{\bar{ds}(\epsilon)} = \frac{\rho(\xi) \tan \omega(\xi)}{\rho(\epsilon) \tan \omega(\eta)}$$

oder<sup>(1)</sup>

$$\rho = \frac{\bar{\rho}(\xi)}{\bar{\rho}(\epsilon)} = \frac{\rho(\xi) \cot H(\xi)}{\rho(\epsilon) \cot H(\epsilon)}$$

## VII

Unter  $x, y, z$  wollen wir nun drei Funktionen einer Grösse verstehen, die den Gleichungen<sup>(2)</sup>

$$(1) \quad \begin{cases} \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dz}{ds} \right)^2 = 1, \\ \left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2z}{ds^2} \right)^2 = K \end{cases}$$

genügen, wo  $K$  eine Konstante ist und die Variable  $s$  die Bedeutung des Bogens der Kurve hat.

Den Gleichungen (I) kann man nun auf folgende Weise genügen. Es seien die drei eindeutigen elliptischen Functionen  $\varphi_1(u)$ ,  $\varphi_2(u)$ ,  $\varphi_3(u)$  die Koordinaten einer sphärischen Kurve, deren Bogen ein elliptisches Integral erster Art ist, sodass<sup>(3)</sup>

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi_1(u)^2 + \varphi_2(u)^2 + \varphi_3(u)^2 = 1, \\ \left( \frac{d\varphi_1(u)}{du} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi_2(u)}{du} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi_3(u)}{du} \right)^2 = K \end{cases}$$

ist.

Setzt man nun

$$(3) \quad x = \int \varphi_1(u) du, \quad y = \int \varphi_2(u) du, \quad z = \int \varphi_3(u) du,$$

so werden die Gleichungen (I) erfüllt.

$$(4) \quad x = \varphi_1(u), \quad y = \varphi_2(u), \quad z = \varphi_3(u)$$

(1) KUBOTA, T.: Geometry (1), Iwanami, p. 42.

(2) Diese Gleichungen sind die verallgemeinerten Gleichungen von KUBOTA: Imaginäre Kurven mit der Krümmung Null, Tôhoku Math. Journ. 25 (1926) p. 12.

(3) LILIENTHAL: Zur Theorie der Kurven, deren Bogenlänge ein elliptisches Integral erster Art ist, Inaugural-Dissertation, Berlin (1882) S. 42.

sind die Gleichungen einer imaginären sphärischen Kurve, die besteht (2).

### VIII

Es sei  $\xi$  eine beliebige zweite Eilinie.

$\bar{r}$  sei der Abstand ihres Punktes von einem festen Punkt O. Im übrigen seien ihre geometrischen Grössen analog wie die für  $e$  bezeichnet.

Dann ordnen wir je zwei Punkte von  $\xi$  und  $u$  einander zu, für welche die Vektoren  $\bar{r}(\xi)$ ,  $\bar{r}(e)$  für gleiche Argumente  $\xi$  fest gestellt werden, und bezeichnen die Grösse

$$(1) \quad r = \frac{(\xi\xi)}{(e\xi)} = \frac{r(\xi)}{r(e)}$$

als den *R-Abstand* der  $\xi$ -Radien von 0 bezüglich  $e$ .

Dann führen wir den Vektor

$$(2) \quad \eta = \frac{\xi}{r(e)}$$

ein, für den also

$$(3) \quad \eta e = 1, \quad e\eta_i = e_i\eta = 0 \quad (i=1, 2)$$

ist. Die Grössen

$$(4) \quad \eta\xi_{i,k} = \mathfrak{G}_{ik} = \mathfrak{G}_{ki} \quad (i, k=1, 2)$$

seien die Koeffizienten derjenigen quadratischen Grundform, die wir den von jetzt an benutzten kovarianten Differentiationen zugrunde legen.<sup>(1)</sup>

Aus  $\xi_i\eta = 0$  folgt

$$(5) \quad \mathfrak{G}_{ik} = \xi_{i,k}\eta = -\xi_i\eta_k = -\xi_k\eta_i.$$

Jetzt ist unsere Untersuchung wie die in Süß Arbeit.

### IX

Wir betrachten uns nun zwei A-Flächen  $\xi$  und  $e$ .

(1) SUSS, W.: Zur relativen Differentialgeo II, Tôhoku Math. Journ. Vol. 29 (1928, p. 237.

Mit  $p$  und  $q$  bezeichnen wir die Abstände der Tangentenebene von  $\xi$  bzw.  $e$  vom Ursprung 0, so ist

$$(1) \quad r(\xi) = \frac{p(\xi)}{q(\xi)}$$

der R-Abstand der  $\xi$ -Tangentenebene ( $\xi$ ) von 0, wo

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial u} \frac{\partial p}{\partial u} - \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} \frac{\partial p}{\partial v} = 0, \\ \frac{\partial q}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} \frac{\partial q}{\partial u} - \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} \frac{\partial q}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

bestehen.<sup>(1)</sup>

Ist  $r = \text{const.}$ , so nennen wir  $\xi$  eine „*R.-Sphäre*“ mit dem „*Mittelpunkt*“ 0; dann ist  $\xi$  bezüglich 0 ähnlich  $e$ .

Aus  $r(\xi) = \text{const.}$  folgt

$$(3) \quad p - \text{const.} \cdot q = 0,$$

wo

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 (p - \text{const.} \cdot q)}{\partial u} - \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} \frac{\partial (p - \text{const.} \cdot q)}{\partial u} \\ - \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} \frac{\partial (p - \text{const.} \cdot q)}{\partial v} = 0, \end{aligned}$$

so folgt der.

**Satz:**  $\theta = 0$  ist die Bedingung dafür, dass  $\xi$  *R.-Sphäre* ist, wo

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0$$

ist.

Auch erfolgen die Formeln:

$$(5) \quad \begin{cases} O = \int q d\sigma(\xi) = \int q R(\xi) d\bar{\omega}, \\ W = \int q d\sigma(e) = \int q K(e) d\omega. \end{cases}$$

1) EISENHART, L. P.: Surface with the same spherical Representation of their Lines of Curvature as Pseudospherical Surfaces, American Journ. of Math. Vol XXVII (1905) p. 113



## X

Ist

$$F(\rho, s, a_1, a_2, \dots)$$

die Gleichung einer Familie von Kurven, wo  $\rho$  den Krümmungsradius,  $s$  ein Bogenstück und die  $a$  konstante Größen bedeuten,<sup>(1)</sup> so ist allgemein

$$s = \int \sqrt{\frac{\lambda}{\mu} \left[ \left( \frac{\rho}{a} \right)^{2\mu} - 1 \right]} d\rho,$$

so folgt<sup>(2)</sup>

$$\tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\lambda}{\mu} \left[ \left( \frac{\rho}{a} \right)^{2\mu} - 1 \right]}.$$

## XI

**Satz:** Die Konstruktion von Bertrandkurven durch Linearkombination einer Kurve konstanter Krümmung und einer Kurve konstanter Windung lässt sich umkehren. Ich will beweisen, dass man jede Bertrandkurve  $\mathfrak{z}$  so erhalten kann.

**Beweis:** Ist  $\mathfrak{z}$  nämlich eine Bertrandkurve, so gilt bekanntlich

$$(a) \quad \frac{A}{\rho(\mathfrak{z})} + \frac{B}{\tau(\mathfrak{z})} = 1, \quad A, B \text{ konstant.}$$

Nun sei  $\xi$  das Tangentenbild von  $\mathfrak{z}$ ,  $\sigma$  seine Bogenlänge.

Dann ist

$$(b) \quad \frac{d\mathfrak{z}}{d\sigma} = \rho(\mathfrak{z}) \xi.$$

Jetzt setze man

$$(c) \quad A = a \cdot c, \quad B = \beta(1 - c),$$

(1) Nouv. Ann. (3) 7 (1888) p. 171-190 u. 209-230, und Nouv. Ann. (3) 9 (1890) p. 143.

(2) MATSUMURA, S.: Über die Deviation ebener Kurven, Tôhoku Math. Journ. Vol. 39 (1934) p. 239.

ferner

$$(d) \quad \rho(\eta) = \frac{\rho(\xi) - ac}{1-c} = \frac{\rho(\xi) - A}{B} \cdot \beta$$

und bestimme dazu die Kurven  $\eta$  und  $\xi$  durch die Gleichungen:

$$(e) \quad \frac{d\eta}{d\sigma} = \rho(\eta) \xi, \quad \eta = \int_a^\sigma \rho(\eta) \xi d\sigma + \eta_0$$

und

$$(f) \quad \xi = -\frac{1}{c} [\xi - (1-c) \eta].$$

Dann ist

$$(f') \quad \frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{1}{c} \left[ \frac{d\xi}{d\sigma} - (1-c) \frac{d\eta}{d\sigma} \right] = a\xi,$$

also

$$(g) \quad \rho(\xi) = a = \text{konst.}$$

Nach (e) und (f') gilt

$$\xi' = \mu\eta,$$

wobei man errechnet:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tau(\xi)}{\tau(\eta)} = 1 - c + \mu c \\ \frac{\rho(\xi)}{\rho(\eta)} = \frac{\rho(\xi)}{a} = \frac{1-c}{\mu} + c, \end{array} \right.$$

$$(h) \quad \tau(\eta) = \beta = \text{konst.}$$

Wegen (g), (h) und (f) ist also  $\xi$  die Linearkombination einer Kurve  $\xi$  konstanter Krümmung und einer Kurve  $\eta$  konstanter Windung.

Die assoziierte Bertrandkurve

$$\bar{\xi} = \xi + A\xi_2$$

erhält man ausserdem in der Form

$$\bar{\xi} = (1-d)\eta + d\xi,$$

wobei  $d$  aus  $c$  sich durch die Gleichung bestimmt:

$$(c-d)(y-x)=c \cdot d\xi_2, (\xi_2^2=1).$$

## XII

Neuerdings hat NARUMI den folgenden **Satz** bewiesen<sup>(1)</sup>;

*Wenn in der Ebenenkurve der Mittelpunkt von fünfpunktigem Berührungskegelschnitt, der Affmittelpunkt und der Ursprungspunkt auf der Kurve rechtwinklige Dreiecke bilden und der Winkel im Mittelpunkt von Schmiegekegelschnitt einen rechteckigen.*

**Beweis:** Aus unserer Voraussetzung ergibt sich

$$(1) \quad \rho^2 \left( \frac{d\rho}{ds} \right)^2 = 4\rho_1^2 - 3\rho\rho_2, \quad \rho_1 = \frac{d\rho}{d\varphi}, \quad \rho_2 = \frac{d^2\rho}{d\varphi^2},$$

wo ich  $\varphi$  als die Deviation<sup>(2)</sup> bezeichne.

Aus (1) ergibt<sup>(3)</sup> sich

$$(2) \quad \rho^2 \frac{\rho_1^2}{\rho^2} = 4\rho_1^2 - 3\rho\rho_2,$$

weil

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\rho_1}{\rho},$$

so folgt

$$0 = 3\rho_1^2 - 3\rho\rho_2,$$

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$\rho = c\rho_1, \quad c = \text{konst.}$$

$$\rho = c \frac{d\rho}{ds} \cdot \frac{ds}{d\varphi} = c \frac{d\rho}{ds} \cdot \rho$$

(1) Proceedings of the Physico-Math. Society of Japan, Vol. 9, Part 3 (1935), p. 83.

(2) MATSUMURA, S.: Über einen affineo. Satz und die Deviation ebener Kurven, Tôhoku Math. Journ. 36 (1933) p. 189.

(3) Auf diese Rechnung hat mich Herr Prof. T. KUBOTA gelegentlich freundlichst aufmerksam gemacht.

$$c \frac{d\rho}{ds} = 1, \quad \frac{d\rho}{ds} = \text{const.}, \quad \text{w. z. } b, \text{ w. .}$$

**Anderer Beweis:** Aus HAYASHIS Arbeit ergibt sich,<sup>(1)</sup> wenn unsere Kurve elliptisch gekrümmt ist :

$$3\rho \frac{d\rho}{ds} = 3\rho^2 \rho_1$$

$$9 + \left( \frac{d\rho}{ds} \right)^2 = 9\rho^2 + 4\rho_1^2 - 3\rho\rho_2$$

daraus folgt

$$\rho_1 = \rho\rho_2,$$

d. h. unsere Kurve muss eine logarithmische Spirale sein.

Ist der Winkel im Krümmungsmittelpunkt rechteckig statt des Winkels im Affinmittelpunkt, und der Inhalt von unsrem Dreieck konstant, so entsteht

$$\rho^3 = as + b, \quad (a, b = \text{const.}).$$

Wir nehmen einen Punkt O auf einer Ebenenkurve und ziehen eine Normal OA, wo A der Krümmungsmittelpunkt ist.

Durch A ziehen wir eine senkrechte Gerade AB' zu OA und bezeichnen den Schnittpunkt von AB' und OB mit B', wo B Affinkrümmungsmittelpunkt ist. Durch B' ziehen wir eine senkrechte Gerade BC' und die Schnittpunkte BC' und OA mit C' bezeichnen.

Ist

$$OA : AC' = \text{const.},$$

so muss unsere Kurve eine logarithmische Spirale sein.

### XIII

Neuerdings habe ich die folgende Formel

$$(1) \quad \tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds}$$

bewiesen.

(1) HAYASHI, T.: The middle point of the Osculating Conic of a plane curve, Rigakukaishi (Tokyo kô tôshihangakkô, Vol. 19. No. 1, p. 1.

Man kann (1) aus HAYASHIS Arbeit<sup>(1)</sup> leicht herleiten, denn aus

$$(2) \quad \frac{9\rho^3}{(9\rho^2 + 4\rho_1^2 - 3\rho\rho_2)}, \quad \frac{3\rho^2\rho_1}{(9\rho^2 + 4\rho_1^2 - 3\rho\rho_2)}$$

ergibt sich

$$(3) \quad \begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{1}{3} \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{1}{3} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{1}{3} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} \frac{ds}{d\varphi} \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} \rho = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds}. \end{aligned}$$

Aus HAYASHIS Arbeit<sup>(2)</sup> ergibt sich

$$(4) \quad R^2 = \frac{(3\rho^2)^2}{I \frac{d\phi}{d\varphi}},$$

so folgt

$$(5) \quad I \frac{d\phi}{d\varphi} \geq 0,$$

so ergibt sich:

$$(1) \quad \text{für elliptisch gekrümmte Punkte} \quad \frac{d\phi}{d\varphi} > 0,$$

$$(2) \quad \text{für hyperbolisch gekrümmte Punkte} \quad \frac{d\phi}{d\varphi} < 0,$$

$$(3) \quad \text{für parabolisch gekrümmte Punkte} \quad \frac{d\phi}{d\varphi} = 0, \text{ d.h. } \phi \text{ ist konst.}$$

aus  $\varphi$ .

Aus HAYASHIS Formeln<sup>(3)</sup>

$$(6) \quad \begin{cases} x_1 = \rho I^{-2} J (3\rho \sin \varphi + \rho_1 \cos \varphi), \\ y_1 = \rho I^{-2} J (3\rho \cos \varphi + \rho_1 \sin \varphi) \end{cases}$$

folgt

(1) HAYASHI, T.: Osculating conic of Plane curve, Rigakukaishi (Tokyo kotoshi-hangakko) Vol. 19, No. 1, p. 4.

(2) l. c. (1) p. 5.

(3) l. c. (1) p. 7.

$$(7) \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{dy}{dx} = \frac{\cos \varphi + \tan \bar{\varphi} \cdot \sin \varphi}{-\sin \varphi + \tan \varphi \cdot \cos \varphi},$$

denn

$$(8) \quad \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} \frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{ds} \rho = \frac{d\rho}{ds}.$$

Aus (7) ergibt sich

$$(9) \quad \frac{dy}{dx} \cdot \tan(\rho - \bar{\varphi}) = -1,$$

wo  $\bar{\varphi}$  die Deviation ist.

Aus (9) kann man wissen, dass *der Winkel zwischen zwei Tangenten der Ursprungskurve und Affinmittelpunktkurve der Deviation gleich ist.*

Aus HAYASHIS<sup>(1)</sup> Formeln folgt

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{\rho I^{-2} J}{\rho I^{-2} J} \left\{ -4 \tan \bar{\varphi} \tan \varphi - (1 - \tan \varphi) \right\} + \frac{d(\rho I^{-2} J)}{d\varphi} (-\tan \varphi + \tan \bar{\varphi}) \\ x_2 &= \frac{\rho I^{-2} J}{\rho I^{-2} J} \left\{ 4 \tan \bar{\varphi} - \left( 1 - \left[ 3 \tan^2 \varphi + \frac{1}{3} \rho \frac{d^2 \rho}{ds^2} \right] \right) + \frac{d(\rho I^{-2} J)}{d\varphi} (1 + \tan \bar{\varphi} \tan \varphi) \right\}, \end{aligned}$$

denn

$$\frac{1}{\rho} \rho_2 = \frac{1}{\rho} \frac{d^2 \rho}{d\varphi^2} = \frac{d^2 \rho}{ds^2} \rho + \left( \frac{d\rho}{ds} \right)^2.$$

Nach dem obigen Satz und HOMBS Satz<sup>(2)</sup> kann man wissen, dass, wenn in einer Eilinie E zwei Deviationen in zwei Punkten, den Berührungspunkten von zwei Tangenten durch einen Punkt P ausser E immer einander gleich sind, so E ein Kreis sein musz, wo zwei Tangenten in zwei entsprechenden Punkten von Affinkrümmungsmittelpunktskurve durch P gehen.

(1) I. c. (1) p. 12.

(2) HOMBU, H.: Theoroms on closed convexes, Tôhoku Math. Journ. 33 (1931), p. 61.

## XIV

In (3) haben wir die Tatsache benutzt, dass der Mittelpunkt von Schmiegungskegelschnitt der Affinkrümmungsmittelpunkt ist. Mit gleichen Methoden kann man den folgenden **Satz** beweisen ;

*Affinenormale gehen durch den Mittelpunkt von Schmiegungskegelschnitt.*

## XV

**Satz :** *Gibt es zwei verschiedene infinitesimale Verbiegungen einer Fläche, bei denen ein und dasselbe konjugierte Kurvennetz konjugiert bleibt, so gibt es eine lineare Schar infinitesimaler Verbiegungen mit derselben Eigenschaft.*

**Beweis :** Bekanntlich ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein konjugiertes Kurvennetz  $(u, v)$  einer Fläche  $\mathfrak{x}(u, v)$  bei infinitesimaler Verbiegung von  $\mathfrak{x}$  konjugiert bleibt, dass dem  $u$ - $v$ -Netz von  $\mathfrak{x}$  auf der Drehrisfläche  $\mathfrak{y}(u, v)$  das Netz der Asymptotenlinien entspricht. Nach der Voraussetzung unseres Satzes gibt es also zwei Drehrisflächen  $\mathfrak{y}(u, v)$ ,  $\bar{\mathfrak{y}}(u, v)$  welche  $\mathfrak{x}(u, v)$  durch parallele Tangentenebenen zugeordnet sind, wobei ein und demselben konjugierten  $u$ - $v$ -Netz von  $\mathfrak{x}$  je das Netz der Asymptotenlinien von  $\mathfrak{y}$  und  $\bar{\mathfrak{y}}$  entspricht. Bezeichnen wir mit  $L, M, N, l, m, n, \bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$  die zweiten Fundamentalgrößen von  $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \bar{\mathfrak{y}}$ , so ist also

$$(1) \quad M=l=n=\bar{l}=\bar{n}=0.$$

Wegen der Eigenschaft des Drehrisses  $\mathfrak{y}$ , Relativ-Minimalfläche bezüglich  $\mathfrak{x}$  zu sein, folgen ferner die Gleichungen in der Form :

$$(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{y}_u = \beta \mathfrak{x}_v, & \mathfrak{y}_v = \gamma \mathfrak{x}_u, \\ \bar{\mathfrak{y}}_u = \beta \mathfrak{x}_v, & \bar{\mathfrak{y}}_v = \bar{\gamma} \mathfrak{x}_u. \end{cases}$$

Nun bilden wir  $\mathfrak{y}^* = \mathfrak{y} + t\mathfrak{y}$ . Es wird

$$\mathfrak{y}_u^* = (\beta + t\bar{\beta}) \mathfrak{x}_v = \bar{\beta} \mathfrak{x}_v,$$

$$\mathfrak{y}_v^* = (\gamma + t\bar{\gamma}) \mathfrak{x}_u^* = \gamma^* \mathfrak{x}_u^*,$$

d. h.  $\mathfrak{y}^*$  ist wieder Relativ-Minimalfläche bezüglich  $\mathfrak{x}$ , unb für den Einheitsvektor  $\hat{\xi}$  der Normalen ist :

$$\mathfrak{y}_{uu}^* \hat{\xi} = l + t\bar{l} = \bar{l}^* = 0,$$

$$\mathfrak{y}_{vv}^* \hat{\xi} = e + t\bar{e} = \bar{e}^* = 0,$$

die Kurven  $(u, v)$  sind also auch auf  $\mathfrak{y}^*$  Asymptotenlinien, was nach dem anfangs genannten Satz zu beweisen war.





# Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XIII)

Sôji MATSUMURA

(Accepted for publication, May 16, 1935.)

(I)

Im folgenden untersuchen wir die relative Differentialgeometrie der Kreisflächen.

Wir nehmen an, dass zwei Kreisflächen  $\xi$  und  $\bar{\xi}$  in  $R_3$  durch eine Abbildung solcher Art miteinander verknüpft sind, dass gleichen Werten der Parameter

$$u^1 \equiv t, \quad u^2 \equiv \tau$$

parallele Tangentialebenen entsprechen.

Die Gleichungen der beiden Kreisflächen lassen sich in der Form darstellen :

$$\xi = \xi'(u^1, u^2), \quad \bar{\xi} = \bar{\xi}'(u^1, u^2),$$

wo  $\xi$  und  $\bar{\xi}$  kontravariante Vektoren im umfassenden Raume sind.

Gegenüber der Transformation der Koordinaten  $u^i$  stellen die Gröszten  $\xi$  und  $\bar{\xi}$  die Invariante dar.

Setzen wir weiter

$$\frac{\partial \xi}{\partial u^i} = \xi_i, \quad \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u^i} = \bar{\xi}_i,$$

so verhalten sich die Gröszten  $\xi_i$  und dementsprechend auch  $\bar{\xi}_i$  gegenüber der Koordinatentransformation der  $u^i$  wie die Komponenten eines kovarianten Tensors erster Ordnung.

Da die Tangentialebenen beider Kreisflächen in den entsprechenden Punkten in  $R_3$  zueinander parallel sind, so lassen sich die Gröszten  $\xi_i$  linear durch  $\bar{\xi}_i$  ausdrücken und umgekehrt; mit anderen Worten, es

existiert gegenüber der Koordinatentransformation der  $u'$  ein Tensor  $p'_i$  derart, dass

$$(1) \quad \bar{x}_i = p'_i{}^\lambda x_\lambda, \quad x_i = \bar{p}'^\mu_i \bar{x}_\mu \quad (\lambda = 1, 2)$$

$$p'_i{}^\lambda \bar{p}'^\mu_\lambda = \delta^\mu_i.$$

ist.

Ist

$$(a) \quad \eta = \eta_\lambda x^\lambda, \quad (\lambda = 1, 2)$$

ein Kreis auf  $x$ , so lässt sich dieser Kreis in den entsprechenden Kreis auf  $\bar{x}$  transformieren im Sinne der Parallelübertragung in  $R_s$  und kann mit

$$(b) \quad \eta = \bar{\eta}^\mu \bar{x}_\mu$$

gegeben werden.

Mit Hilfe von (1) erhalten wir:

$$(2) \quad \bar{\eta}^\mu = \eta^\lambda \bar{p}'^\mu_\lambda, \quad \eta^\lambda = \bar{\eta}^\mu \bar{p}'^\lambda_\mu.$$

Auf diese Weise entsprechen demselben Vektor des Raumes  $R_s$  zwei kontravariante Tensoren erster Ordnung  $\eta^\mu$  und  $\bar{\eta}^\mu$  gegenüber der Koordinatentransformation der  $u'$ .

Nehmen wir insbesondere auf der Kreisfläche  $x$  den Vektor der unendlich kleinen Verschiebung

$$d; = x_\lambda du^\lambda$$

und transplantieren ihn an den entsprechenden Punkt der Kreisfläche  $\bar{x}$ , so gilt für die neuen Komponenten  $\bar{d}u$ :

$$(3) \quad \bar{d}u = \bar{p}'^\mu_\lambda du^\lambda, \quad du^\lambda = \bar{p}'^\lambda_\mu \bar{d}u^\mu.$$

Nehmen wir jetzt an, dass auf  $x$  eine Funktion

$$\phi = \phi(\eta, \eta_2, \dots, \eta_m)$$

definiert sei, die jedem System von  $m$  Kreisvektor

$$\eta, \eta_2, \dots, \eta_m$$

zuordnet.

Ist  $\phi$  in bezug auf den Vektor  $\eta$  linear, so lässt sie sich durch einen kovarianten Tensor  $m$ -ter Ordnung darstellen:

$$\phi = \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \eta_1^{\alpha_1} \dots \eta_m^{\alpha_m}$$

Gehen wir auf den Fall  $m=2$  ein:

$$(4) \quad \phi = \phi(\eta_1, \eta_2) = \varphi_{\alpha\beta} \eta_1^\alpha \eta_2^\beta.$$

Der Wert von  $\phi$  wird in diesem Fall in jedem Kreise auf  $\chi$  durch die beiden Vektoren bestimmt:

$$\eta_1 = \eta_1^\alpha \chi_\alpha, \quad \eta_2 = \eta_2^\alpha \chi_\alpha$$

so folgt

$$(5) \quad \phi = \bar{\varphi}_{\alpha\beta} \bar{\eta}_1^\alpha \bar{\eta}_2^\beta.$$

Aus (5) ergibt sich:

$$\phi = \varphi_{\alpha\beta} \eta_1^\alpha \eta_2^\beta = \bar{\varphi}_{\alpha\beta} \bar{\eta}_1^\alpha \bar{\eta}_2^\beta,$$

$$\eta_i^\lambda = \bar{\eta}_i^\mu p_\mu^\lambda, \quad \bar{\varphi}_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta} p_\alpha^\mu p_\beta^\nu.$$

(II)

Betrachten wir die Minimallinien

$$(\theta, \theta_\lambda) du' du^\lambda$$

wieder und setzen wir

$$(\theta, \theta_\lambda) = \varphi_{i\lambda},$$

so ist es ein TSCHEBYSCHEFF-Netz, wenn der TSCHEBYSCHEFF-Tensor

$$\tau_i = \tilde{\varphi}^{\alpha\beta} (2\varphi_{i\alpha\beta} - \varphi_{\alpha\beta i})$$

identisch verschwindet, wobei unter  $\tilde{\varphi}^{\alpha\beta}$  der Tensor verstanden wird, der zu  $\varphi_{ij}$  reziprok ist<sup>(1)</sup>:

$$\tilde{\varphi}^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta} = \delta_\alpha^\alpha.$$

(1) Vegl. SCHAPIRO, H.: Über die Transplantation der Parallelübertragung und der Kurvensysteme, Monat. Math. und Physik, 41 Band, S. 260.

## (III)

Nach THOMSEN kann man wissen, dass<sup>(1)</sup>

$$(1) \quad \varphi_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = 0, \quad (\varphi_{\alpha\beta} \equiv p_{\alpha\beta})$$

die Gleichungen der Krümmungslinien auf einer Fläche  $S$  sind. Nun nehmen wir an, dass zwei Flächen  $S$  und  $S_0$  in  $R_3$  durch eine Abbildung solcher Art miteinander verknüpft sind, dass den gleichen Werten der Parameter  $u^1, u^2$  die parallelen Tangentialebenen entsprechen.

Die Gleichungen der beiden Flächen lassen sich in der Form darstellen:

$$(2) \quad \bar{x} = \bar{x}(u^1, u^2), \quad \bar{x} = \bar{x}(u^1, u^2),$$

wo  $\bar{x}$  und  $\bar{x}$  kontravariante Vektoren im umfassenden Raume sind.

Nach DUBNOW<sup>(2)</sup> ist dieses Netz dann und nur dann ein TSCHEBYSCHEFF-Netz, wenn der TSCHEBYSCHJEFF-Tensor

$$(3) \quad \tau_i = \varphi^{\alpha\beta} (2 \varphi_{i\alpha|\beta} - \varphi_{\alpha\beta, i})$$

identisch verschwindet, wobei unter  $\tilde{\varphi}^{\alpha\beta}$  der Tensor verstanden wird, der zu  $\varphi_{i,j}$  reziprok ist:

$$(4) \quad \tilde{\varphi}^{\alpha\lambda} \varphi_{\lambda\beta} = \delta_\beta^\alpha.$$

Das Kurvennetz auf  $S_0$ , das durch die Transplantation des Netzes (1) erhalten wird, wird durch die Differentialgleichung

$$(5) \quad \varphi_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = 0$$

bestimmt, wo

$$(6) \quad \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\lambda\mu} p_\alpha^\lambda p_\beta^\mu.$$

Die letzte Gleichung gibt

$$(7) \quad \tilde{\varphi}^{\alpha\beta} = \tilde{\varphi}^{\lambda\mu} p_\lambda^\alpha p_\mu^\beta;$$

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geometrie (I), Abh. aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Univ. III Bd. (1924) S. 37.

(2) DUBNOW, J. S.: Sur les caracteristiques tensorielles ....., C. R., 192, p. 261.

andererseits haben wir

$$(8) \quad \dot{\varphi}_{i,j,k} = p_i^\lambda p_j^\mu \varphi_{\lambda\mu k},$$

wo auf der linken Seite die absolute Ableitung mit Hilfe der Komponenten  $\dot{I}_{ij}^k$  der transplantierten Übertragung zu bilden ist.

Die Relationen (7) und (8) erlauben, den TSCHEBYSCHEFF-Tensor  $T_i$  für das transplantierte Netz auszurechnen:

$$(9) \quad \begin{cases} T_i = \tilde{\varphi}^{\alpha\beta} (2 \dot{\varphi}_{i\alpha\beta} - \varphi_{\alpha\beta,i}) \\ = \tilde{\varphi}^{\lambda\mu} (2 \varphi_{\alpha\lambda\beta} \dot{p}_\mu^\alpha - \varphi_{\lambda\mu,i}). \end{cases}$$

Nehmen wir jetzt an, dass der Tensor  $\varphi_{ij}$  auf  $S$  ein TSCHEBYSCHEFF-Netz definiert, so dass

$$(10) \quad \tau_i = \tilde{\varphi}^{\alpha\beta} (2 \varphi_{i\alpha\beta} - \varphi_{\alpha\beta,i}) = 0, \quad i=1, 2$$

ist.

Nehmen wir dieses Netz als ein Koordinatennetz an, so wird in den neuen Koordinaten gelten:

$$(11) \quad \varphi_{11} = \varphi_{22} = 0 \quad \tilde{\varphi}^{11} = \tilde{\varphi}^{22}$$

und die Bedingung (10) nimmt die Form an:

$$(12) \quad \Gamma_{12}^i = \Gamma_{12}^2 = 0.$$

Soll das transplantierte Netz ebenfalls ein TSCHEBYSCHEFF-Netz sein, so muss die Bedingung

$$(13) \quad T_i = 0$$

erfüllt sein oder

$$(14) \quad \tilde{\varphi}^{\lambda\mu} (2 \varphi_{\alpha\lambda\beta} \dot{p}_\mu^\alpha - \varphi_{\lambda\mu,i}) = 0.$$

Versetzen wir hier mit  $p_j^\lambda$ , so erhalten wir

$$(15) \quad \tilde{\varphi}^{\lambda\mu} (2 \varphi_{j\lambda\beta} \dot{p}_\mu^\beta - \varphi_{\lambda\mu,i} \dot{p}_j^\beta) = 0.$$

Mit Rücksicht auf (11) nimmt die letzte Gleichung die Form an<sup>(1)</sup>:

(1) SCHAPIRO, H.: Über die Transplantation der Parallelübertragung und der Kurvensysteme, Monat. Math. und Physik, 41 Bd. S. 261.

$$(16) \quad 2 \tilde{\varphi}^3 \{ \varphi_{j_1 | \beta} \dot{p}_2^{\beta} + \varphi_{j_2 | \beta} \dot{p}_1^{\beta} - \varphi_{j_2 | \beta} \dot{p}_1^{\beta} \} = 0.$$

(IV)

Ist  $\xi$  ein Kreis und  $\zeta$  ein anderer Kreis in  $R_2$  so ist

$$(1) \quad \eta = 2(\zeta \xi) \cdot \xi - \zeta$$

der zu  $\zeta$  in bezug auf den Kreis  $\xi$  inverse Kreis.

Wenn

$$(2) \quad \eta = a\xi + \beta\eta, \quad (\xi\eta) = 0, \quad (a, \beta = \text{Skalargrößen}),$$

so

$$(4) \quad \eta = a\xi - \beta\eta.$$

So ergibt sich der

**Satz:** Ist  $\xi$  ein Kreis und gehört  $\zeta$  dem Buschel

$$a\xi + \beta\eta,$$

so gehört der zu  $\zeta$  in bezug auf den Kreis  $\xi$  inverse Kreis auch diesem Buschel, wo  $\xi, \eta$  zueinander senkrecht sind.

(V)

Wir wollen meine Arbeit<sup>(2)</sup> mit der HORNICH'S<sup>(1)</sup> vergleichen.

Es sei  $C$  auf der komplexen  $z$ -Ebene das topologische Bild eines Kreises und rektifizierbar mit der  $T$ ; mit  $t$  sei der Parameter bezeichnet, den wir von einem festen Punkt aus zählen, und  $C$  sei dargestellt in der Form:

$$x = x'(t) = x(t+T),$$

$$y = y'(t) = y(t+T),$$

wo

(1) HORNICH, H.: Eine Verallgemeinerung der zweiten Randwertaufgabe, Monatsheft für Mathematik und Physik 41 Bd. (1934) S. 445.

(2) MATSUMURA, S.: Über einen affine geometrischen Satz und die Deviation ebener Kurven, Tohoku Math. Journ. Vol. 36 (1933) p. 189.

$$t = \frac{1}{3} \int \frac{d\rho}{\tan \varphi}, \quad T = \frac{1}{3} \int \frac{d\rho}{\tan \varphi}$$

ist.

C bestimmt ein beschränktes Gebiet G der Ebene, welches vom Randpunkt

$$x(t) + iy(t)$$

mit der Veränderlichen  $t$  umlaufen werde-

Der Richtungswinkel  $\varphi(t)$  der Tangente an C, der durch

$$x'(t) = \cos \varphi(t)$$

und

$$y'(t) = \sin \varphi(t)$$

bestimmt wird, ist eine zweimal stetig differenzierbare Funktion von  $t$ , für die

$$\varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi$$

gilt.

Dann kann man eine in G reguläre und mit Einschluss von C stetig differenzierbare Potentialfunktion  $u$  suchen, für welche am Rande C gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sin \alpha(t) + \frac{\partial u}{\partial n} \cos \alpha(t) = g(t)$$

( $n$  ist die ins Innere von G gerichtete Normale).

## (VI)

In der folgenden Note möchten wir die Geometrie der  $n$  Funktionen im Kugelraum untersuchen.<sup>(1)</sup>

Betrachten wir  $n$  Kugeln

$$K_1, \dots, K_n$$

in  $R_n$ , welche die Funktionen von Veränderlichen  $x$  und Parameter

(1) Vergl. INGOLD, L.: Geometry of a set of  $n$  Functions, Ann. of Math. 27, 1925-26) p. 494.



$$u^1, \dots, u^m$$

sind, wo

$$0 \leq x \leq 1$$

ist.

Nun setzen wir

$$(1) \quad \int_0^1 \varphi \Psi dx = \varphi \Psi, \quad \xi_i \xi_j = g_{ij}, \quad g = |g_{ij}|,$$

wo  $\varphi, \Psi$  zwei beliebige Funktionen sind.

Ist  $\varphi_{ij}$  der Winkel zwischen  $\xi_i, \xi_j$ , so folgt

$$(2) \quad |\xi_i| = \sqrt{g_{ii}}, \quad \cos \varphi_{ij} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}}.$$

Durch die Normale zu  $R_n$  betrachten wir eine Funktion  $\Psi(x; u^1, \dots, u^m)$  so wie

$$(3) \quad \int_0^1 \xi^i \Psi dx = 0.$$

Setzen wir

$$(4) \quad \xi_{i,\lambda} = \frac{\partial \xi_i}{\partial u^\lambda} = \Gamma_{i\lambda}^k \xi_k + N_{i\lambda},$$

wo  $\Gamma_{i\lambda}^k$  Funktionen von  $u$ ,  $N_{i\lambda}$  Funktionen von  $x$  und der Parameter  $u^\lambda$  der Normalvektor zu  $R_n$  ist.

Aus (4) ergibt sich

$$(5) \quad \xi_v \frac{\partial \xi_i}{\partial u^\lambda} = \Gamma_{i\lambda}^k g_{kv};$$

so folgt

$$(6) \quad \Gamma_{i\lambda}^k = g^{kv} \Gamma_{iv\lambda}.$$

Aus  $\xi_i \xi_j = g_{ij}$ , ergibt sich nach der Differentiation:

$$(7) \quad \xi_i \frac{\partial \xi_j}{\partial u^\lambda} + \xi_j \frac{\partial \xi_i}{\partial u^\lambda} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\lambda}, \quad \Gamma_{ij\lambda} + \Gamma_{ji\lambda} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\lambda}.$$

Hier betrachten wir

$$(8) \quad \varphi_i = a_i^j \xi_j,$$

wo  $a$  die Funktion von  $u^\lambda$  ist.

Nun definieren wir:

$$(9) \quad \varphi_i \varphi_j = h_{ij}, \quad h_{ij} = h, \quad \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial u^\lambda} = \bar{I}_{ij\lambda},$$

$$h^{jm} I'_{ij\lambda} = I_{ij}^m,$$

wo  $h h^{jm}$  der Kofaktor von  $h_{jm}$  in dem Determinanten  $|h_{jm}|$ , und  $\varphi_i \xi_k = p_{ik}$  sind.

Nach leichter Rechnung ergibt sich

$$(10) \quad \varphi_i \xi_k = p_{ik} = a_i^j g_{jk} = A_i^j h_{jk}, \quad a_i^j = p_{ik} g^{rk}, \quad A_i^j = p_{rk} h^{rk},$$

wo  $a_i^j | A_i^j$  der Kofaktor von  $a_i^j$  in der Determinante  $a_i^j$  ist.

Ist  $a_i^j$  die identische Transformation, so folgt

$$(11) \quad a_i^j = \delta_i^j, \quad p_{ik} = g_{ik} = h_{ik}.$$

Für neue  $\Gamma_{ij\lambda}$  erhalten wir

$$(12) \quad I'_{ij\lambda} = \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial u^\lambda} = a_j^r \xi_r \frac{\partial (a_i^s \xi_s)}{\partial u^\lambda}$$

$$= a_j^r \xi_r \xi_s \frac{\partial a_i^s}{\partial u^\lambda} + a_j^r a_i^s \xi_r \frac{\partial \xi_s}{\partial u^\lambda}$$

$$= a_j^r g_{rs} \frac{\partial a_i^s}{\partial u^\lambda} + a_j^r a_i^s \Gamma_{rs\lambda},$$

$$\Gamma_{ij\lambda}^m = h^{jm} \Gamma_{ij\lambda} = h^{jm} \left[ a_j^r g_{rs} \frac{\partial a_i^s}{\partial u^\lambda} + a_j^r a_i^s \Gamma_{rs\lambda} \right],$$

aber

$$(13) \quad a_j^r = p_{jt} g^{tr}, \quad h^{jm} a_j^r = h^{jm} p_{jt} g^{tr} = A_t^m g^{tr},$$

so folgt

$$(14) \quad \Gamma_{ij\lambda}^m = A_t^m \left[ g^{tr} g_{rs} \frac{\partial a_i^s}{\partial u^\lambda} + g^{tr} a_i^s \Gamma_{rs\lambda} \right]$$

$$= A_t^m \left[ \delta_i^s \frac{\partial a_i^r}{\partial u^\lambda} + a_i^s \Gamma_{s\lambda}^r \right]$$

$$= A_t^m \left[ \frac{\partial a_i^r}{\partial u^\lambda} + a_i^s \Gamma_{s\lambda}^r \right].$$

## (VII)

Wenn in VOLKS Arbeit die beiden Kreisscharen ein Rechteck bilden, so muss

$$(1) \quad x_u x_v + y_u y_v = 0$$

sein. Aus (1) ergibt sich

$$(V_s \sin \varphi \cdot \varphi_u)(U_s \sin \varphi \cdot \varphi_v) + (V_s \cos \varphi \cdot \varphi_u)(U_s \cos \varphi \cdot \varphi_v) = 0,$$

$$\text{d. h. } (2) \quad U_s V_s \varphi_v \varphi_u \cos(\varphi - \varphi) = 0.$$

Aus (2) folgt

$$(3) \quad U_s = 0, \quad (4) \quad V_s = 0, \quad (5) \quad \varphi = U, \quad (6) \quad \varphi = V,$$

$$(7) \quad \varphi = \varphi + \frac{\pi}{2} \cdot n,$$

wo  $U, V$  Funktionen  $u$  bzw.  $v$  allein,  $n$  gerade Zahlen sind.

Aus (3) folgt

$$(8) \quad \begin{cases} (U_2 - V_2)(U_1' + V_1') - (U_1 - V_1)(U_2' + V_2') = 0, \\ 2(U_1 - V_1)((U_1 - V_1)V_1' + (U_2 - V_2)V_2' + V_3 V_3') \\ - (U_1' + V_1')((U_1 - V_1)^2 + (U_2 + V_2)^2 - V_3^2) = 0. \end{cases}$$

Aus (4) ergibt sich

$$(9) \quad \begin{cases} (U_2 - V_2)(U_1' + V_1') - (U_1 - V_1)(U_2' + V_2') = 0, \\ 2(U_1 - V_1)((U_1 - V_1)V_1' + (U_2 - V_2)V_2' + U_3 U_3') \\ - (U_1' + V_1')((U_1 - V_1)^2 + (U_2 + V_2)^2 + U_3^2) = 0. \end{cases}$$

Aus (5) folgt

$$(10) \quad \begin{cases} V_s \cos \varphi - U_s \cos U = U_1 - V_1, \\ V_s \sin \varphi - U_s \sin U = U_2 - V_2. \end{cases}$$

Aus (6) ergibt sich

$$(11) \quad \begin{cases} V_s \cos V - U_s \cos \varphi = U_1 - V_1, \\ V_s \sin V - U_s \sin \varphi = U_2 - V_2. \end{cases}$$

Aus (7) folgt

$$(12) \quad \begin{cases} V_3 \varphi_u - U_3 = U_1 \cos \varphi + U_2' \sin \varphi, \\ U_3 \varphi_v + V_3 = -V_1 \cos \varphi - V_2' \sin \varphi. \end{cases}$$

So folgt der

**Satz:** (8), (9), (10), (11) (12) sind die Bedingungen dafür, dass die beiden Kreisscharen ein Rechteck bilden.

### (VIII)

Ist  $\hat{\xi}$  eine Kugel in  $R_3$  und  $\chi$  ein nicht auf ihm gelegener Kurvenpunkt, so ist

$$(1) \quad \eta = 2(\chi \hat{\xi}) \hat{\xi} - \chi$$

der zu  $\chi$  in bezug auf die Kugel  $\hat{\xi}$  inverse Kurvenpunkt.

Seien  $\chi$  und  $\eta$  einander durch parallele Tangenten punktweise eineindeutig zugeordnet, so folgt

$$(2) \quad \chi' = \lambda \eta',$$

wobei bekanntlich

$$(3) \quad \lambda = \frac{\rho'(\chi)}{\rho(\eta)} = \frac{\tau(\chi)}{\tau(\eta)}$$

ist. Aus (1) folgt

$$(4) \quad \eta' = 2(\chi' \hat{\xi}) \hat{\xi} - \chi'.$$

Aus (2) folgt

$$\eta' = 2(\lambda \eta' \hat{\xi}) \hat{\xi} - \lambda \eta',$$

$$\therefore (5) \quad (1 + \lambda) \eta' = 2\lambda (\eta' \hat{\xi}) \hat{\xi}.$$

Aus (4) folgt

$$1 = 1(\lambda \hat{\xi}) \hat{\xi} - \lambda, \quad (6) \quad \hat{\xi} = \frac{1 + \lambda}{2(\lambda \hat{\xi})}$$

$$(7) \quad \hat{\xi} = \frac{1 + \frac{\rho(\chi)}{\rho(\eta)}}{2 \frac{\rho(\chi) \hat{\xi}}{\rho(\eta)}}, \quad (8) \quad \hat{\xi} = \frac{1 + \frac{\tau(\chi)}{\tau(\eta)}}{2 \frac{\tau(\chi) \hat{\xi}}{\tau(\eta)}}$$

(6), (7), (8) sind unsere Resultaten.

## (IX)

Wenn

$$(1) \quad x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 0,$$

so

$$(2) \quad \begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'(t) & x'(t) \\ z''(t) & x''(t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}^2 = 0,$$

weil

$$(3) \quad \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 \\ = \{x'^2 + y'^2 + z'^2\} \{x''^2 + y''^2 + z''^2\} - \{x'x'' + x'y'' + x'z''\}.$$

Wenn

$$(4) \quad x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 1,$$

und (2) bestehen, so folgt

$$(5) \quad \begin{vmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Weil aus (4) und (2)

$$(6) \quad x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = 0,$$

und

$$(7)$$

$$\begin{vmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \sum x(t) & \sum x(t)x'(t) & \sum x(t)x''(t) \\ \sum x'(t)x(t) & \sum x'(t)^2 & \sum x'(t)x''(t) \\ \sum x(t)x''(t) & \sum x'(t)x''(t) & \sum x''(t)^2 \end{vmatrix}$$

werden, so folgt der

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum x''^2 \end{vmatrix} = 0$$

**Satz:** (2) ist die Bedingung dafür, dass die Nullkugel oder die Ebene durch den Ursprung der Koordinaten geht.

## (X)

Im folgenden möchten wir die Rotationsflächen auf dem Standpunkt von der Geometrie der Kreisscharen erklären.

Als Parameterkurven werden im folgenden durchweg die Breitenkreise  $t=\text{const.}$  und die Meridiane  $\tau=\text{const.}$  der Rotationsfläche benutzt.

Ist die Z-Achse die Rotationstachse und  $\rho=\rho(t)$  der Abstand eines Oberflächenpunktes von dieser Achse, so lauten die Gleichungen der Fläche  $z=f(\rho)$  in der Parameterdarstellung:

$$(1) \quad \begin{cases} x = \rho(t) \cos \tau, \\ y = \rho(t) \sin \tau, \\ z = \int_0^t \sqrt{1 - \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2} dt, \end{cases}$$

wobei wir uns des kanonischen Koordinatensystems bedienen wollen.

Die Gauss'schen Fundamentalgrößen erster Ordnung sind dann

$$(2) \quad E=1, \quad F=0, \quad G=\rho^2,$$

so folgt<sup>(1)</sup>

$$(3) \quad \begin{cases} (\theta_t \theta_t) = \lambda E = \frac{1}{\rho^2}, \\ (\theta_t \theta_\tau) \lambda F = 0, \\ (\theta_\tau \theta_\tau) = \lambda G = 1, \quad \lambda = \frac{1}{\rho^2}, \end{cases}$$

Die Parameterkurven bilden ein Orthogonalsystem.

Es ist das Krümmungsmass

$$(4) \quad \begin{aligned} r &= -\frac{\rho''}{\rho} \\ &= -\left\{ \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)}} \right) \right\} \left\{ \sqrt{(\theta_t \theta_t)} \right\}, \end{aligned}$$

ein beliebiges Bogenelement

(1) NAKAJIMA, S.: Kugelgeometrie von MÖBIUS, Mem. of the Fac. and Agr., Taihoku Imp. Univ. Vol. 2, p. 36.

$$(5) \quad ds = \pm dt \sqrt{1 + \frac{\tau'^2}{(\theta, \theta_t)}},$$

wenn der Strich die Ableitung nach  $t$  bedeutet.

Die Gleichung einer durch den Punkt  $(t=t_1; \tau=\tau_1)$  gehenden geodätischen Linie lautet dann bekanntlich<sup>(1)</sup>:

$$(6) \quad \tau - \tau_1 = c \int_{t_1}^t \frac{(\theta, \theta_t) dt}{\sqrt{1 - c^2 (\theta, \theta_t)}}$$

Hierbei stellt  $c$  die CLAIRAUTSCHE Konstante dar.

Ist nämlich  $\alpha$  der Winkel der Kurve mit einem Breitenkreise  $\frac{1}{\sqrt{(\theta, \theta_t)}}$ , so bestimmt man  $c$  aus der Gleichung

$$c = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{(\theta, \theta_t)}},$$

die für alle Punkte der geodätischen Linie gilt.<sup>(2)</sup>

# (XI)

Wir betrachten zwei Kreise  $\mathfrak{R}$  und  $\tilde{\mathfrak{R}}$  in  $R_3$ , die durch die beiden Kugelpaare  $\mathfrak{K}^\alpha$  und  $\tilde{\mathfrak{K}}^\lambda [\alpha, \lambda = I, II]$  dargestellt werden. Wir definieren

$$(1) \quad \tilde{A}^{\lambda\mu} = (\tilde{\mathfrak{K}}^\lambda, \tilde{\mathfrak{K}}^\mu), S^{\alpha\lambda} = (\mathfrak{K}^\alpha, \tilde{\mathfrak{K}}^\lambda) \text{ mit } \tilde{A}^{\lambda\nu} = \tilde{A}^{\mu\lambda}, S^{\alpha\lambda} = S^{\lambda\alpha}$$

und setzen

$$(2) \quad A = |\tilde{A}^{\lambda\mu}| > 0, S = |\tilde{S}^{\alpha\lambda}| > 0$$

voraus.

Ist

$$(3) \quad \eta = \rho_\alpha \mathfrak{K}^\alpha$$

eine normierte Kugel durch  $\mathfrak{R}$  mit

$$(4) \quad \mathfrak{K}^\alpha \mathfrak{K}^\beta = \rho_\alpha \rho_\beta A^{\alpha\beta} = 1,$$

so muss

(1) SCHEFFERS, G.: Theorie der Flächen, 1. A. 4. Abschn. § 1.

(2) LETZ, E.: Die Verfolgungskurve des Kehlkreises auf den Rotationsflächen konstanter Krümmung, Inaugural-Dissertation (1912).

$$(5) \quad \cos^2 \varphi = \rho_a \rho_b T^{ab}$$

sein, wo  $\varphi$  den Winkel zwischen der Kugel (3) und dem Kreis  $\tilde{\mathfrak{K}}$  bedeutet und besteht

$$(6) \quad T^{ab} = \tilde{A}_{\lambda\mu} S^{a\lambda} S^{b\mu} = S_{\nu}^a S^{\nu b}.$$

Wenn  $\mathfrak{y}$  und  $\tilde{\mathfrak{K}}$  zueinander senkrecht sind, so folgt

$$(7) \quad \rho_a (\dot{x}^a \tilde{x}^\lambda) = \rho_a S^{a\lambda} = 0.$$

$\mathfrak{y} = \rho_a \dot{x}^a$  mit  $\rho_a S^{a\lambda}(t) = 0$  bedeutet die Kreisfläche, die zu einer Kugel senkrecht ist, wo  $t$  ein Parameter ist.

Nehmen wir einen Punkt  $u$  als die Linearkombinationen von  $\dot{x}^a$  und  $\dot{x}^a[\beta = \text{I, II}]$ , so folgt

$$(8) \quad u = \rho_a \dot{x}^a + \rho_\beta \dot{x}^\beta \quad [\alpha, \beta = \text{I, II}]$$

wo  $\rho_a, \rho_\beta$  gewisse skalare Zahlen bedeuten, so folgt

$$(9) \quad uu = \rho_a \rho_\beta A^{ab} + \rho_a \rho_\beta B^{ab} + \rho_a \rho_\beta T^{ab} = 0.$$

Wenn  $u$  auf  $\mathfrak{y}$  liegt, so folgt

$$\begin{aligned} (10) \quad (u\mathfrak{y}) &= (\rho_a \dot{x}^a, \rho_\beta \dot{x}^\beta + \rho_\beta \dot{x}^\beta) \\ &= \rho_a \rho_\beta (\dot{x}^a \dot{x}^\beta) + \rho_a \rho_\beta (\dot{x}^a \dot{x}^\beta) \\ &= \rho_a \rho_\beta (A^{ab} + B^{ab}) = 0. \end{aligned}$$

Aus (1), (2) kann man die Kugel  $\mathfrak{y}$  bestimmen.

## (XII)

Wir betrachten eine einparametrische Kugelschar  $\mathfrak{x}(t)$  in  $R_3$ . Ein Kreis  $\mathfrak{K}$  in  $R_3$  kann als der Schnitt der beiden benachbarten Kugeln  $\mathfrak{x}(t)$  und  $\mathfrak{x}(t) + \dot{\mathfrak{x}}(t)dt$  angenommen werden.

Wir betrachten zwei Kreise  $\mathfrak{K}$  und  $\tilde{\mathfrak{K}}$ , die durch die beiden Kugelpaare

$$(1) \quad \{\dot{x}^I, \dot{x}^I + \dot{x}^I dt\}, \{\dot{x}^{II}, \dot{x}^{II} dt\}$$

definiert werden, also bedeuten  $\dot{x}^a$  mit  $\dot{x}^a + \dot{x}^a dt$  [ $a = \text{I, II}$ ] zwei Kreisscharen im  $R_3$ .



Setzen wir

$$(2) \quad S^{\alpha\lambda} \equiv \dot{x}^\alpha \dot{x}^\lambda,$$

so folgt der

**Satz:** Die Kugel  $\mathfrak{g} = \rho_\alpha \dot{x}^\alpha$  mit

$$(3) \quad \rho_\alpha \dot{x}^\alpha \dot{x}^\tau = \rho_\alpha S^{\alpha\tau} = 0$$

ist senkrecht zu zwei Kugeln  $\dot{x}^I + \dot{x}^I dt$  und  $\dot{x}^{II} + \dot{x}^{II} dt$ .

Zu vier gegebenen Kugeln

$$(4) \quad \dot{x}^I, \dot{x}^I + \dot{x}^I dt, \dot{x}^{II}, \dot{x}^{II} + \dot{x}^{II} dt$$

gibt es immer eine gemeinsame senkrechte Kugel  $\eta$ , die wir definieren können durch

$$(\eta \mathfrak{X}) = | \dot{x}^I, \dot{x}^I + \dot{x}^I dt, \dot{x}^{II}, \dot{x}^{II} + \dot{x}^{II} dt, \mathfrak{X} |,$$

wo für  $\mathfrak{X}$  eine willkürliche Kugel eingesetzt werden kann.

Wir schreiben symbolisch:

$$(6) \quad \eta = || \dot{x}^I, \dot{x}^I + \dot{x}^I dt, \dot{x}^{II}, \dot{x}^{II} + \dot{x}^{II} dt ||$$

und nennen  $\eta$  das vektorielle Produkt der vier Kugeln (4). Für solche vektorielle Produkte gelten den Formeln ganz entsprechende Rechenregeln in THOMSENS Arbeit.<sup>(1)</sup>

Analog in ALTSHILLER-COURTS Arbeit<sup>(2)</sup> zeigt man, dass, von fünf paarweise zu einander orthogonalen Kugeln immer eine nullteilig und vier eigentlich sind.

Führen wir ein allgemeines System von solchen fünf senkrechten Koordinatenkugeln ein, so können wir den pentasphärischen Koordinaten wieder eine dem Kap.<sup>(3)</sup> (1) entsprechende allgemeinere geometrische Auffassung zu Grunde legen.

$u$  sei ein Schnittpunkt der

$$\dot{x}^I, \dot{x}^I + \dot{x}^I dt, \dot{x}^{II}, \dot{x}^{II} dt,$$

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar IV Bd. (1925) S. 117.

(2) ALTSHILLER-COURT, N.: On five mutually orthogonal Spheres, Annals of Math. 30 (1929) p. 613.

(3) NAKAJIMA, S.: Kugelgeo. von Möbius, Mem. of the Fac. of Sci. and Agr. Taihoku Imp. Univ. Vol. 2, p. 6.

dann ist die Determinante

$$(7) \quad |u, \xi^I, \xi^I + \dot{\xi}^I dt, \xi^{II}, \xi^{II} + \dot{\xi}^{II} dt, *| = 0$$

für jede Hilfskugel  $*$ , wie man durchs Quadrieren erkennt. Es ist  $u$  also eine Linearkombination der (4).

Für

$$(8) \quad D = (\xi^I \xi^I)' (\xi^I + \dot{\xi}^I dt, \xi^{II} + \dot{\xi}^{II} dt) - (\xi^I, \xi^I + \dot{\xi}^I dt)^2 > 0$$

schrumpft der Kreis

$$(9) \quad \xi^I, \xi^I + \dot{\xi}^I dt$$

auf einen Punkt zusammen, für

$$(10) \quad D < 0$$

ist er imaginär.

Ist

$$(\xi^a \xi^a)' A^{ab} = 0, \text{ wo } \xi^I = \xi^I, \xi^{II} = \xi^I + \dot{\xi}^I dt,$$

so erhalten wir im komplexen Gebiet als Ausartung eine Minimalgerade.

### (XIII)

$$(1) \quad \xi^a [a=I, II, \dots, 2n]$$

bedeutet das Viereck in  $R_n$ .

$$(2) \quad \xi^a [a=I, II, \dots, 2n-1]$$

bedeutet die Kugeln in  $R_n$ , wo  $\xi^a$  die Kugel in  $R_n$  ist.

Für (1), (2) kann man Untersuchung anstellen wie in meiner Arbeit.<sup>(1)</sup>

### (XIV)

Im folgenden möchten wir die Kugeln in  $R_\infty$  erklären.<sup>(2)</sup>

Wir betrachten nun zwei Kugeln  $\xi, \eta$  in  $R_\infty$  und definieren mit

(1) MATSUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (I), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri. Taihoku Imp. Univ., Vol. 3 (1932) p. 98.

(2) Vergl. MATSUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (I), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri. Taihoku Imp. Univ., Vol. V (1932) p. 95.

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = \frac{(xy)^2}{(xx)(yy)}$$

den Winkel  $\varphi$  zwischen  $x$  und  $y$ .

Zu zwei gegebenen gerichteten Kugeln  $x$  und  $y$  kann man die winkelhalbierende Kugel  $z$  in  $R_\infty$  als gemeinsame Orthogonalkugel aller Kugel  $t$  in  $R$  betrachten, die  $x$  und  $y$  im verschiedenen Sinne berühren.

Ein Kreis  $\mathfrak{K}$  in  $R_\infty$  als Schnitt von  $n$  Kugeln

$$x^a [a=I, II, \dots n]$$

wird festgelegt, wo  $n$  nicht unendlich ist.

Wir können daher auch  $n$  neue Kugeln

$$(2) \quad \tilde{x}^a = \sum_{\beta=1}^n C_{\beta}^a x^{\beta} \quad [a=I, II, \dots n]$$

als Linearkombinationen der  $x^a$  einführen mit Koeffizienten  $C_{\beta}^a$ , deren Determinante  $|C_{\beta}^a| \neq 0$  sein muss, und dann ebensogut mit der  $\tilde{x}^a$  unsern Kreis darstellen.

Soll ein Ausdruck in den Koordinaten der Kugeln

$$(3) \quad \mathfrak{z}^a, y^a, \mathfrak{z}^a, \dots, \quad [a=I, II, \dots n],$$

mit deren Hilfe wir eine Anzahl von Kreisen festlegen, nur von der geometrischen Figur der Kreise abhängen, nicht aber von den sie festlegenden Kugeln, so muss er bei der Substitution von der Art (2) unverändert bleiben.

Bilden wir das System der Skalarprodukte

$$(4) \quad (x^a x^b) = A^{ab},$$

so dass sich nach (2) in folgender Weise substituiert:

$$(5) \quad \tilde{A}^{ab} = C_{\beta}^a C_{\gamma}^b A^{\gamma\beta} [\tilde{A}^{ab} = (\tilde{x}^a \tilde{x}^b)].$$

Hier laufen alle Indizes von I bis  $n$ .

Für den zu unserm Kreis  $\mathfrak{K}$  gehörigen Tensor  $A^{ab}$  gilt die Symmetriebedingung

$$(6) \quad A^{ab} = A^{ba}$$

und ferner substituiert sich die Determinante  $A = |A^{\alpha\beta}|$  nach

$$(7) \quad \tilde{A} = |C_{\beta}^{\alpha}|^2 \cdot A$$

Für  $A=0$  schrumpft der Kreis auf einen Punkt zusammen, und für  $A<0$  ist er imaginär.

Ist  $A^{\alpha\beta}=0$ , so erhalten wir im komplexen Gebiet als die Ausartung eine Minimalgerade.

Kombiniert sich ein Scheitel  $u$  aus  $\xi^{\alpha}$  mit Koeffizienten  $\rho_{\alpha}$ :

$$(8) \quad u = \rho_{\alpha} \xi^{\alpha},$$

so muss gelten

$$(9) \quad uu = \rho_{\alpha} \rho_{\beta} A^{\alpha\beta} = 0, \quad [\alpha, \beta = I, II, \dots n],$$

und diese quadratische Gleichung in den homogenen Grössen  $\rho_{\alpha}$  hat zwei Lösungen, die wegen  $A \neq 0$  konjugiert komplex sind. In diesem Fall kann man untersuchen wie in meiner Arbeit.<sup>(1)</sup>

Wird die *Unterdeterminante einer  $A^{ik}$*  in

$$(10) \quad A = \begin{vmatrix} A^{11} & A^{12} & \dots & A^{1n} \\ A^{21} & A^{22} & \dots & A^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{n1} & A^{n2} & \dots & A^{nn} \end{vmatrix}$$

mit  $a_{ik}$ , ( $i, k=1, 2, \dots, n$ ) bezeichnet, so ist

$$(11) \quad A^{ik} = \frac{a_{ik}}{A}.$$

Man kann die folgende Formel bekommen:

$$(12) \quad \cos^2 \varphi = (\xi^{\alpha} \eta) (\xi^{\alpha} \eta), \quad [\alpha = I, II, \dots n],$$

wo  $\varphi$  den Winkel zwischen einer Kugel  $\eta$  und einem Kreis  $\xi^{\alpha}$  bedeutet.

Wenn die Kugel  $\eta$  zu dem Kreis  $\xi^{\alpha}$  senkrecht ist, so besteht

$$(13) \quad \xi^{\alpha} \eta = 0.$$

Wir betrachten zwei Kreise  $\mathfrak{R}$ ,  $\tilde{\mathfrak{R}}$ , die durch die beiden Kugelpaare  $\xi_{\alpha}$  und  $\tilde{\xi}^{\lambda}$  [ $\alpha, \lambda = I, II, \dots, n$ ] dargestellt sind.

(1) I. c. (1).

Ist  $\eta = \rho_a x^a$  [ $a = I, II, \dots, \infty$ ] eine normierte Kugel durch  $\mathfrak{K}$  mit

$$(14) \quad \eta \eta = \rho_a \rho_b A^{ab} = 1,$$

so muss

$$(15) \quad \cos^2 \varphi = \rho_a \rho_b T^{ab}$$

gelten, wo  $\varphi$  den Winkel zwischen  $\eta$  und  $\tilde{\mathfrak{K}}$  bedeutet, wo

$$(16) \quad T^{ab} = A_{\lambda\mu} S^{a\lambda} S^{b\mu} = S_{\mu}^a S^{b\mu}, \quad S^{a\lambda} = (\tilde{x}^a \tilde{x}^\lambda).$$

Ist  $\hat{\varepsilon}$  eine Kugel in  $R$  und  $\mathfrak{z}$  eine nicht auf ihm gelegene Kugel in  $R_\infty$ , so ist

$$(17) \quad \eta = 2(\mathfrak{z}\hat{\varepsilon})\hat{\varepsilon} - \mathfrak{z}$$

die zu  $\mathfrak{z}$  in bezug auf die Kugel  $\hat{\varepsilon}$  inverse Kugel in  $R$ .  $x(t)$  bedeutet die Kugelscharen in  $R$ , wo  $t$  ein Parameter ist.  $x^a(t)$ , [ $a = I, II, \dots, n$ ] bedeutet die Kurvenscharen in  $R$ . Man kann mit  $x^a(t)$  die Kurven in  $R_\infty$  bestimmen.

Als die Bogenlänge dieser Kurve definieren wir das Integral

$$(18) \quad S = \int_{t_0}^t F(\dot{x}^I, \dot{x}^{II}, \dots; \dot{x}^I, \dot{x}^{II}, \dots) dt = \int_{t_0}^t F(\dot{x}\dot{x}) dt,$$

wo wir durch Punkte die Ableitung nach Parameter  $t$  zeigen.

Dehnen wir unsere Geometrie auf das komplexe Gebiet aus, so wird die Gleichung

$$(19) \quad (x^I x^{II}) = 0$$

für zwei Punkte  $x^I, x^{II}$  wichtig sein.

Sie besagt, dass die Punkte  $u$  und  $v$  auf ein und derselben isotropen Gerade in  $R_\infty$  liegen und dass wir durch den Rückgang auf Kartesische Koordinaten  $\xi^I, \eta^I, \zeta^I, \dots; \xi^{II}, \eta^{II}, \zeta^{II}, \dots$  aus

$$x_0 = \rho \frac{1 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \dots}{2},$$

$$x_1 = \rho \frac{1(\zeta^2 + \eta^2 + \xi^2 + \dots)}{2},$$

$$x_2 = \rho \xi,$$

$$x_3 = \rho \eta,$$

$$x_4 = \rho \zeta,$$

erhalten :

$$(\xi^I - \xi^{II})^2 + (\eta^I - \eta^{II})^2 + (\zeta^I - \zeta^{II})^2 + \dots = 0.$$

Nehmen wir auf einer Kugel  $\mathfrak{g}$  in  $R_\infty$   $\infty$  Punkte  $\xi^a$  [ $a=I, II, III, \dots$ ] und auf einer weitem Kugel  $\mathfrak{g}^*$  in  $R_\infty$  ebenfalls  $\infty$  Punkte  $\xi^{*a}$  an, so gibt es genau Möbiustransformationen des  $R_\infty$ -Raumes, die die Figur  $\{\mathfrak{g}\xi^a\}$  in die Figur  $\{\mathfrak{g}^*\xi^{*a}\}$  überführen.

### (XV)

Geben wir einen Kreis  $\xi$  in  $R_2$  als die Funktion eines Parameters  $t$ , so wird eine Kreisschar dadurch in der Ebene bestimmt.

Es ist dann

$$(1) \quad (\xi \xi) = 1, \quad (\xi \dot{\xi}) = 0$$

identisch in  $t$ , wenn wir die Ableitungen nach  $t$  mit den Punkten bezeichnen.

Sind  $\mathfrak{b}, \bar{\mathfrak{b}}$  die beiden Schnittpunkte von  $\xi$  mit dem Nachbarkreis, die beiden Enveloppenpunkte, so gilt<sup>(1)</sup>

$$(2) \quad \begin{cases} (\mathfrak{b}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{b}\xi) = (\mathfrak{b}\xi') = 0, \\ (\bar{\mathfrak{b}}\bar{\mathfrak{b}}) = (\bar{\mathfrak{b}}\xi) = (\bar{\mathfrak{b}}\xi') = 0. \end{cases}$$

In folgenden erklären wir *R.-Geometrie* über  $\mathfrak{b}$  bezüglich  $\bar{\mathfrak{b}}$ .

Um  $\mathfrak{b}, \bar{\mathfrak{b}}$  zur Stützfunktion  $p$  bzw.  $q$  zu verwenden, setzen wir

$$(3) \quad \frac{\sqrt{\mathfrak{b}^2 + \bar{\mathfrak{b}}^2}}{2^{\frac{1}{2}}} = p,$$

$$(4) \quad \frac{\sqrt{\bar{\mathfrak{b}} + \mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}} = q,$$

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV Bd. S. 126.

und ordnen dann je zwei Punkte  $b$  und  $\bar{b}$  zu, für welche die Vektoren  $\xi$  miteinander übereinstimmen, und bezeichnen die Größe

$$(5) \quad r(\xi) = \frac{p(\xi)}{q(\xi)}$$

als den *R.-Abstand* der  $b$  bezüglich  $\bar{b}$ , wo  $\xi$  der Einheitsvektor der äusseren Normalen ist.

Ist  $\rho$  *R.-Krümmungsradius* von  $b$  bezüglich  $\bar{b}$ , so folgt

$$(6) \quad \frac{dt}{d\sigma} = \rho = \sqrt{\frac{\bar{b}_t^2}{\bar{b}_s^2}} = \frac{d\bar{s}(b)}{d\bar{s}(\bar{b})} = -\frac{\bar{\rho}(b)}{\bar{\rho}(\bar{b})}.$$

Für den *R.-Kreis* ist  $\rho$  konstant.

Für den *R.-Umfang*  $S$  von  $b$  gilt<sup>(1)</sup>

$$(7) \quad S = \oint dt = \oint \rho d\sigma = \oint r d\sigma.$$

Ein Kurvenpunkt, in welchem  $\rho' = 0$  ist, sei *R.-Scheitel* genannt.

Ist  $\bar{u}$  die Affinbogenlänge von  $b$  und  $\bar{v}$  diejenige von  $\bar{b}$ , so ist bekanntlich :

$$(8) \quad \frac{d\bar{u}}{d\varphi} = \bar{\rho}(b)^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{d\bar{v}}{d\varphi} = \bar{\rho}(\bar{b})^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{d\bar{u}}{d\bar{v}} = \bar{\rho}^{\frac{2}{3}}.$$

### (XVI)

Im folgenden untersuchen wir die stationäre Strömung auf der Kreisfläche. Es sei  $\varphi(x, y, z)$  das Geschwindigkeitspotential der Bewegung, und auf der Fläche, auf welcher die Bewegung stattfinden soll, sei

$$(1) \quad \begin{cases} x = f_1(t, \tau) \\ y = f_2(t, \tau) \\ z = f_3(t, \tau) \end{cases}$$

(1) SÜSS, W.: Zur relativen Differentialgeometrie (I), Jap. Journ. of Math. Vol. IV (1927) p. 64.

wo  $t, \tau$  in meiner Arbeit<sup>(1)</sup> stehen.

So erhält man aus REIFFS Arbeit<sup>(2)</sup>

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{(\theta_i \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (\theta_i \theta_i) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}} \right\} \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{(\theta_\tau \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (\theta_i \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}} \right\}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\sqrt{(\theta_\tau \theta_\tau)}}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} = 0$$

ist die Differentialgleichung für  $\varphi$ .

(1) NAKAJIMA, S.: Kugelgeo. von Möbius, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri. Taihoku Imp. Univ. Vol. 2 (1929) p. 36.

(2) REIFF, R.: Über stationäre Strömung auf krummen Flächen, Math.-naturw. Mitteil I, Tübingen.





# Über Flächen und Kurven (XIV):

## Kleine Bemerkungen über Geometrie

Sôji MATSUMURA

(Accepted for publication, June 24, 1935.)

### ( I )

Die Gesamtheit der reellen, im Intervall von  $x=0$  bis  $x=1$  integrierbaren Funktionen der reellen Veränderlichen  $x$  betrachtet man als „Punkt“ eines Funktionenraums.

Die Funktionen  $\varphi=\varphi(x)$ , welche der Normierungsbedingung

$$(1) \quad \int_0^1 \varphi^2 dx = 1$$

genügen, liegen auf der „Einheitssphäre“ dieses Raums.

$$(2) \quad \int_0^1 \varphi dx = 0$$

bedeutet einen Punkt.<sup>(1)</sup>

Beschränken wir uns ferner auf positive Funktionen, so kommt nur jener Teil der Einheitssphäre in Betracht, welcher dem „ersten“ Oktanten der Kugel des gewöhnlichen Raums entspricht.

Die sphärische Distanz zwei normierter Funktionen  $\varphi, \psi$  ist der kleinste positive Winkel  $\theta$ , der durch die Gleichung

$$(3) \quad \cos \theta = \int_0^1 \varphi \psi dx$$

$$(4) \quad \int_0^1 \varphi \psi dx = 0$$

bedeutet zwei Funktionen  $\varphi, \psi$ , die zueinander senkrecht sind.

(1) FRANK, PH. und PICK, G.: Distanzschätzungen im Funktionenraum, Math. Ann. 76 (1914-15) S. 354.

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agr. Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. XV. No. 10, August 1935.]

$$(5) \quad \int_0^1 \varphi \Psi dx = 1$$

bedeutet  $\varphi$ ,  $\Psi$ , die sich berühren.<sup>(1)</sup>

Betrachten wir die integrierbaren Funktionen der 0 bis 1 veränderlichen Größe  $x$  als Punkte eines Funktionenraums, so ist das Distanzquadrat zweier Funktionen  $f$ ,  $g$  definiert durch

$$(6) \quad \int_0^1 (f-g)^2 dx.$$

Wenn  $g$  eine gegebene Funktion und  $f$  eine veränderliche ist, um (6) auf ein Minimum zu bringen, so ergibt sich

$$(7) \quad \int_0^1 f'(f-g)^2 dx = 0.$$

Aus der obigen Tatsache kann man den Prinzip der Methode der kleinsten Quadrate begründen.

Geben wir eine Funktion  $\varphi$  als Funktion eines Parameters  $t$ , so wird dadurch in der Ebene eine Kurvenschar bestimmt.

Durch die Normierungsbedingung besteht

$$(8) \quad \int_0^1 \varphi^2 dx = 1,$$

so ist

$$(9) \quad \varphi \dot{\varphi} = 0$$

identisch in  $t$ , wenn wir Ableitungen nach  $t$  durch Punkte bezeichnen.

Wenn

$$(10) \quad g = f + \dot{f} dt + \dots,$$

so folgt aus (6)

$$(11) \quad \frac{dD}{dt} = \int_0^1 \dot{f}^2 dx.$$

$$(12) \quad \int_0^1 \dot{f} f dx = 0$$

(1) NAKAJIMA, S.: The Circle and the Straight Line nearest to  $n$  Given Points,  $n$  Given Straight Lines or a Given Curve, Tôhoku Math. Journ. 19 (1921) p. 11.

ist die Bedingung, bei der sich konsekutive Kurven berühren.

Aus (12) folgt

$$\int_0^1 \ddot{f} \dot{f} dx = 0.$$

Sind  $\xi, \eta$  zwei Funktionen, so definieren wir

$$\int_0^1 \eta dx = 2 \int_0^1 \{\eta \xi\} \xi dx - \int_0^1 \xi dx$$

der zu  $\int_0^1 \xi dx$  in bezug auf den  $\int_0^1 \xi dx$  inverse Funktion.

Aus dieser Definition kann man denselben Satz in Funktionenraum wie in der Inversionsgeometrie bekommen.

## ( II )

Betrachten wir zwei Kurven in RIEMANNS Raum und betrachten *R.-Geometrie*, so besteht<sup>(1)</sup>

$$(1) \quad \frac{ds}{d\sigma} = \rho = \frac{d\bar{s}(\xi)}{d\bar{s}(\epsilon)} = \frac{\bar{\rho}(\xi)}{\bar{\rho}(\epsilon)} = \sqrt{b_{rs}} \frac{dx^r}{ds} \frac{dx^s}{ds},$$

wo

$$(2) \quad \begin{cases} d\bar{s}^2(\xi) = g_{rs} dx^r dx^s, & \rho = \text{R.-Krümmungsradius,} \\ d\bar{s}^2(\epsilon) = b_{rs} dx^r dx^s, & \bar{\rho} = \text{elementare Krümmungsradius.} \end{cases}$$

Korrespondieren miteinander

$$x^i = f^i(\sigma) \quad \text{und} \quad x^i = \varphi^i(s),$$

so besteht zwischen  $t, s$

$$f^i(\sigma) \equiv \varphi^i(s), \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Nach LEVI-CIVITA<sup>(2)</sup> setzen wir

- (1) SÜSS, W.: Zur relativen Differentialgeo. I, Jap. Journ. of Math. Vol. IV (1927) p. 59.  
 (2) LEVI-CIVITA: Annali di Mat., Vol. 24 (1896), p. 225.

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{f},$$

wo

$$f = \mu \left( 1 + c_r \dot{x}^r + \frac{1}{2} c_{rs} \dot{x}^r \dot{x}^s + \dots \right)$$

ist.

In der geodätische Korrespondenz besteht

$$f = \frac{ds}{d\sigma} = - \sqrt{b_{rs} \frac{dx^r}{ds} \cdot \frac{dx^s}{ds}}$$

wo<sup>(1)</sup>

$$\mu b_{,jk} + b_{,j} \mu_{,k} + \frac{1}{2} (b_{,ik} \mu_{,j} + b_{,jk} \mu_{,i}) = 0,$$

$$\mu_{,i} = - \frac{\partial \mu}{\partial x^i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Für *R.-Scheitel* besteht

$$f' = 0.$$

Für *R.-Spiral* ist  $\rho$  konstant, d. h.  $f$  konstant. Ist umgekehrt  $\rho$  konstant, so folgt

$$\bar{\rho}(\xi) = \text{konst.} \quad \bar{\rho}(\mu).$$

(III)

Nehmen wir<sup>(2)</sup>

$$(1) \quad B = \frac{2\{(\xi_1 - \xi_2)\xi_1\}}{(e_1, \xi_1)}$$

als *S.-Breite* von  $\xi$  bezüglich  $e$ , so kann man den folgenden Satz beweisen.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass *R.-Breite* von  $\xi$  bezüglich  $e$  konstant ist, ist die, dass zwei Vektoren  $\xi_1 - \xi_2$  und  $e_1$  zueinander parallel sind.

(1) LEVI-CIVITA, loc. cit. p. 275.

(2) HIRAKAWA, J.: On the Relative Breath, Proceedings of the Physico-Math. Society of Japan, Vol. 17 (1935), p. 137.

Weiter kann man mit (I) den ähnlichen Satz in HIRAKAWAS Arbeit beweisen.<sup>(1)</sup>

Weiter definiert wir B:

$$(2) \quad \frac{(\xi_1 \rho_1 - \xi_2 \rho_2) \xi_1}{e_1 \rho \xi_1},$$

$$(3) \quad \frac{2\{(\xi_1 \rho - \xi_2 \rho_2) \xi\}}{\{(e_1 \rho_1 - e_2 \rho_2) \xi_1\}},$$

$$(4) \quad \frac{p(\varphi) \bar{\rho}\{\xi(\varphi)\} + p(\varphi + \pi) \bar{\rho}\{\xi(\varphi + \pi)\}}{q(\varphi) \bar{\rho}\{e(\varphi)\}},$$

$$(5) \quad \frac{p(\varphi) \bar{\rho}\{e(\varphi)\} + p(\varphi + \pi) \bar{\rho}\{e(\varphi + \pi)\}}{q(\varphi) \bar{\rho}(\varphi)},$$

$$(6) \quad \frac{p(\varphi) \bar{\rho}\{e(\varphi)\} + p(\varphi + \pi) \bar{\rho}\{e(\varphi + \pi)\}}{q(\varphi) \bar{\rho}\{e(\varphi)\} + q(\varphi + \pi) \bar{\rho}\{e(\varphi + \pi)\}}.$$

#### (IV)

Nehmen wir  $p(\varphi + \pi)$  anstatt  $q$  in SÜSS' Arbeit,<sup>(2)</sup> so ergibt sich

$$(1) \quad r = \frac{p(\varphi)}{p(\varphi + \pi)}, \quad \sigma = \int p(\varphi + \pi) ds \bar{\rho}\{p(\varphi + \pi)\},$$

$$\sqrt{\xi^2(s)} = \frac{1}{p(\varphi + \pi)}, \quad \frac{ds}{d\sigma} = \rho = \frac{\bar{\rho}\{p(\varphi)\}}{\rho\{p(\varphi + \pi)\}},$$

$$s = \int p(\varphi + \pi) ds \bar{\rho}\{p(\varphi)\},$$

$$2I\{p(\varphi)\} = \oint r ds = \oint r \rho dp(\varphi + \pi), \quad \text{u. s. w.}$$

und vier *R.-Breiten* werden:

$$(A) \quad \frac{p(\varphi) + p(\varphi + \pi)}{q(\varphi)} = \frac{p(\varphi)}{p(\varphi + \pi)} + 1,$$

(1) HIRAKAWA, I. c. pp. 138-144.

(2) SÜSS, W.: Zur Relativen Differentialgeometrie, I, Jap. Journ. of Math. Vol. IV (1927), p. 57.

$$(B) \quad \frac{p(\varphi)\bar{p}\{e(\varphi)\} + p(\varphi+\pi)\bar{p}\{e(\varphi+\pi)\}}{q(\varphi)\bar{p}\{e(\varphi)\}}$$

$$= \frac{p(\varphi)}{p(\varphi+\pi)} + \frac{\bar{p}(\varphi)}{\bar{p}(\varphi+\pi)},$$

$$(C) \quad \frac{p(\varphi) + p(\varphi+\pi)}{q(\varphi) + q(\varphi+\pi)} = 1,$$

$$(D) \quad \frac{2\{(\xi_1 - \xi_2)\xi_1\}}{\{(e_1 - e_2)\xi_1\}} = 2.$$

In unsrem Falle sind (C), (D) konstant. In der Mittelpunkt-kurve sind (A), (B) konstant.<sup>(1)</sup>

Aus (1) ergibt sich der

**Satz:** Wenn R.-Abstand konstant ist, so muss  $\xi$  die Mittelpunkt-kurve sein.

( V )

Aus HAYASHIS Arbeit<sup>(2)</sup> und DOUGLAS' Werk ergibt sich:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 k_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 k_1}{\partial y^2} = \frac{2}{k_2 - k_1} \left\{ \left( \frac{\partial k_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial k_1}{\partial y} \right)^2 \right\} + k_1 k_2 (k_2 - k_1),$$

wo

$$(2) \quad \frac{\eta}{V} = \frac{3}{4} (k_1 + k_2),$$

so folgt

$$\begin{aligned} (3) \quad & \frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\eta}{V} \right) - \frac{\partial^2 k_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 k_2}{\partial y^2} \\ &= \frac{2}{\frac{4}{3} \frac{\eta}{V} - 2k_1} \left\{ \left[ \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\eta}{V} \right) - \frac{\partial k_1}{\partial x} \right]^2 + \left( \frac{\partial k_1}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ &+ \left\{ \frac{4}{3} \frac{\eta}{V} - k_1 \right\} k_1 \left( \frac{4}{3} \frac{\eta}{V} - 2k_1 \right). \end{aligned}$$

(1) HIRAKAWA, J.: On the Relative Breath, Proceedings of the Physico-Math. Society of Japan, Vol. 17 (1935) p. 137.

(2) HAYASHI, T.: On a Theorem due to Prof. NAKAJIMA in the Theory of Surface, Tôhoku Math. Journ. 30 (1929) p. 430.

(3) besteht im Ursprung der Koordinaten, wo  $\gamma$ ,  $V$  in DOUGLAS' Werk<sup>(1)</sup> stehen.

# (VI)

$$(1) \quad L_i \equiv x \cos \phi_i + y \sin \phi_i - p_i = 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

bilden ein Dreieck ABC.

Mit

$$(2) \quad A \equiv \sum_1^3 a_i L_j L_k = 0, \quad B \equiv \sum_1^3 b_i L_j L_k = 0, \quad (i \neq j \neq k)$$

kann man zwei Kegelschnitt bezeichnen.<sup>(2)</sup>

So besteht

$$(3) \quad \frac{4 R_1 R_2 = \sum_1^3 a_i p_j \cos \phi_i \cdot \sum_1^3 b_i p_j \sin \phi_k}{\sum_1^3 a_i \sin \phi_j \sin \phi_k \cdot \sum_1^3 b_i \cos \phi_j \cos \phi_k} \equiv f(\phi_k, \phi_j)$$

wo  $R_i$  die Radien von Krümmung im Ursprung sind.

Aus (3) ergibt sich

$$(4) \quad 4 \left( \frac{dR_1}{ds_k} R_2 + \frac{dR_2}{ds_j} R_1 \right) = \frac{\partial f}{\partial \phi_k} \frac{d\phi_k}{ds_k} + \frac{\partial f}{\partial \phi_j} \frac{d\phi_j}{ds_j},$$

$$\text{d. h.} \quad 4 (\tan \varphi_1 \cdot R_2 + \tan \varphi_2 \cdot R_1) = \frac{\partial f}{\partial \phi_k} \frac{d\phi_k}{ds_k} + \frac{\partial f}{\partial \phi_j} \frac{d\phi_j}{ds_j}.$$

(4) ist die Bedingung dafür, dass zwischen  $\varphi_1, \varphi_2, R_1, R_2$  bestehen, wo  $\varphi_1, \varphi_2$  die Deviationen von A, B sind.

$ds_1, ds_2$  bedeuten Bogenelemente von A bzw. B.

# (VII)

Es ist wohlbekannt, dass, wenn algebraische Kurve  $n$ -ter Ordnung mit einer Geraden geschnitten wird, so im Schnittpunkt besteht.<sup>(3)</sup>

- (1) DOUGLAS, J.: A characteristic Property of Minimal Surface, American Math. Society Vol. XXXII, p. 635.
- (2) Vergl RAMLER, O. J.: Solution of GOORMAGHTIGHS Problem. American Math. Monthly, XXXVIII (1931,) p. 345.
- (3) REIS: Correspondence mathematique et physique de Quetelet, Vol. IX., p. 152.



$$(1) \quad \sum_1^n \frac{1}{\rho_i \cos^3 \theta_i} = 0.$$

Wenn  $\theta_i$  der Winkel von der Deviation ist, so folgt

$$(2) \quad \tan \theta_i = \frac{1}{3} \frac{d\rho_i}{ds}.$$

Aus (1), (2) ergibt sich

$$(3) \quad \sum_1^n \left[ \left( \frac{3}{\rho_i} \right)^3 + \left\{ \frac{d\rho_i}{ds} \right\}^3 \right]^{\frac{3}{2}} = 0.$$

### (VIII)

**Satz:** *Haben zwei Eiflächen im Punkt paralleler Normalen auch stets parallele Affin-Normalen, so sind sie homothetisch.*

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes über affin-parallele Eiflächen.

**Beweis:** Indem wir die Bezeichnungen in dem Buch von Blaschke anführen, erhalten wir für die beiden Flächen  $\mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{x}^*$ :

$$(1) \quad \xi = \xi^*, \quad \mathfrak{x} = \rho \mathfrak{x}^*, \quad \eta = \sigma^{-1} \eta^*.$$

Wegen

$$\eta \mathfrak{x} = \eta^* \mathfrak{x}^* = 1,$$

folgt sofort

$$\rho = \sigma.$$

Wegen des Parallelismus entsprechender Tangentenebenen, wegen

$$\eta_i = B_i^j \xi_j$$

folgt ferner aus

$$\eta_i = \rho_i \eta_i^* + \rho \eta_i^*,$$

$$\rho_i = 0.$$

Also ist

$$(2) \quad \rho = \sigma = \text{const.}$$

Bekanntlich ist nun

$$\mathfrak{x} = |k(\mathfrak{x})|^{-\frac{1}{2}} \cdot \xi,$$

wo  $k$  die GAUSZSCHE Krümmung bedeutet.

Also folgt aus (1) und (2)

$$(3) \quad \frac{k(\mathfrak{x}^*)}{k(\mathfrak{x})} = \text{const.} = \rho'.$$

Da aber nach MINKOWSKI eine Eifläche durch ihre GAUSZSCHE Krümmung bis auf die Translation eindeutig bestimmt ist, ist also  $\mathfrak{x}^*$  zu  $\mathfrak{x}$  homothetisch, w. z. b. w.

### (IX)

Wenn zwischen drei linear unabhängigen  $x_1, x_2, x_3$  einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1) \quad \mathfrak{x}_{uv} + \frac{\sigma}{\lambda} \mathfrak{x}_u + \frac{1}{\lambda} \delta v = 0,$$

wo

$$(2) \quad \sigma = \frac{GE_i - FG_u}{EG_u - FE_i}, \quad -\frac{1}{2}\lambda = \frac{EG - F^2}{E_i F - G_u E}$$

ist,<sup>(1)</sup> eine Beziehung

$$(3) \quad \mathfrak{x}^2 = U + V, \quad \{U = f(u), V = \varphi(v)\}$$

besteht, und wenn aus derselben durch Differenzieren die beiden Gleichungen

$$(4) \quad \begin{cases} \mathfrak{x}_u = \frac{U'}{2\xi} \\ \mathfrak{x}_v = \frac{V'}{2\xi} \end{cases}$$

(1) NAKAJIMA, S.: Über zwei Flächen, welche eine Beziehung haben, I, Tôhoku Math. Journ. Vol. 30 (1928) p. 142.

folgen, so besteht zwischen den  $x_i$  ausserdem noch die Gleichung

$$(5) \quad (x_u x_v) = \frac{(\sigma U' + V')}{2\lambda}$$

*Sind unsere Kurvenscharen zueinander senkrecht, so folgt*

$$(6) \quad \sigma = -\frac{V'}{U'}.$$

(X)

Nehmen wir anstatt (3)

$$(1) \quad x^2 = U \cdot V,$$

so folgt

$$(2) \quad \begin{cases} 2 x x_u = U' V, \\ 2 x x_v = U V', \end{cases}$$

daraus ergibt sich

$$(3) \quad (x_u x_v) = \frac{\sigma U' V + U V' + \lambda U V}{2\lambda}.$$

$$(4) \quad \sigma U' V + U V' + \lambda U' V' = 0$$

*ist die Bedingung dafür, dass unsere Kurvenscharen zueinander senkrecht sind.*

(XI)

Besteht  $x^2 = \frac{V}{U}$  anstatt (3), so folgt

$$(1) \quad \begin{cases} 2 x x_u = -\frac{U' V}{U^2}, \\ 2 x x_v = \frac{V' U}{U^2}, \end{cases}$$

so bekommt man

$$(2) \quad (\xi_u \xi_v) = \frac{V U - \sigma U' V - \lambda U' V'}{2 \lambda U^2}.$$

$$(3) \quad V' U = \sigma U' V + \lambda U' V'$$

*ist die Bedingung dafür, dass unsere Kurvenscharen zueinander senkrecht sind.*



# Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XIV)

Sôji MATSUMURA

Accepted for publication, June 24, 1935

( I )

Wenn die Kreise  $x^a(t)$ ,  $[a=I, II]$  senkrecht zur festen Kugel  $\alpha$  sind, so folgt

$$(1) \quad \alpha x^a = 0,$$

wo  $x^a$ ,  $\alpha$  die Kugeln in  $R_3$  sind.

Setzen wir

$$(2) \quad \alpha x^I + \beta x^{II} + \gamma \dot{x}^I + \delta \dot{x}^{II} + \varepsilon \alpha = 0,$$

wo  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  skalare Zahlen sind.

$$\text{Aus (2) folgt } \alpha(x^I \alpha) + \beta(x^{II} \alpha) + \gamma(\dot{x}^I \alpha) + \delta(\dot{x}^{II} \alpha) + \varepsilon(\alpha \alpha) = 0,$$

$$\text{d. h. } \varepsilon = 0,$$

also ergibt sich

$$(3) \quad \dot{x}^{II} = \mu x^I + \nu x^{II} + \sigma \dot{x}^I,$$

wo  $\mu, \nu, \delta$  skalare Zahlen sind.

Aus (3) folgt

$$(4) \quad (\dot{x}^{II} x^{II}) = \mu(x^I x^{II}) + \nu(x^{II} x^{II}) + \sigma(\dot{x}^I x^{II}),$$

$$\text{d. h. } 1 = \nu,$$

wenn  $x^I$  senkrecht zu  $x^{II}$  ist, so entsteht

$$(5) \quad \dot{x}^{II} = \mu x^I + x^{II} + \sigma \dot{x}^I$$

$$\text{d. h. } \dot{x}^{\text{II}} - \mu x^{\text{I}} = x^{\text{II}} + \sigma x^{\text{I}}$$

$$\text{d. h. } (6) \quad \text{Kreis } (\dot{x}^{\text{II}}, x^{\text{I}}) = \text{Kreis } (x^{\text{II}}, \dot{x}^{\text{I}}).$$

Sind  $\alpha$ ,  $x^{\text{I}}$ ,  $x^{\text{II}}$  zueinander senkrecht stehen, so besteht (6

( II )

Die Minimallinien (C) auf einer Kreisfläche sind

$$(1) \quad \begin{cases} (\theta_i \theta_t) dt + \{(\theta_i \theta_\tau) - iH\} d\tau = 0, \\ (\theta_i \theta_t) dt + \{(\theta_i \theta_\tau) + iH\} d\tau = 0, \end{cases}$$

wo

$$H = \sqrt{(\theta_i \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Sind  $\rho e^{i\phi}$ ,  $\rho e^{i\psi}$  zwei integrierende Faktoren von (1), so folgt

$$(2) \quad \begin{cases} \rho e^{i\phi} [(\theta_i \theta_t) dt + \{(\theta_i \theta_\tau) - iH\} d\tau] = dx + i dy, \\ \rho e^{-i\psi} [(\theta_i \theta_t) dt + \{(\theta_i \theta_\tau) + iH\} d\tau] = dx - i dy, \end{cases}$$

daraus ergibt sich

$$(3) \quad \begin{cases} dx = \rho [ \{(\theta_i \theta_t) dt + (\theta_i \theta_\tau) d\tau \} \cos \theta + H \sin \theta d\tau ], \\ dy = \rho [ \{(\theta_i \theta_t) dt + (\theta_i \theta_\tau) d\tau \} \sin \theta - H \cos \theta d\tau ], \\ ds^2 = \frac{1}{\rho^2 \cdot (\theta_i \theta_t)} (dx^2 + dy^2), \end{cases}$$

wo  $ds$  die Bogenlänge von (C) ist.

Die Integrabilitätsbedingung ist

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \rho \cdot (\theta_i \theta_t) \cos \phi \} = \frac{\partial}{\partial t} \{ \rho \cdot (\theta_i \theta_\tau) \cos \phi + \rho H \sin \phi \}, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \rho \cdot (\theta_i \theta_t) \sin \phi \} = \frac{\partial}{\partial t} \{ \rho \cdot (\theta_i \theta_\tau) \sin \phi - \rho H \cos \phi \}. \end{cases}$$

Aus (4) ergibt sich

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\rho_t}{\rho} H + H_t + (\theta_t \theta_\tau) \phi_\tau - (\theta_t \theta_\tau) \phi_t = 0, \\ \frac{\rho_\tau}{\rho} (\theta_t \theta_t) H + H \{ (\theta_t \theta_t)_\tau - (\theta_t \theta_\tau)_t - H \phi_t \} \\ \quad + (\theta_t \theta_\tau) [H_t + (\theta_t \theta_t) \phi_\tau - (\theta_t \theta_\tau) \phi_t] = 0, \end{cases}$$

wo

$$\rho_t = \frac{d\rho}{dt}, \quad \phi_\tau = \frac{d\phi}{d\tau} \text{ sind.}$$

Die Integrabilitätsbedingung von (5) in der Gleichung in  $\rho$  ist

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{H_t + (\theta_t \theta_t) \phi_\tau - (\theta_t \theta_\tau) \phi_t}{H} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{H \{ (\theta_t \theta_t)_\tau - (\theta_t \theta_\tau)_t - H \phi_t \} + (\theta_t \theta_\tau) \{ H_t + (\theta_t \theta_t) \phi_\tau - (\theta_t \theta_\tau) \phi_t \}}{(\theta_t \theta_t) H} \right] \end{aligned}$$

d. h.

$$(6) \quad 4_2 \phi = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \log \frac{(\theta_t \theta_t)}{H} - \frac{H}{(\theta_t \theta_t)} \frac{\partial}{\partial t} \frac{(\theta_t \theta_\tau)}{H} \right].$$

Ist  $\varphi$  eine Lösung von (6), so kann man finden  $\rho$  aus (5) und  $y$  aus (3), so ist  $y=c$  eine isothermische Familie; dies ist die allgemeine Lösung von  $dy=0$  oder

$$(7) \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{(\theta_t \theta_t)}{H \cot \varphi - (\theta_t \theta_\tau)}.$$

Bezeichnen wir mit  $(u)$ ,  $(v)$  die Kurven  $u=\text{const.}$  bzw.  $v=\text{const.}$  so folgt

$$(8) \quad \sin w = \frac{H}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau)}}, \quad \cos w = \frac{(\theta_t \theta_\tau)}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau)}}$$

wo  $w$ =Winkel zwischen  $(v)$  und  $(u)$ . Aus dem kleinen Dreieck  $(\tau)$ ,  $(t+dt)$ ,  $(c)$  ergibt sich so

$$\begin{aligned} (9) \quad & \frac{\sqrt{(\theta_\tau \theta_\tau)} d\tau}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)} dt} = \frac{\sqrt{(\theta_\tau \theta_\tau)}}{\sqrt{(\theta_t \theta_t)}} \alpha = \frac{\sin \varphi}{\sin(w-\varphi)} \\ &= \frac{\sqrt{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau)}}{H \cot \varphi - (\theta_t \theta_\tau)}, \end{aligned}$$



$$\text{d. h. (10)} \quad a = \frac{(\theta, \theta_t)}{H \cot \varphi - (\theta, \theta_\tau)},$$

$$(11) \quad \tan \varphi = \frac{Ha}{(\theta, \theta_t) + (\theta, \theta_\tau)a},$$

wo  $\varphi$  = Winkel zwischen  $(v)$  und  $(c)$ ,  $(c)$  ist  $\frac{d\tau}{dt} = a$ .

Vergleicht man (7) mit (11), so kann man wissen, dass die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass  $\frac{d\tau}{dt} = a$  isothermische Familie bezeichnet, die ist, dass<sup>(1)</sup>

$$\arctan \frac{Ha}{(\theta, \theta_t) + (\theta, \theta_\tau)a}$$

eine Lösung von (6) ist.

### (III)

Sind  $\xi$ ,  $\{(\xi\xi)=1\}$  die pentasphärischen Koordinaten der Schmiegungskugel im gewöhnlichen Sinne,<sup>(2)</sup> so sind

$$(1) \quad \frac{d\xi}{d\sigma}, \quad \left\{ \frac{d\xi}{d\sigma} \frac{d\xi}{d\sigma} \right\} = 1$$

die pentasphärischen Koordinaten derjenigen von THOMSEN so genannten Normalkugel, welche den Schmiegungskreis  $k$  in sich enthält und zur Kugel  $\xi$  senkrecht steht.

Nunmehr sind

$$(2) \quad \frac{d^2\xi}{d\sigma^2}$$

die pentasphärischen Koordinaten derjenigen Kugel, welche die Schmiegungskugel  $\xi$  im Kurvenpunkte

$$(3) \quad \chi(t), \quad \{ \chi\chi \} = 0, \quad (d\chi d\chi) = d^2$$

(1) WHITTEMORE, J. K.: The condition for an isothermal Family on a Surface, *Annals of Math.* 23. (1921-22) p. 52.

(2) TAKASU, T.: Ein neues Dualitätsprinzip bei den Kurven im konformen Raume, *Jap. Journ. of Math.* Vol. XI, p. 195.

von aussen berührt und also zur Normalkugel  $\frac{d\hat{\xi}}{d\sigma}$  senkrecht steht.

$\frac{d^2\hat{\xi}}{d\sigma^2}$  hat dieselbe Eigenschaft wie  $\frac{d\hat{\xi}}{d\sigma}$ .

$\frac{d^{4n+1}\hat{\xi}}{d\sigma^{4n+1}}$  hat auch dieselbe Eigenschaft wie  $\frac{d\hat{\xi}}{d\sigma}$ .

Man betrachte jetzt die folgenden Kugeln

$$(4) \quad \eta = \cos \alpha \cdot \hat{\xi} + \sin \alpha \cdot \frac{d^{4n+1}\hat{\xi}}{d\sigma^{4n+1}}.$$

$\eta$  in (4) hat dieselbe Eigenschaft wie  $\eta$  in THOMSSES Arbeit.<sup>(1)</sup>

Der Winkel  $\varphi$  zwischen zwei Kugeln  $\hat{\xi}$ ,  $\frac{d^{4n+1}\hat{\xi}}{d\sigma^{4n+1}}$  ist mit

$$(5) \quad \cos^2 \varphi = \left( \frac{d\hat{\xi}}{d\sigma} \frac{d^{4n+1}\hat{\xi}}{d\sigma^{4n+1}} \right)^2 = 1$$

gegeben, so folgt

$$(6) \quad \left( \frac{\alpha \hat{\xi}}{d\sigma} \frac{d^{4n+1}\hat{\xi}}{d\sigma^{4n+1}} \right) = 1.$$

Gleichfalls ergibt sich

$$(7) \quad \left( \hat{\xi} \frac{d^{4n+1}\hat{\xi}}{d\sigma^{4n+1}} \right) = 0,$$

$$(8) \quad \left( \frac{d^{4n+1}\hat{\xi}}{d\sigma^{4n+1}} \frac{d^{4n+3}\hat{\xi}}{d\sigma^{4n+3}} \right) = 1, \text{ und so weiter.}$$

Man betrachte eine Kugelschar (4).

Vier unendlich benachbarte Elemente der Kugelschar (4) bestimmen eine gemeinsame Orthogonalkugel

$$y = \left\| \eta \frac{d\eta}{d\alpha} \frac{d^2\eta}{d\alpha^2} \frac{d^3\eta}{d\alpha^3} \right\| :$$

$$\left( \left\| \eta \frac{d\eta}{d\alpha} \frac{d^2\eta}{d\alpha^2} \frac{d^3\eta}{d\alpha^3} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \{(yy)=1\}.$$

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV Bd. S. 132.

Die Kugel  $y$  ist die instantane absolute Kugel des N. E. Raumes.

## (IV)

Im folgenden wollen wir über die Strömung auf Kreisflächen untersuchen.<sup>(1)</sup>

Es sei  $\varphi(x, y, z)$  das Geschwindigkeitspotential der Bewegung, und auf der Kreisfläche, auf welcher die Bewegung stattfinden soll,<sup>(2)</sup> sei

$$(1) \quad \begin{cases} x=f_1(t, \tau), \\ y=f_2(t, \tau), \\ z=f_3(t, \tau), \end{cases}$$

so ist die Differentialgleichung für  $\varphi$

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{(\theta_i \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (\theta_i \theta_t) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}}{\sqrt{(\theta_i \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}} \right\} - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{(\theta_\tau \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (\theta_t \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}}{\sqrt{(\theta_i \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}} \right\} = 0.$$


## (V)

Mit  $\mathfrak{K}_s^\pi, [s=1, 2, \dots, m]$  kann man  $2^\infty$  Punkte in  $R_s$  bezeichnen, wo  $\mathfrak{K}_s^\pi$  die Kugeln in  $R_s$  sind.

Mit  $\mathfrak{K}_s^\pi, [s=1, 2, \dots]$  kann man  $2^\infty$  Punkte in  $R_\infty$  bezeichnen, wo  $\mathfrak{K}_s^\pi$  die Kugeln in  $R_s$  sind.

Mit  $\mathfrak{K}_s^\pi, [s=1, 2, \dots]$  kann man  $\infty$  Kreise in  $R_s$  bezeichnen, wo  $\mathfrak{K}_s^\pi$  die Kugeln in  $R_s$  sind.

Wir können zwei neue Kugeln

- 
- (1) REIFF, R.: Über stationäre Strömung auf krummen Flächen, Math. naturw. Mittel.  Verlag von Fues in Tübingen.  
 (2) KIRCHHOFFS: Monatsber. der Berl. Acad. 1875 oder Gesammelte Abh. p 56 u. ff.

$$(1) \quad \xi_a^* = \sum_{\beta=1}^n c_{\beta}^a \xi_{\beta}^*, \quad [a=I, II]$$

als Linearkombinationen der  $\xi^a$  einführen mit Koeffizienten  $c_{\beta}^a$  deren Determinante  $|c_{\beta}^a| \neq 0$  sein muss, wenn  $\xi_{\beta}^{*I}$  und  $\xi_{\beta}^{*II}$  einander nicht proportional werden sollen, und können dann ebensogut durch die  $\xi_{\beta}^*$  unsern Kreis darstellen, so sind wir imstande diesen Fall zu untersuchen wie in meiner Arbeit.<sup>(1)</sup>

## (VI)

Wir betrachten uns nun die Abbildungsbeziehungen<sup>(2)</sup>

$$(1) \quad \xi^I = \xi^I(t, \tau), \quad \xi^{II} = \xi^{II}(t, \tau).$$

Ferner wird für die Determinante

$$(2) \quad \begin{vmatrix} (\xi^I)_i & (\xi^{II})_i \\ (\xi^I)_k & (\xi^{II})_k \end{vmatrix} \quad (i, k=1, 2, 11, 12, \dots)$$

das Symbol

$$(3) \quad (i, k) = -(k, i)$$

angenommen, für das die Rechen- und Differentiationsregeln sofort aus der ursprünglichen Bedeutung abzuleiten sind, wo die partielle Differentiation nach  $t$  und  $\tau$  durch untere Indizes 1, bzw. 2 angedeutet wird.

Durch

$$(4) \quad \xi^I = \xi^I(t, \tau), \quad \xi^{II} = \xi^{II}(t, \tau)$$

werden der Kurve

$$\tau = \tau(t)$$

in der  $(t, \tau)$ -Kurve die Kurven

$$(5) \quad \xi^I = \xi^I\{t, \tau(t)\}, \quad \xi^{II} = \xi^{II}\{t, \tau(t)\}$$

in der  $(t, \tau)$ -Ebene zugeordnet.

- (1) NAKAJIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agr. Taihoku Imp. Univ. Vol. II, pp. 6-36.
- (2) NAKAJIMA, S.: Kugelgeometrie von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agr. Taihoku Imp. Univ. Vol. II (1929) p. 35.

Wenn einer zweigliedrigen Kurvenschar in der  $(t, \tau)$ -Ebene eindeutig die Gesamtheit der Geraden der  $(\xi^I, \xi^{II})$ -Ebene, d. h. der Kreisscharen zugeordnet sei, so folgt<sup>(1)</sup>

$$(6) \quad \begin{vmatrix} (\xi^I)' & (\xi^{II})' \\ (\xi^I)'' & (\xi^{II})'' \end{vmatrix} = 0 \quad (t \text{ ist Parameter}).$$

In diese Form der Differentialgleichung der Kreisscharen ist nunmehr einzuführen:

$$(7) \quad \begin{cases} (\xi^I)' = (\xi^I)_1 + (\xi^I)_2 \tau', \\ (\xi^{II})' = (\xi^{II})_1 + (\xi^{II})_2 \tau', \\ (\xi^I)'' = (\xi^I)_{11} + 2(\xi^I)_{12} \tau' + (\xi^I)_{22} (\tau')^2 + (\xi^I)_3 \tau', \\ (\xi^{II})'' = (\xi^{II})_{11} + 2(\xi^{II})_{12} \tau' + (\xi^{II})_{22} (\tau')^2 + (\xi^{II})_3 \tau', \end{cases}$$

woraus sich folgende Gleichung ergibt:

$$(8) \quad (1, 2) \tau'' + (2, 22) (\tau')^3 + [(1, 22) + 2(2, 12)] (\tau')^2 + [(2, 11) + 2(1, 12)] \tau' + (1, 11) = 0.$$

Diesen Bau musz eine Differentialgleichung

$$\tau'' = F(t, \tau, \tau')$$

haben, wenn ihre Integralkurven den Kreisscharen, d. h. den Geraden der  $(\xi^I, \xi^{II})$ -Ebene, entsprechen sollen.

(1) BERGER, K. H.: Kennzeichnung der äquivalenten Kurvensysteme, Math. Zeit. Bd. (1935) S. 42.

# On a Pair of Surfaces Mutually Related, I

Sôji MATSUMURA

(Accepted for publication, Aug. 20, 1935)

1. We consider here

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} + \frac{\sigma}{\lambda} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0$$

again,<sup>(1)</sup> when (2)  $(\xi\xi)=1$ , we get

$$(3) \quad (\xi_1 \xi') = \frac{1}{\lambda},$$

$$(4) \quad (\xi_1 \xi'') = \frac{1}{\sigma},$$

$$(5) \quad \lambda=1, \text{ when } (\xi_1 \xi')=1,$$

where

$$(6) \quad \xi_1 = \xi + \frac{\lambda}{\sigma} \xi_v,$$

$$(7) \quad \xi' = \frac{\xi}{\lambda},$$

$$(8) \quad \xi'' = \frac{\xi}{\sigma}, \left( \xi_v = \frac{\partial \xi}{\partial v} \right),$$

so we have the

**Theorem:** *The cosines of the angles between  $\xi_1$ ,  $\xi'$  and  $\xi_1$ ,  $\xi''$  are equal to  $\frac{1}{\lambda}$  resp.  $\frac{1}{\sigma}$ , and  $\lambda=1$  is the condition that  $\xi_1$ ,  $\xi'$  touches one another, in which case the surface  $\xi$  is always a sphere.*

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Vol. XV, No. 11, October, 1935.]

(1) S. MATSUMURA: On a Pair of Surfaces Mutually Related, Tôhoku Math. Journ. 37 (1934) p. 17.

2. When the inverse surface of the surface  $\xi'$  with respect to the sphere  $\xi$  is equal to  $\xi'$  then we have

$$(9) \quad \frac{\xi}{\sigma} = 2\left(\frac{\xi}{\lambda}, \xi\right)\xi - \frac{\xi}{\lambda}$$

$$\text{i. e.} \quad (10) \quad \lambda = \sigma.$$

(10) is the condition sought.

3. We consider the surface

$$(11) \quad \xi''' = e^{\frac{u}{\lambda} + \frac{\sigma}{\lambda}v} \cdot \xi.$$

Then we have

$$(12) \quad (\xi'')_{uv} = 0,$$

so  $\xi'''$  is a surface of Translation.

4. We can easily show that

$$(13) \quad (\xi''\xi_1) = \exp\left(-\frac{u}{\lambda} + \frac{\sigma}{\lambda}v\right) \cdot \left\{(\xi\xi) + \frac{\sigma}{\lambda}(\xi\xi_v)\right\}.$$

When  $(\xi\xi)=1$ ,  $(\xi\xi_1)=1$ , then, from (13), we have

$$(14) \quad 1 = \exp\left(\frac{u}{\lambda} + \frac{\sigma}{\lambda}v\right),$$

$$\text{i. e.} \quad (15) \quad \xi''' = \xi,$$

so we have the

**Theorem:** When  $\xi$  is a sphere, and  $\xi'''$ ,  $\xi_1$  touch each other, then  $\xi$  coincides with  $\xi'''$ .

5. We consider two surfaces

$$(16) \quad \bar{\xi}_u = \sigma \xi_u,$$

$$(17) \quad \bar{\xi}_v = \lambda \xi_v,$$

then from (16), (17) we have

$$(18) \quad (\sigma - \lambda)\xi_{uv} + \sigma_v \xi_u - \lambda_u \xi_v = 0.$$

From (1), (18) we have

$$(19) \quad \frac{\sigma_v}{\sigma - \lambda} = \frac{\sigma}{\lambda}, \quad -\frac{\lambda_u}{\sigma - \lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{i. e.} \quad (20) \quad -\frac{\sigma_v}{\lambda_u} = \sigma \quad \text{or} \quad (21) \quad \sigma = \frac{1}{\exp. \int \lambda_u dv} + \text{const.}$$

**Theorem :** When (1), (16), (17) exist, then we have (21).

6. When  $\eta$  is the inverse surface of  $\xi'''$  with respect to the sphere  $\xi$ , then

$$(22) \quad \eta = -2 \left( \exp. \left\{ \frac{u}{\lambda} + \frac{\sigma}{\lambda} v \right\} \xi, \xi \right) \xi + \exp. \left( \frac{u}{\lambda} + \frac{\sigma}{\lambda} v \right) \xi,$$

so we have

$$(23)$$

$$\begin{aligned} (\eta \xi_1) = & -2 \left( \exp. \left\{ \frac{u}{\lambda} + \frac{\sigma}{\lambda} v \right\} \xi, \xi \left( (\xi \xi) + \exp. \left( \frac{u}{\lambda} + \frac{\sigma}{\lambda} v \right) (\xi \xi) \right) \right. \\ & \left. - 2 \left( \exp. \left\{ \frac{u}{\lambda} + \frac{\sigma}{\lambda} v \right\} \xi, \xi \right) \frac{\sigma}{\lambda} (\xi \xi_v) + \exp. \left( \frac{u}{\lambda} + \frac{\sigma}{\lambda} v \right) \frac{\sigma}{\lambda} (\xi \xi) \right). \end{aligned}$$

If we put  $(\xi \xi) = 1$ ,  $(\xi \xi) = 1$  in (23), then

$$(24) \quad (\eta \xi_1) = \exp. \left\{ \frac{u}{\lambda} + \frac{\sigma}{\lambda} v \right\},$$

so we have the

**Theorem :** When  $\xi$ ,  $\xi$  are spheres and touch each other, then the cosine of the angle between  $\eta$ ,  $\xi_1$  is (24).

7. The equation of the affine moulding surface may be expressed in the form<sup>(2)</sup>

$$(25) \quad \begin{cases} x = v, \\ y = e^{-\int \sigma dv} \left( \int \eta \phi e^{\int \sigma dv} dv + U_2 \right), \\ z = e^{-\int \sigma dv} \left( \int \zeta \phi e^{\int \sigma dv} dv + U_3 \right). \end{cases}$$

The surface obtained by reciprocal polar with respect to the

(2) B. SU: On the theory of surfaces in the affine space, Jap. Journ. of Math. vol. 1928, p. 204.



unite sphere from the surface  $(x, y, z)$  is given by the surface  $(X, Y, Z)$  where  $X, Y, Z$  are the solutions of the equation:

$$(26) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \left( \frac{H_v}{H} - \frac{V'}{V} \right) \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{H_u}{H} \frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

When the surface with coordinates  $(X, Y, Z)$  is the central one of another surface, in other words, when (1) and (26) coincide, then

$$(27) \quad \frac{H_v}{H} - \frac{V'}{V} = \frac{\sigma}{\lambda}, \quad \frac{H_u}{H} = \frac{1}{\lambda},$$

where

$$(28) \quad \sigma = \frac{GE_v - FG_u}{EG_u - FE_v}, \quad \frac{1}{2}\lambda = \frac{EG - F^2}{E_v F - G_v E},$$

$$E = \sum \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2, \quad F = \sum \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right), \quad G = \sum \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2,$$

$$X = \frac{1}{H} \begin{vmatrix} y_u z_u \\ y_v z_v \end{vmatrix}, \quad Y = \frac{1}{H} \begin{vmatrix} z_u x_u \\ z_v x_v \end{vmatrix}, \quad Z = \begin{vmatrix} x_u y_u \\ x_v y_v \end{vmatrix},$$

$$H = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

From (27) we get

$$(29) \quad H = \exp. \left( \int \frac{1}{\lambda} du \right), \quad \phi = \frac{\sigma - 1}{\lambda}.$$

If we put (29) in (25) we have

$$(30) \quad \begin{cases} x = v, \\ y = e^{-\int \frac{\sigma-1}{\lambda} dv} \left( \int \eta \phi e^{\int \frac{\sigma-1}{\lambda} dv} dv + U_2 \right), \\ z = e^{-\int \frac{\sigma-1}{\lambda} dv} \left( \int \zeta \phi e^{\int \frac{\sigma-1}{\lambda} dv} dv + U_3 \right) \end{cases}$$

(30) is the equation, which is the equation sought.

8. We have in affine Geometry

$$(31) \quad \tilde{\xi}_u = -\frac{1}{R_1} \xi_u, \quad \tilde{\xi}_v = -\frac{1}{R_2} \xi_v,$$

where  $\bar{x}$  is the affine surface-normal vector and  $u, v = \text{const.}$  are the affine lines of curvature.

From (31) we have

$$(32) \quad \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \bar{x}_{uv} + \left(\frac{1}{R_1}\right)_v \bar{x}_u - \left(\frac{1}{R_2}\right)_u \bar{x}_v = 0.$$

When (32) is the contral surface of a surface, in other words, (1) and (32) coincide, then we have

$$(33) \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{R_1}\right)_v - \frac{1}{R_2} = \frac{\sigma}{\lambda}, \\ -\left(\frac{1}{R_2}\right)_u - \frac{1}{R_1} = \frac{1}{\lambda}, \end{cases}$$

so

$$(34) \quad \begin{cases} \sigma = -\frac{\left(\frac{1}{R_1}\right)_v}{\left(\frac{1}{R_2}\right)_u}, \\ \lambda = -\frac{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}{\left(\frac{1}{R_2}\right)_u}, \end{cases}$$

where  $\sigma$  and  $\lambda$  must be calculated from the equation of the surface  $\bar{x}$ .

9. We consider two Laplace transforms  $S_1, S_{-1}$  of  $\bar{x}$  in (1), then the equations of  $S_1$  and  $S_{-1}$  are respectively

$$(35) \quad \bar{x}_1 = \bar{x} + \frac{\lambda}{\sigma} \bar{x}_v,$$

$$(36) \quad \bar{x}_{-1} \bar{x} = \bar{x} + \lambda \bar{x}_u.$$

From (35) and (36) follow

$$(37) \quad (\xi_i \xi_{-i}) = (\xi \xi) + \frac{\lambda}{\sigma} (\xi \xi_v) + \lambda (\xi \xi_u) + \frac{\lambda^2}{\sigma} (\xi_u \xi_v).$$

When  $\xi$  is a sphere, then  $(\xi \xi) = 1$ , so we have

$$(38) \quad (\xi_i \xi_{-i}) = 1,$$

because we can put

$$(\xi_u \xi_v) = 0.$$

So we have the

**Theorem:** *The two Laplace transforms of a sphere touch each other.*

10. Two surfaces  $\xi$  and  $\bar{\xi}$  are said to be associated if the planes at corresponding points parallel, and to the asymptotic lines of either surface there corresponds a conjugate system on the other. Then we have

$$(39) \quad \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u} = e^{-2\tau} \frac{\partial \xi}{\partial u}, \quad \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial v} = -e^{-2\tau} \frac{\partial \xi}{\partial v},$$

and (1) becomes

$$(40) \quad \xi_{uu} + \frac{\sigma}{\lambda} \xi_u + \frac{1}{\lambda} \xi_v = 0,$$

where

$$(41) \quad \lambda = -\{\varphi_u\}^{-1}, \quad \sigma = \varphi_v \cdot \{\varphi_u\}^{-1}.$$

Put (41) in (3), (4), so we get<sup>(3)</sup>

$$(42) \quad (\xi_i \xi') = -\varphi_u,$$

$$(43) \quad (\xi_i \xi'') = \varphi_u \cdot \{\varphi_v\}^{-1}.$$

So we have the

**Theorem:** *In this case the cosines of the angles between  $\xi_1$ ,  $\xi'$ ;  $\xi_1$ ,  $\xi''$  are respectively (42) and (43), when  $\xi$  is a sphere.*

(3) J. M. STETSON: Conjugate Systems of curves, Annals of Math. 19 (1917-18) p. 112.

11. Next we consider Voss-surface<sup>(4)</sup>  $\bar{x}$ ,

$$(44) \quad -\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v} + \frac{w_v}{\sin w} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \frac{w_u}{\sin w} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = 0,$$

so the LAPLACE transform  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_{-1}$  of  $\bar{x}$  are

$$(45) \quad \bar{x}_1 = \bar{x} + \frac{\sin w}{w_v} \bar{x}_v,$$

$$(46) \quad \bar{x}_{-1} = \bar{x} + \frac{\sin w}{w_u} \bar{x}_u.$$

From this it follows that the coordinates  $\bar{\bar{x}}$  of the mean point of (45), (46) is

$$(47) \quad \bar{\bar{x}} = \bar{x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{x}_v}{w_v} + \frac{\bar{x}_u}{w_u} \right) \sin w,$$

so we have

$$(48) \quad \begin{aligned} \sum \bar{\bar{x}}^2 = \sum \bar{x}^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\bar{x}_v}{w_v} + \frac{\bar{x}_u}{w_u} \right)^2 \sin^2 w, \\ + \left( \frac{\bar{x}_v}{w_v} + \frac{\bar{x}_u}{w_u} \right) \bar{x} \sin w, \end{aligned}$$

when  $\bar{x}^2 = 1$ ,

$$(49) \quad \sum \bar{\bar{x}}^2 = 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{G}{w_v^2} + \frac{E}{w_u^2} + \frac{2F}{w_u w_v} \right) \sin^2 w,$$

where E, F, G curve first fundamental quantities of  $\bar{x}$ .

When the parameter lines upon  $\sum \bar{x}^2 = 1$  form an orthogonal system,  $F=0$ ; we have

$$(50) \quad \sum \bar{\bar{x}}^2 = 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{G}{w_v^2} + \frac{E}{w_u^2} \right) \sin^2 w.$$

When  $\sum \bar{\bar{x}}^2 = \text{const.}$ ,

$$(51) \quad \left( \frac{G}{w_v^2} + \frac{E}{w_u^2} \right) \sin^2 w = \text{const.}$$

(4) J. B. DILLER.: Über die den Enneperschen Flächen konstanten negativen Krümmungsmaszes entsprechenden Voss's Flächen, Würzburg (1913).

From (51) follows the **Theorem** :

*When a VOSS-surface is a sphere and the locus of the mean points (45), (46) is also a sphere. Then follows (51).*

The condition that  $\xi$  may have equal invariant is

$$(52) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{w_v}{\sin w} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{w_u}{\sin w} \right).$$

The tangent to each system of parametric curves on a surface forms congruences of RIBAUCOUR when the point equation is

$$(53) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + U_1 V_1' \frac{\partial \theta}{\partial u} + U_1' V_1 \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

where  $U_1$  and  $V_1$  are functions of  $u$  and  $v$ , respectively, and the accents indicate differentiation.

When (44) and (53) are indentially equal, then

$$(54) \quad \frac{w_u}{w_v} = \frac{\frac{U_1'}{U_1}}{\frac{V_1'}{V_1}}$$

So we get the

**Theorem** :<sup>(5)</sup> *The tangent to each system of parametric curves on a VOSS-surface  $\xi$  in (44) forms congruences of Ribaucour, then we have (54).*

Or we have the following

**Theorem** : *A necessary and sufficient condition that the tangents to the curve  $v = \text{const.}$  on a VOSS-surface, whose equation is (44), shall form a congruence of RIBAUCOUR is*

$$(55) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{w_v}{\sin w} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{w_u}{\sin w} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \log \frac{w_u}{\sin w} \right) = 0.$$

---

(5) L. P. EISENHART: *A treatise on the differential Geo. of curves and surfaces* 1909 p. 424.

We now get immediately the next **Theorem** :

*When in the point equation of a VOSS-surface (44)  $-\frac{w_v}{\sin w}$  or  $\frac{w_u}{\sin w}$  is zero, in other words, when  $w$  is a function of  $u$  or  $v$  alone, then the coordinates of the VOSS-surface can be found by quadratures.*

When  $\xi$  is a curve then we get<sup>(6)</sup>

$$(56) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\sin w}{w_u} \right) = \frac{w_v}{w_u}.$$

The condition that  $\xi_{-1}$  be a curve is<sup>(7)</sup>

$$(57) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\sin w}{w_v} \right) = \frac{w_u}{w_v}.$$

The function  $h$  and  $k$  defined by

$$(58) \quad h = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{w_v}{\sin w} \right) + \frac{w_u w_v}{\sin^2 w},$$

$$K = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{w_u}{\sin w} \right) + \frac{w_u w_v}{\sin^2 w}$$

are called the invariants of (44).

*When  $w$  is constant in (44), then  $\xi$  is a surface of translation.*

By DARBOUX<sup>(8)</sup> we know that when we can find one solution of

$$(59) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} - \frac{w_v}{\sin w} \frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{w_u}{\sin w} \frac{\partial \phi}{\partial v} - \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{w_v}{\sin w} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{w_u}{\sin w} \right) \right\} \phi = 0,$$

then by simple integration we can easily find the congruence which is conjugate to the parametric system.<sup>(9)</sup>

Then we can easily reduce the following

(6) I. c. (5) p. 411.

(7) I. c. (5) p. 405.

(8) Lecon, vol. 2, p. 225.

(9) S. NAKAJIMA: Über zwei Flächen, die eine Beziehung haben (III), Tôhoku Math. Journ. vol. 33 (1930) p. 160.

**Theorem :** *In order that the curves of both families*

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}$$

*be congruences of RIBAUCCOURS it is necessary that*

$$(60) \quad \frac{w_u \cdot w_v}{\sin^2 w} = UV,$$

*where U is a function of u alone and V of v alone.*<sup>(10)</sup>

From (45). (46) we get

$$(61) \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial v} = \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\sin w}{w_u} \right) - \frac{w_v}{w_u} \right\} \frac{\partial \xi}{\partial u}$$

and

$$(62) \quad \frac{\partial \xi_{-1}}{\partial u} = \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\sin w}{w_v} \right) - \frac{w_u}{w_v} \right\} \frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

From (45) and (46) it is seen that the surface  $\xi_1$  or  $\xi_{-1}$  is at infinity, according as

$$(63) \quad \frac{w_u}{\sin w}$$

or

$$(64) \quad \frac{w_v}{\sin w}$$

is zero.<sup>(11)</sup>

Also since we know that the tangent to the curves

$$v = \text{const.}$$

are to form a congruence of RIBAUCCOUR, we must have

$$(65) \quad \frac{\sin w}{w_v},$$

where U and V are arbitrary functions of  $u$  and  $v$  respectively.<sup>(12)</sup>

(10) S. MATSUMURA: On a Pair of Surfaces Mutually Related, Tôhoku Math. Journ. vol. 39 (1934) p. 19.

(11) I. c. (5) p. 405.

(12) I. c. (10) p. 21.

Put

$$(66) \quad \xi' = \frac{\xi}{\lambda},$$

the coordinates  $x', y', z'$  of  $\xi'$  will then satisfy the equation

$$(67) \quad \frac{\partial^2 \theta'}{\partial u \partial v} = \left( \frac{w_v}{\sin w} - \frac{\partial}{\partial v} \log \lambda \right) \frac{\partial \theta'}{\partial u} \\ + \left( \frac{w_u}{\sin w} - \frac{\partial}{\partial u} \log \lambda \right) \frac{\partial \theta'}{\partial v}.$$

The coordinates of  $\xi_1$ , the LAPLACE transform of  $\xi'$ , are given by equations of the form

$$(68) \quad \xi_1 = \xi' - \frac{1}{\frac{w_v}{\sin w} - \frac{\partial}{\partial v} \log \lambda} \frac{\partial \xi'}{\partial v} \\ = \frac{\xi}{\lambda} - \frac{\lambda \frac{\partial \xi}{\partial v} - \xi \frac{\partial \lambda}{\partial v}}{\left( \frac{w_v}{\sin w} - \frac{\partial}{\partial v} \log \lambda \right) \lambda^2} = \frac{\xi_1}{\lambda_1},$$

where

$$(69) \quad \lambda_1 = \lambda - \frac{\sin w}{w_v} \frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

LEVY<sup>(13)</sup> has shown that every surface  $\bar{\xi}$  which is cut in a conjugate system by the developables of the congruence of tangents to the curves

$$u = \text{const.}$$

of a conjugate system  $\bar{\xi}$  has the coordinates

$$(70) \quad \bar{\xi} = \xi - \frac{\mu}{\frac{\partial \mu}{\partial \eta}} \frac{\partial \xi}{\partial v},$$

where  $\mu$  is a solution of the LAPLACE equation (44) satisfied by  $\xi$ .

(13) "Sur quelques équations linéaires aux dérivées partielles," Journal de l'École Polytechnique, cahier 56 (1883), p. 77. Cf. also Darboux, Leçons, vol. 2, chap. X.



In the same way, surface  $\bar{S}_{-1}$  which is cut in a conjugate system by the developables of the congruence of tangents to the curves

$$v = \text{const.}$$

of  $\bar{x}$  have coordinates

$$(71) \quad \bar{x}_{-1} = \bar{x} - \frac{\mu}{\frac{\partial \mu}{\partial u}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}.$$

If we take  $\mu_1$  defined by<sup>(14)</sup>

$$(72) \quad \begin{aligned} \mu_1 &= \mu - \frac{\sin w}{w_v} \frac{\partial \mu}{\partial v}, \\ \left| \frac{\partial \mu_1}{\partial u} = \frac{\sin w}{w_v} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \log \left( -\frac{w_v}{\sin w} \right) - \frac{w_u}{\sin w} \right\} \frac{\partial \mu}{\partial v}, \right. \end{aligned}$$

so that  $\mu_1$  is the Laplace transform of  $\mu$ , then

$$(73) \quad \bar{x} = \bar{x} - \frac{\mu}{\frac{\partial \mu}{\partial v}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \bar{x}_1 - \frac{\mu_1}{\frac{\partial \mu_1}{\partial u}} \frac{\partial \mu_1}{\partial u},$$

and by the theorem of LEVY the coordinates of  $\bar{x}_1$ , the Laplace transform of  $\bar{x}$ , are given by

$$(74) \quad \bar{x}_1 = \bar{x}_1 - \frac{\mu_1}{\frac{\partial \mu_1}{\partial v}} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial v}.$$

In like manner we get

$$(75) \quad \begin{aligned} \bar{x}_{-1} &= \bar{x} - \frac{\mu}{\frac{\partial \mu}{\partial u}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \bar{x}_{-1} - \frac{\mu_{-1}}{\frac{\partial \mu_{-1}}{\partial v}} \frac{\partial \bar{x}_{-1}}{\partial v}, \\ \bar{x}_{-2} &= \bar{x}_{-1} - \frac{\mu_{-1}}{\frac{\partial \mu_{-1}}{\partial u}} \frac{\partial \bar{x}_{-1}}{\partial u}. \end{aligned}$$

Conjugate systems whose LAPLACE transforms in both senses are

lines of curvature have been studied by GUICHARD<sup>(15)</sup> and CALAPSO.<sup>(16)</sup> It is found that if (44) is the LAPLACE equation of the original conjugate system  $\xi$ , the fundamental quantities of the first order,  $E$  and  $G$ , of the surface  $\xi$ , are given by

$$(76) \quad E = e^{2\psi} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2, \quad G = e^{2\psi} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2,$$

where  $\varphi$  and  $\psi$  satisfy the equations

$$(77) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{w_v}{\sin w}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u} = -\frac{w_u}{\sin w}.$$

Conversely, any conjugate system for which  $E$  and  $G$  are so related to the coefficients of the LAPLACE equation has lines of curvature for its LAPLACE transforms.

If the LAPLACE transforms,  $\xi_1$  and  $\xi_{-1}$ , of any conjugate system  $\xi$  which satisfies the LAPLACE equation (44) are lines of curvature,  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$  is a solution of the LAPLACE equation of  $\xi_1$ , and  $x_{-1}^2 + y_{-1}^2 + z_{-1}^2$  is a solution of the LAPLACE equation of  $\xi_{-1}$ .

There must then be a solution  $\lambda$  of (44) whose LAPLACE transform  $\lambda_1$  is  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ , and a solution  $\mu$  whose LAPLACE transform  $\mu_{-1}$  is  $x_{-1}^2 + y_{-1}^2 + z_{-1}^2$ .

We have

$$(78) \quad \lambda_1 = \lambda + \frac{\sin w}{w_v} \frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

Differentiating and remembering that  $\lambda$  is a solution of (44), we have

$$(79) \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial u} = - \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{w_v}{\sin w} \right) + \frac{w_u w_v}{\sin^2 w} \right\} \frac{\sin^2 w}{w_v^2} \frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

Let the point  $M$ , whose coordinates  $x, y, z$ , lie on  $\xi$ , and let  $M_1$  and  $M_{-1}$  be the corresponding point on  $\xi_1$  and  $\xi_{-1}$  and  $\Sigma_1, \Sigma_2$  are

(15) "Sur les réseaux qui, par la méthode de Laplace, se transforment des deux côtés en réseaux orthogonaux," *Comptes Rendus*, vol. 132, 1901, p. 249.

(16) "Un problema sui sistemi di linee fra loro conjugate e sulle relative trasformazioni di Laplace," *Annali di Matematica*, serie III, tomo XIII (1907), p. 203.

the LAPLACE transforms of a single conjugate system, then the equation of the normal plane to the curve  $v=\text{const.}$  on  $\Sigma_2$  is

$$(80) \quad \Sigma \left( X - x - \frac{\sin w}{w_v} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

or

$$(81) \quad \Sigma X \frac{\partial x}{\partial v} - \Sigma x \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\sin w}{w_v} G = 0.$$

For convenience we denote the left-hand side of this equation by  $k$ . The polar lines are now given by the equations<sup>(17)</sup>

$$(82) \quad K=0, \quad K_u=0,$$

where

$$(83) \quad \begin{aligned} K_u = & -\Sigma X \left( \frac{w_v}{\sin w} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{w_u}{\sin w} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \\ & + \Sigma x \left( \frac{w_v}{\sin w} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{w_u}{\sin w} \frac{\partial x}{\partial v} \right) - F \\ & - \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\sin w}{w_v} + G \frac{\sin w}{w_v} - \frac{\partial}{\partial u} \log \left( -\frac{w_v}{\sin w} \right). \end{aligned}$$

Similarly, the polar lines of the curves  $u=\text{const.}$  on  $\Sigma_1$  are given by the equations

$$L=0, \quad L_v=0,$$

where

$$(84) \quad L = \Sigma X \frac{\partial x}{\partial u} - \Sigma x \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\sin w}{w_u} E$$

and

$$(85) \quad \begin{aligned} L_v = & -\Sigma X \left( \frac{w_v}{\sin w} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{w_u}{\sin w} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \\ & + \Sigma x \left( \frac{w_v}{\sin w} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{w_u}{\sin w} \frac{\partial x}{\partial v} \right) - F \\ & - \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\sin w}{w_u} + \frac{E \cdot \sin w}{w_u} - \frac{\partial}{\partial v} \left( -\frac{w_u}{\sin w} \right) \end{aligned}$$

(17) I. c. (3), p. 125.

If the polar lines coincide, the plane  $K_u=0$  and  $L_v=0$  must both belong to the pencil  $kK+lL=0$ .

Now  $K_u=0$  can be written in the form

$$(86) \quad -\frac{w_v}{\sin w} K - \frac{w_u}{\sin w} L - F - \frac{\sin w}{w_v} \frac{\partial G}{\partial u} \\ + \frac{\sin w}{w_v} G \frac{\partial}{\partial u} \log \left( -\frac{w_v}{\sin w} \right) - \frac{w_i}{w_u} E - \frac{w_u}{w_v} G = 0.$$

If it is in the pencil, we must have

$$(87) \quad F + \frac{\sin w}{w_v} \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\sin w}{w_v} G \frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{w_i}{\sin w} \right) \\ + \frac{w_i}{w_u} E + \frac{w_u}{w_i} G = 0.$$

Similarly, if  $L_v=0$  is in the pencil, we must have

$$(88) \quad F + \frac{\sin w}{w_u} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\sin w}{w_u} E \frac{\partial}{\partial v} \log \left( -\frac{w_u}{\sin w} \right) \\ + \frac{w_i}{w_u} E + \frac{w_u}{w_i} G = 0.$$

On account of the identities

$$(89) \quad -\frac{w_v}{\sin w} F - \frac{w_u}{\sin w} G = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u},$$

$$(90) \quad -\frac{w_i}{\sin w} E - \frac{w_u}{\sin w} F = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}$$

(87) and (88) become

$$(91) \quad -\frac{\sin w}{2 w_i} \frac{\partial G}{\partial u} = -\frac{\sin w \cdot G}{w_i} \frac{\partial}{\partial u} \left( \log \left\{ -\frac{w_v}{\sin w} \right\} \right) \\ + \frac{w_v}{w_u} E,$$

$$(92) \quad -\frac{\sin w}{2 w_u} \frac{\partial E}{\partial v} = -\frac{\sin w \cdot E}{w_u} \frac{\partial}{\partial v} \left( \log \left\{ -\frac{w_u}{\sin w} \right\} \right) \\ + \frac{w_u}{w_v} G.$$

The condition  $MM_1 = MM_{-1}$  gives the relation

$$(93) \quad \frac{E}{w_u^2} = \frac{G}{w_v^2}.$$

In consequence of this relation, equations (91) and (92) become

$$(94) \quad \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{G} = \frac{\partial}{\partial u} \log \left( -\frac{w_v}{\sin w} \right) - \frac{w_u}{\sin w},$$

$$(95) \quad \frac{\partial}{\partial v} \log \sqrt{E} = \frac{\partial}{\partial v} \log \left( -\frac{w_u}{\sin w} \right) - \frac{w_v}{\sin w}.$$

Hence we can put

$$(96) \quad -\frac{w_v}{\sin w} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad -\frac{w_u}{\sin w} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

Now equations (94) and (9d) give

$$(97) \quad G = \frac{w_v^2}{\sin^2 w} e^{2\varphi} \cdot V,$$

$$(98) \quad E = \frac{w_u^2}{\sin^2 w} e^{2\varphi} \cdot U,$$

where  $U$  is a function of  $u$  alone, and  $V$  of  $v$  alone.

Equation (93) shows that, without loss of generality, we have  $U=V=1$ , and obtain

$$(99) \quad E = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 e^{2\varphi}, \quad G = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 e^{2\varphi},$$

while equation (44) becomes

$$(100) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

The parametric curves on  $\mathfrak{z}$  therefore form a conjugate system  $G$ .

Also we have the **Theorem**:<sup>(18)</sup>

*A necessary and sufficient condition is that, if the parametric curves*

(18) P. J. FEDERICO: Conjugate lines on a Surface, American Math. Monthly, 35 (1929), p. 79.

are conjugate, and one family of circumscribing developables be a family of cylinders, then either

$$\frac{w_v}{\sin w}$$

or

$$\frac{w_u}{\sin w}$$

is zero, i. e.  $w=U$  or  $w=V$ .

When

$$(101) \quad \frac{w_v}{\sin w} = \frac{V'}{U+V}, \quad \frac{w_u}{\sin w} = \frac{U'}{U+V},$$

then<sup>(19)</sup>  $x, y, z$  in (44):

$$(102) \quad x = \frac{U_1 + V_1}{U+V}, \quad y = \frac{U_2 + V_2}{U+V}, \quad z = \frac{U_3 + V_3}{U+V}$$

If in (44)

$$w_u = 0, \text{ i. e. } w = f(v),$$

then<sup>(20)</sup>

$$x = \int U_1 e^{-\int \frac{w_v}{\sin w} dv} du + V_1,$$

$$y = \int U_2 e^{-\int \frac{w_v}{\sin w} dv} du + V_2,$$

$$z = \int U_3 e^{-\int \frac{w_v}{\sin w} dv} du + V_3.$$

If

$$w_v = 0, \quad \frac{w_u}{\sin w} = f(u),$$

then the equations of the surface are of the form<sup>(21)</sup>

(19) l. c. (17) p. 81.

(20) l. c. (17) p. 79.

(21) DARBOUX, Vol. I, (2nd ed., 1914), pp. 181-184.

$$x = \phi(u) [U_1 + V_1 + V'],$$

$$y = \phi(u) [U_2 + V_2],$$

$$z = \phi(u) [U_3 + V_3], \quad \phi(u) = e^{-\int \frac{w_v}{\sin u} du}$$

12. We consider

$$(103) \quad \xi_{uv} + \frac{\sigma}{\lambda} \xi_u + \frac{1}{\lambda} \xi_v = 0.$$

Draw Normals  $X$  through  $\xi$ , then we get<sup>(22)</sup>

$$(104) \quad X_i \xi_u = X_u \xi_v.$$

From (103), (104) we have

$$(105) \quad \lambda (\sigma X_u - X_v) \xi_{uv} + \sigma^2 X_u \xi_u - X_v \xi_v = 0.$$

The condition that the point equation of (105) may have equal invariants is

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\sigma^2 X_u}{\lambda (\sigma X_u - X_v)} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{X_v}{\lambda (\sigma X_u - X_v)} \right) = 0.$$

# Über Flächen und Kurven (XV): Einige Bemerkungen zu Kurven und Flächen

Sôji MATSUMURA

(Accepted for publication, October 14, 1935)

( 1 )

**Satz:** *Haben zwei Eiflächen in  $(n+1)$ -dimensionalen Räumen in Punkten paralleler Normalen auch stets parallele Affin-Normalen, so sind sie homothetisch.<sup>(1)</sup>*

**Beweis:** Indem wir die Bezeichnungen aus dem Buch von Blaschke übernehmen, erhalten wir für die beiden Flächen  $\xi$  und  $\xi^*$ :

$$(1) \quad \xi = \xi^*, \quad \mathfrak{X} = \rho \mathfrak{X}^*, \quad \sigma \eta = \eta^*.$$

Wegen  $\eta \mathfrak{X} = \eta^* \mathfrak{X}^* = 1$  erhält man  $\rho = \sigma$  ohne weiters.

Wegen des Parallelismus entsprechender Tangentenebenen und wegen  $\eta_i = B'_i \xi_i$  - aus  $\eta_i = \rho_i \eta^* + \rho \eta^*$  folgt  $\rho_i = 0$  - ergibt sich

$$(2) \quad \rho = \sigma = \text{konst.}$$

Bekanntlich ist  $\mathfrak{X} = |K(\xi)|^{-\frac{1}{n+2}} \xi$ , wo  $K$  die GAUSZSCHE Krümmung bedeutet. Also folgt aus (1) und (2)

$$(3) \quad \frac{K(\xi^*)}{K(\xi)} = \text{konst.} = \rho^{n+2}.$$

Da aber nach Minkowski eine Eifläche durch ihre GAUSZSCHE Krümmung bis auf die Translation eindeutig bestimmt ist, ist also  $\xi^*$  zu  $\xi$  homothetisch, w. z. b. w. .

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Vol. XV. No. 12, November, 1935.]

(1) Vergl. MATSUMURA, S.: Über Flächen und Kurven (XIV), Mem. of the Faculty of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XV (1935) S. 252.



( 2 )

Wenn die Richtungskosinus der Tangente, Hauptnormale und Binormale einer beliebigen Kurve in einem Punkte mit  $\alpha, \beta, \gamma; l, m, n; \lambda, \mu, \nu$  bezeichnet werden, so haben allgemein die Haupttriederkanten der Kurve der Schmiegunngskugelmittelpunkte in dem entsprechenden Punkte die Richtungskosinus  $\lambda, \mu, \nu; t, m, n; \alpha, \beta, \gamma$ ; wir bezeichnen mit  $\bar{\rho}$  und  $\bar{\tau}$  die Krümmungs- und Torsionsradius der ursprünglichen Kurve, mit  $\bar{\rho}_1$  und  $\bar{\tau}_1$  die des Orts der Schmiegunngskugelzentren.<sup>(1)</sup>

Dann liefern die Fresnetschen Formeln

$$\frac{da}{ds} = \frac{l}{\bar{\rho}}, \quad \frac{da}{ds_1} = \frac{l}{\bar{\tau}_1},$$

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{l}{\bar{\tau}}, \quad \frac{d\lambda}{ds_1} = \frac{l}{\bar{\rho}_1}.$$

Daraus folgt

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}} = \frac{\bar{\tau}_1}{\bar{\rho}},$$

also

$$\frac{\bar{\rho}}{\bar{\tau}} = \frac{\bar{\tau}_1}{\bar{\rho}_1}.$$

Aus meiner Arbeit<sup>(2)</sup> hat man

$$(1) \quad \frac{\rho_1(\xi)}{\rho_1(\eta)} = \frac{\tau_1(\xi)}{\tau_1(\eta)},$$

also folgt der

**Satz:** Zwei Raumkurven  $\xi$  und  $\eta$  seien einander durch parallele Tangenten punktweise eindeutig zugeordnet, so besteht (1).

- (1) NUGEL, F.: Die Schraubenlinien, Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde, Halle (1912), S. 36.  
 (2) MATSUMURA, S.: Über Flächen und Kurven (XIII), Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Vol. XV, p. 208.

( 3 )

Im folgenden möchten wir die Ebenenkurven untersuchen.

Es sei C eine Ebenenkurve, deren Gleichung mit polartangentia-  
len Koordinaten  $p, \varphi$  bezeichnet ist, so folgt

$$x_1^2 + y_1^2 = \rho^4 I^{-1} J^2 (9\rho^2 + \rho_1^2) = \frac{\rho^2 J^2}{I^2} \frac{d\varphi}{d\phi},$$

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{R^2 J^2}{9\rho^2 I^2},$$

d. h.

$$(1) \quad \begin{cases} \left( \frac{ds}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\rho^2 J^2}{I^2} \frac{d\varphi}{d\phi}, \\ \left( \frac{ds}{d\varphi} \right)^2 = \frac{R^2 J^2}{9\rho^2 I^2}, \\ R^2 = \frac{9\varphi^4}{I} \frac{d\phi}{d\varphi}, \quad R' = -\frac{27\rho^5}{|J|} \rho'. \end{cases}$$

Man vergleiche bezüglich dieses Zeichnens HAYASHIS<sup>(1)</sup> Arbeit.

$\bar{s}$  bedeutet die Bogenlänge der Mittelpunktskurve von dem Be-  
rührungsekegelschnitt.

(1) ist unsere Beziehung.

( 4 )

1. Der Vierscheitelsatz und mit ihm verwandte Sätze lassen sich  
aus einer Integralbedingung, welche die Geschlossenheit zum Aus-  
druck bringt, und der Konvexität folgern.

Die analogen Verhältnisse bei Eiflächen sind leicht zu untersuchen.

Es sei  $e$  ein beliebiger Einheitsvektor,  $\hat{e}$  der Einheitsvektor der  
Flächennormale,  $dw$  das entsprechende Oberflächenelement der Ein-  
heitskugel K, P und S Produkt und Summe der zugehörigen Haupt-  
krümmungsradien.

(1) HAYASHI, T.: On the Middle Point of the Osculating Conic of a Plane Curve,  
Rigakkaishi (Tokyo Kotoshihangakko), vol. 19, pp. 1-18.

Dann folgt bekanntlich aus der Geschlossenheit

$$(1) \quad \int_{(K)} (e\xi) P dw = 0, \quad \int_{(K)} (e\xi) S dw = 0.$$

Es sei  $H$  die Halbkugel von  $K$ , deren Mittelpunkt  $e$  ist, und

$$\bar{P} = P(-\xi), \quad \bar{S} = S(-\xi).$$

Dann folgt aus (1)

$$(2) \quad \int_{(H)} (P - \bar{P})' e\xi dw = 0, \quad \int_{(H)} (S - \bar{S}) (e\xi) dw = 0.$$

Aus (2) folgt wegen der willkürlichen  $e$ :

*Im Innern jeder Halbkugel  $H$  wechseln die Funktionen  $(P - \bar{P})$  und  $(S - \bar{S})$  als Funktionen auf  $K$  ihr Vorzeichen.*

2. Dieser Satz lässt sich auch dadurch beweisen, dass  $(P - \bar{P})$  und  $(S - \bar{S})$  ungerade Funktionen auf  $K$  sind.

Von ungeraden Funktionen

$$f(\xi) = -f(-\xi)$$

gilt es nun, wie man erkennt, dass der Menge ihrer Nullstellen eine ganz aus Paaren von Gegenpunkten bestehende Jordankurve angehört.

Haben nun zwei Eiflächen  $\mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{x}'$  in allen Richtungen gleiche Breiten, so ist

$$(3) \quad p + \bar{p} = p' + \bar{p}',$$

wenn  $p, p'$  ihre Stützfunktionen sind.

Nach WEINGARTEN ist dann auch [BLASCHKE: Kreis und Kugel, S. 110 (14)]

$$(4) \quad S + \bar{S} = S' + \bar{S}'.$$

Es ist also

$$S - S' = -(\bar{S} - \bar{S}')$$

eine ungerade Funktion auf  $K$  und es gibt eine solche geschlossene Gegenpunktskurve; wo  $S = S'$  ist.

*Haben zwei Eiflächen in jeder Richtung gleiche Breiten, so gibt es*

auf ihrem gemeinsamen sphärischen Bild  $K$  eine Jordankurve, wo ihre Summen von Hauptkrümmungsradien einander gleich sind.

Sonderfälle sind Eiflächen konstanter Breite oder Eiflächen und ihre Mittelsymmetrisierten.

( 5 )

In Süß Arbeit<sup>(1)</sup> setzen wir  $p(\theta + \pi)$  anstatt  $q(\xi)$ , so hat man

$$r(\xi) = \frac{p(\theta)}{p(\theta + \pi)},$$

so folgt der

**Satz:** Wenn  $R$ -Abstand konstant ist, so ist  $\xi$  eine Mittelpunktskurve.

Man kann auch setzen<sup>(2)</sup>

$$S^2 \geq 4 I(\xi) \cdot I(\xi),$$

worin das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn  $\xi$  eine Mittelpunktskurve ist.

Weiter kann man die Formeln in Süß Arbeit<sup>(1)</sup> verändern.

( 6 )

Nach KUBOTAS Definition ist  $R$ -Umschreibendequadrat von  $\xi$  bezüglich  $e$

$$(1) \quad \frac{p(\varphi) + p(\varphi + \pi)}{q(\varphi) + q(\varphi + \pi)} = \frac{p(\varphi + \frac{\pi}{2}) + p(\varphi + \frac{3\pi}{2})}{q(\varphi + \frac{\pi}{2}) + q(\varphi + \frac{3\pi}{2})}.$$

Nach GANAPATHI<sup>(3)</sup> haben (1) ungerade Nullstellen für  $\varphi$ , wenn<sup>(4)</sup>

$$0 \leq \varphi < 2/\pi.$$

(1) SÜSS, W.: Zur relativen Differentialgeometrie, I, Japanese Journ. of Math. IV (1927) p. 57.

(2) l. c. (1), S. 60.

(3) GANAPATHI, P.: A note on the oval, Math. Zeit. 38 (1933-34), p. 490.

(4) Vergl. GERICHKE, H.: Zur Arbeit von P. GANAPATHI: „A note on the oval,“ Math. Zeitschrift 40 Bd. (1935), S. 201.

Im allgemeinen kann man wie in meiner Arbeit beweisen, dass wir ungerade Anzahl von R-umschreibendequadraten zu  $\xi$  bzw.  $\epsilon$  haben.

Dies ist ein verallgemeinerter Satz von GANAPATHI.

( 7 )

A, B seien zwei Berührungspunkte von zwei parallelen Stützgeraden. Ziehen wir senkrechte Gerade AC zu der Stützgerade an B.

Wir definieren nun

$$R.-(AC) = \frac{p(\varphi) + p(\varphi + \pi)}{q(\varphi) + q(\varphi + \pi)},$$

$$R.-(BC) = \frac{p'(\varphi) + p'(\varphi + \pi)}{q'(\varphi) + q'(\varphi + \pi)}.$$

Aus der oberen Definition folgt R-Konstantbreiteelinie, wenn

$$R.-(AC) = R.-(BC).$$

Wir definieren  $R.-(\overline{AB})^2$  als

$$\left[ \frac{p(\varphi) + p(\varphi + \pi)}{q(\varphi) + q(\varphi + \pi)} \right]^2 + \left[ \frac{p'(\varphi) + p'(\varphi + \pi)}{q'(\varphi) + q'(\varphi + \pi)} \right]^2,$$

so gilt  $\pi_0$ -Kurve<sup>(1)</sup> als R-Punkteilinie.

Man kann auch definieren

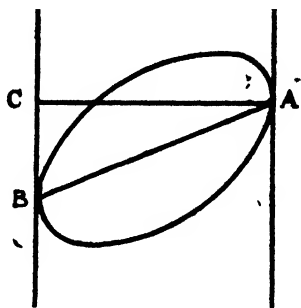
$$R.-(\text{Flächeninhalt } ABC), R.-(\tan \angle CAB).$$

Ist in der gewöhnlichen Differentialgeometrie der Abstand zwischen Fußpunkt und Berührungspunkt konstant, so muss Eillnie ein Kreis sein.

Aber ist in der relativen Differentialgeometrie

$$\frac{p'(\varphi)}{q'(\varphi)} = \text{const.},$$

(1) Vergl. JORDAN et FIEDLER: Contribution à L'étude des Courbes convexes fermées, Paris (1912), p. 25.



so kann man setzen  $p(\varphi) = \text{const. } q(\varphi)$ , d. h.  $\xi$  und  $\epsilon$  liegen in ähnlich und ähnliche Situation.

Wenn

$$\frac{p(\varphi) + p(\varphi + \pi)}{q(\varphi) + q(\varphi + \pi)} = C (= \text{const.}),$$

dann

$$p(\varphi) + p(\varphi + \pi) = C [q(\varphi) + q(\varphi + \pi)],$$

$$\text{d. h.} \quad [p(\varphi) - Cq(\varphi)] + [p(\varphi + \pi) - Cq(\varphi + \pi)] = 0,$$

so ergibt sich

$$\Phi(\varphi) + \Phi(\varphi + \pi) = 0,$$

wo

$$\Phi(\varphi) \equiv p(\varphi) - Cq(\varphi),$$

so muss  $\Phi(\varphi)$   $\pi$ -Kurve sein.

( 8 )

Wir definieren „R.-Diameter“ mit

$$\frac{\bar{r}(\varphi) + \bar{r}'(\varphi + \pi)}{\bar{s}(\varphi) + \bar{s}'(\varphi + \pi)},$$

wo  $\bar{r}$ ,  $\bar{s}$  gewöhnliche Radienvektoren von  $\xi$  bzw.  $\epsilon$  sind.

Wie in „R.-Breite“ kann man „R.-Diameter“ in verschiedener Weise definieren.<sup>(1)</sup>

Setzen wir

$$\frac{\bar{r}(\varphi) + \bar{r}'(\varphi + \pi)}{\bar{s}(\varphi) + \bar{s}'(\varphi + \pi)} = C (= \text{Konstant}),$$

so folgt

$$\{\bar{r}(\varphi) - C\bar{s}(\varphi)\} + \{\bar{r}'(\varphi + \pi) - C\bar{s}'(\varphi + \pi)\} = 0,$$

d. h.  $\bar{r}'(\varphi) - C\bar{s}'(\varphi)$  muss Pseuozenitische Kurve sein.

(1) HIRAKAWA, J.: On the Relative Breadth, Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan, Vol. 17 (1935), p. 137.

Man vergleiche bezüglich der Pseudozentrischen Kkurve HAYASHIS Arbeit.<sup>(1)</sup>

Kann man ein Viereck, dessen R.-Diagonalen einander gleich sind, in einer Eilinie schreiben, so besteht

$$\phi(\varphi) \equiv \frac{\bar{r}'(\varphi) + \bar{r}(\varphi + \pi)}{\bar{s}(\varphi) + \bar{s}(\varphi + \pi)} - \frac{\bar{r}'(\varphi + \frac{\pi}{2}) + \bar{r}(\varphi + \frac{3}{2}\pi)}{\bar{s}(\varphi + \frac{\pi}{2}) + \bar{s}(\varphi + \frac{3}{2}\pi)} = 0.$$

Die Anzahl von  $\varphi$ , wo  $\phi(\varphi) = 0$  ist, in  $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$  ist ungerade. So folgt der

**Satz:** *Im allgemeinen kann man in einer Eilinie ungerade Anzahl von Vierecken, deren R.-Diagonalen einander gleich sind, schreiben.*

( 9 )

Setzen wir R.-Affin-Normalen<sup>(2)</sup> anstatt Affin-Normalen in meiner Arbeit<sup>(3)</sup>, so ergibt sich derselbe Satz.

( 10 )

GERICKE<sup>(4)</sup> hat GANAPATHIS Arbeit erklärt. Dieselbe Erklärung ist auch zu meiner Arbeit betreffs GANAPATHIS Arbeit nötig.

( 11 )

Im folgenden möchten wir versuchen, das Eibereich mit dem Mittelpunkt zu charakterisieren.

Man sieht leicht ein, dass es in jedem Eibereich E mindestens einen Punkt gibt, der mehr als eine Sehne von E halbiert. Andererseits beweist H. BRUNN in seiner Dissertation (Ovale und Eiflächen),

(1) Science Reports of the Tôhoku Imp. Univ. Vol. 5, p. 303.

(2) Vergl. SÜSS, W.: Zur relativen Differentialgeometrie, I, Japanese Journ. of Math., Vol. IV, 1927, p. 75.

(3) MATSUMURA, S.: Über Flächen und Kurven (XIV), Mem. of the Fac. of Sci. Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XV (1935), p. 252.

(4) GERICKE, H.: Zur Arbeit von P. GANAPATHI: „A note on the oval“, Math. Zeit. 40 Bd. (1935), S. 201.

dass es in einem Mittelpunkt-Eibereich ausser dem Mittelpunkt keinen Punkt gibt, der mehr als eine Sehne halbiert. Ich will hier die Umkehrung dieses Satzes von BRUNN beweisen:

**Satz:** *Wird in jedem Punkt eines Eibereichs E höchstens mit einer Ausnahme O genau eine Sehne halbiert, so ist O der Mittelpunkt von E.*

**Beweis:** Man betrachte alle Sehnen, die von E Sektoren desselben Flächeninhalts  $f < I(E)$  abschneiden. Sie umhüllen eine Kurve  $C(f)$  und werden bekanntlich in ihren Berührungspunkten B mit  $C(f)$  halbiert.

In meiner Arbeit im Tôhoku Math. Journ, 39, S. 22 ff. habe ich klar gemacht, dass bei der Übertragung auf ebene Bereiche die Kurven  $C(f)$  infolge unserer Einzigkeitsvoraussetzung konvex sind und konzentrisch und schlicht den Bereich E derart überdecken, dass O der innere Punkt aller Kurven  $C(f)$  ist und dass O also der Mittelpunkt von E ist, w. z. b. w..

( 12 )

GERICKE<sup>(1)</sup> beweist den folgenden Satz:

*Wenn die Sehnen der konstanten Länge 1 stets gleiche Bogenstücke abschneiden, so schneiden sie gleichen Flächeninhalt ab.*

Nach diesem Satz kann man den folgenden Satz beweisen.

*Ist ein Punkt R in einem Eibereich (E) zugleich Sehnen- und Umfangspunkt, so ist E ein Kreis.<sup>(2)</sup>*

**Beweis:** Nach GERICKES Satz muss R auch ein Inhaltspunkt sein, so muss R ein Mittelpunkt von (E) sein.

Aber R ist ein Sehnenpunkt, so muss E ein Kreis sein.

( 13 )

Die konvexe Kurve C wird im folgenden als differenzierbar vorausgesetzt, so haben wir den folgenden

(1) GERICKE, H.: Einige kennzeichnende Eigenschaften des Kreises, Math. Zeitschrift 40 Bd. S. 419.

(2) SÜSS, W.: Eibereiche mit ausgezeichneten Punkten; Sehnen-, Inhalts- und Umfangspunkte, Tôhoku Math. Journ. 25 (1925). p. 94.



**Satz:** Wenn die Sehnen PQ, deren Mittelpunkt von einem festen Punkt O in C um konstante Länge 1 entfernt ist, stets gleiche Bogenstücke abschneiden, so schneiden sie ab konstanten Flächeninhalt von

$$2 \cdot \triangle OPQ + 2 \cdot \widehat{\vee} OPQ.$$

**Beweis:** C sei gegeben durch  $\mathfrak{x}(t)$ , wo  $t$  der Winkel der Tangente mit einer festen Richtung ist.

Der Mittelpunkt von PQ sei

$$\frac{\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2}{2}.$$

bezeichne die Ableitung nach  $t$ , und setzen wir

$$\frac{dt_2}{dt_1} = k.$$

Ist

$$\left( \frac{\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2}{2} \right)^2 = \text{const.},$$

so folgt

$$(1) \quad (\mathfrak{x}'_1 + \mathfrak{x}'_2 k)(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2) = 0.$$

Die von PQ abgeschnittene Bogenlänge ist

$$b = \int_P^Q \sqrt{\mathfrak{x}''} dt.$$

Soll

$$b = \text{const.}$$

sein, so folgt

$$(2) \quad (\mathfrak{x}'_1 + \mathfrak{x}'_2 k)(\mathfrak{x}'_1 - \mathfrak{x}'_2 k) = 0.$$

Der Inhalt von

$$2 \triangle OPQ + 2 \widehat{\vee} OPQ$$

ist

$$S = \int_P^Q (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}') dt + (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2).$$

Soll

$$S = \text{const.}$$

sein, so folgt

$$(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}'_2 k) - (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}'_1) + (\mathfrak{x}'_1, \mathfrak{x}_2) + (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}'_2 k) = 0,$$

d. h. (3)  $(\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}'_1 - \mathfrak{x}'_2 k) = 0.$

Aus (1) und (2) folgt,  $\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2$  sei parallel zu  $\mathfrak{x}'_1 - \mathfrak{x}'_2 k$ , also (3).  
Umgekehrt folgt (2) aus (1) und (3).



# Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XV)

Sôji MATSUMURA

(Accepted for publication, October 14, 1935)

( 1 )

Wir betrachten uns den Kreisbüschel

$$(1) \quad \mathfrak{x} = \{(\mathfrak{x}_1 + u\mathfrak{x}_2) + v(\mathfrak{x}_4 + u\mathfrak{x}_3)\} + w\{(\bar{\mathfrak{x}}_1 + u\bar{\mathfrak{x}}_2) + v(\bar{\mathfrak{x}}_4 + u\bar{\mathfrak{x}}_3)\}.$$

Es folgt

$$(2) \quad \mathfrak{x} = m + \overline{m} = m_1 + um_2 = m_1 + vm_3,$$

wo

$$\begin{aligned} m &= (\mathfrak{x}_1 + u\mathfrak{x}_2) + v(\mathfrak{x}_4 + u\mathfrak{x}_3), \\ \overline{m} &= (\bar{\mathfrak{x}}_1 + u\bar{\mathfrak{x}}_2) + v(\bar{\mathfrak{x}}_4 + u\bar{\mathfrak{x}}_3); \\ m_1 &= (\mathfrak{x}_1 + v\mathfrak{x}_4) + w(\bar{\mathfrak{x}}_1 + v\bar{\mathfrak{x}}_4), \\ m_2 &= (\mathfrak{x}_2 + v\mathfrak{x}_3) + w(\bar{\mathfrak{x}}_2 + v\bar{\mathfrak{x}}_3); \\ m_3 &= (\mathfrak{x}_1 + w\bar{\mathfrak{x}}_1) + u(\mathfrak{x}_2 + w\bar{\mathfrak{x}}_2), \\ m_4 &= (\mathfrak{x}_4 + w\bar{\mathfrak{x}}_4) + u(\mathfrak{x}_3 + w\bar{\mathfrak{x}}_3), \end{aligned}$$

$\mathfrak{x}$ ,  $\mathfrak{x}_i$ ,  $\bar{\mathfrak{x}}_i$ ,  $m_i$ ,  $m$ ,  $\overline{m}$  Kreise in  $R_2$  und  $u$ ,  $v$ ,  $w$  skalare Größen sind.

Aus (1), (2) folgt der

**Satz:** Man kann  $\mathfrak{x}$  mit (2) bezeichnen.

( 2 )

Wir betrachten uns dann den Kugelbüschel

$$(1) \quad pf + p_1 \varphi_1 + \dots + p_n \varphi_n,$$

wo  $f, \varphi_1, \dots, \varphi_n$   $n+1$  Kugeln in  $(n+2)$  dimensionalem Raum und  $p, p_i$  Skalargrößen sind.

Wenn (1) zu  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, f$  senkrecht ist, so hat man

$$(2) \quad \begin{cases} p(ff) + p_1(\varphi_1 f) + \dots + p_n(\varphi_n f) = 0, \\ p(f\varphi_1) + p_1(\varphi_1 \varphi_1) + \dots + p_n(\varphi_n \varphi_1) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ p(f\varphi_n) + p_1(\varphi_1 \varphi_n) + \dots + p_n(\varphi_n \varphi_n) = 0. \end{cases}$$

Es sei  $p, p_i \neq 0$ , so folgt aus (2)

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1 \varphi_1) & \dots & (\varphi_1 \varphi_n) & (\varphi_1 f) \\ \dots\dots\dots & & & \\ (\varphi_n \varphi_1) & \dots & (\varphi_n \varphi_n) & (\varphi_n f) \\ (f \varphi_1) & \dots & (f \varphi_n) & (ff) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & (\varphi_1 f) \\ \dots\dots\dots & & & \\ 0 & \dots & 1 & (\varphi_n f) \\ (f \varphi_1) & \dots & (f \varphi_n) & (ff) \end{vmatrix}$$

$$= (ff) - (f\varphi_1)^2 - \dots - (f\varphi_n)^2 = 0,$$

$$\text{d. h.} \quad (f\varphi_1)^2 + (f\varphi_2)^2 + \dots + (f\varphi_n)^2 = (ff),$$

$$\text{d. h.} \quad \cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \dots + \cos^2 \varphi_n = 1,$$

wo  $\varphi_i$  die Winkel zwischen  $f$  und  $\varphi_i$  sind.

$$(3)$$

Wir betrachten uns zuletzt den Kugelbüschel

$$\xi(u, v) = \xi(u, v) + t(u, v) \eta(u, v),$$

in  $R_3$ , wo  $\xi, \eta$  die Kugeln in  $R_3$  und  $t$  die skalaren Zahlen sind.

Wenn

$$(A) \quad \eta \cdot d\xi = 0$$

besteht, so folgt

$$\eta \xi_u + t_u = 0, \quad \eta \xi_v + t_v = 0,$$

d. h.

$$(1) \quad \eta_v \xi_u = \eta_u \xi_v.$$

(1) ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass (A) besteht.

Wenn (A) besteht, so wollen wir unsern Kugelbüschel einen N. K. Büschel nennen.

Wenn

$$\xi = \xi + t\eta, \quad \xi = \xi + t\delta,$$

$$\eta = \eta - n\delta,$$

so folgt

$$\eta_u = \eta_u - n\delta_u,$$

$$\eta_v = \eta_v - n\delta_v,$$

also

$$(2) \quad \eta_u \cdot \xi_v = \eta_u \cdot \xi_v - n\delta_u \xi_v, \quad \eta_v \xi_u = \eta_v \xi_u - n\delta_v \xi_u.$$

Wenn  $\delta, \xi$  bzw.  $\eta, \xi$  einen N. K. Büschel bilden, so kann man aus (1), (2) wissen, dass  $\eta, \xi$  auch einen N. K. Büschel bilden.

$$(4)$$

Im folgenden möchten wir die Formeln nach GREEN in Kreisflächen untersuchen. Es seien  $\varphi, \psi$  zwei Funktionen auf einem einfach zusammenhängenden Kreisflächenstück.

Dann ist<sup>(1)</sup>

$$\int \nabla(\varphi, \psi) d\Omega = \iint (P\psi_t + Q\psi_\tau) dt d\tau,$$

wobei

$$P = \frac{(\theta_\tau \theta_\tau) \varphi_t - (\theta_t \theta_\tau) \varphi_\tau}{w}, \quad Q = \frac{(\theta_t \theta_t) \varphi_\tau - (\theta_t \theta_\tau) \varphi_t}{w},$$

$$w^2 = (\theta_t \theta_t) (\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2.$$

Es folgt

(1) NAKAJIMA, S.: Kugelgeo. von Möbius, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri. Taihoku Imp. Univ., Vol. 2 (1929) p. 36.

$$(1) \quad \int \nabla(\varphi, \psi) d0 = \iint \left\{ \frac{\partial(P\psi)}{\partial t} + \frac{\partial(Q\psi)}{\partial \tau} \right\} dt d\tau - \int \psi \Delta \varphi d0.$$

Das erste Integral rechts kann man nach der gewöhnlichen, nach GAUESZ oder GREEN bekannten Formel in ein Randintegral überführen:

$$(2) \quad R = \iint \{ (P\psi)_t + (Q\psi)_\tau \} dt d\tau = \oint \psi (Pd\tau - Qdt).$$

Dabei ist der Rand so zu durchlaufen, dass das Kreisflächenstück links bleibt.

Nehmen wir die im richtigen Sinn umfahrene Randlinie für den Augenblick als  $t$ -Kurve eines orthogonalen Parametersystems, so wird

$$(3) \quad R = - \oint \psi \varphi_\tau \sqrt{\frac{(\theta_t, \theta_t)}{(\theta_\tau, \theta_\tau)}} dt = - \oint \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds,$$

wenn durch  $\partial: \partial n$  die Ableitung in der Richtung  $\xi_\tau$ , also in der Richtung der inneren Normalen, angedeutet wird.

Somit haben wir als die erste Formel von GREEN gefunden:

$$(4) \quad \int \nabla(\varphi, \psi) \cdot d0 = - \oint \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \int \psi \cdot \Delta \varphi \cdot d0.$$

Setzt man statt  $\psi$  in (4)  $\lambda \cdot \psi$ , so erhält man etwa allgemeiner:

$$\begin{aligned} \int \lambda \nabla(\varphi, \psi) d0 &= - \int \psi \nabla(\varphi, \lambda) d0 - \oint \lambda \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \int \lambda \cdot \psi \Delta \varphi \cdot d0 \\ &= - \int \psi [\nabla(\varphi, \lambda) + \lambda \Delta \varphi] d0 - \oint \lambda \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds. \end{aligned}$$

Vertauscht man in (4)  $\varphi$  mit  $\psi$  unter der Beachtung der Symmetrie von  $\nabla(\varphi, \psi)$ , so folgt durch Abziehen die zweite Formel GREENS<sup>(2)</sup>

$$(5) \quad \int \{ \varphi \cdot \Delta \psi - \psi \cdot \Delta \varphi \} d0 + \oint \left\{ \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} ds = 0.$$

( 5 )

Hier betrachten wir Kreise in  $R_2$ .

Wir untersuchen drei Kreise  $\chi$ ,  $\alpha$ ,  $\mathfrak{B}$ , die durch die Schnittpunkte von zwei Kreisen  $\mathfrak{F}_1$ ,  $\mathfrak{F}_2$  gehen. Man erhält

$$(1) \quad \begin{cases} \chi = a_1 \mathfrak{F}_1 + a_2 \mathfrak{F}_2, \\ \alpha = b_1 \mathfrak{F}_1 + b_2 \mathfrak{F}_2, \\ \mathfrak{B} = c_1 \mathfrak{F}_1 + c_2 \mathfrak{F}_2, \end{cases} \quad (a_i, b_i, c_i \text{ skalar !}).$$

Ist

$$(2) \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

so ergibt sich

$$\begin{vmatrix} \chi & a_1 & a_2 \\ \alpha & b_1 & b_2 \\ \mathfrak{B} & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.

$$\chi \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \mathfrak{B} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

also kann man sagen, der Kreis  $\chi$  gehe durch den Schnitt-Punkt von zwei Kreisen  $\alpha$  und  $\mathfrak{B}$ .

( 6 )

Wir wollen hier die Kurvengeometrie in  $R_2$  untersuchen.

Es seien

$$F_1(\chi^I, \chi^{II}) = 0, \quad F_2(\chi^I, \chi^{II}) = 0,$$

zwei Kurvenpaaren. So kann man ein Kurvenpaar mit  $F(\chi^I, \chi^{II})$  bezeichnen, wo

$$F = \alpha F_1 + \beta F_2, \quad (\alpha, \beta \text{ skalar !})$$

ist und  $\chi^I$ ,  $\chi^{II}$  zwei Kreise in  $R_2$  bedeuten.



Man kann weiter erweitern wie in van der WOUDES Arbeit.<sup>(1)</sup>

( 7 )

Es sei

$$(1) \quad f(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}, t) = 0,$$

die Gleichung eines Flächenpaars in  $R_3$ , wo  $t$  ein Parameter und  $\xi^a$ , ( $a=I, II, III$ ) die Kugeln in  $R_3$  bedeuten.

Aus (1) kann man leicht ein Paar von Charakteristik und Rückkehrkante finden.<sup>(2)</sup>

( 8 )

Weiter kann man meine Arbeit<sup>(3)</sup> untersuchen wie in EISENHARTS Arbeit.<sup>(4)</sup>

( 9 )

Im folgenden möchten wir dreifachschiefe Systeme im konformen Raume untersuchen.

Dreifachorthogonale Systeme sieht man in TAKASUS Arbeit<sup>(5)</sup> gründlich ein.

Mit

$$(1) \quad \xi = \xi(u^1, u^2, u^3), (\xi\xi=0, u^1=u, u^2=v, u^3=w)$$

bezeichnen wir den Flächenpunkt eines dreifachschiefen Flächensystems im konformen Raume derart, dass die Gleichungen

- (1) van der WOUDE, W.: Über den Noetherschen Fundamentalsatz, Math. Ann. 111 Bd. (1935) S. 425.
- (2) LUKAT, M.: Bianchis Vorlesungen über Differential-Geometrie, Berlin und Leipzig, (1910), S. 20. ♣
- (3) MATSUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (1), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, vol. V, (1932) p. 104.
- (4) EISENHART, L. P.: Isothermal-Conjugate Systems of Lines on Surfaces, American Journ. of Math. Vol. XXV (1903) p. 216.
- (5) TAKASU, T.: Über breifachorthogonale Systeme im konformen Raume, Monatshefte für Mathematik und Physik, XXXVII Bd. (1930) 3, 13.

$$(2) \quad u = \text{konst.}, \quad v = \text{konst.} \quad \text{und} \quad w = \text{konst.}$$

die drei Systeme von den zueinander senkrecht stehenden Flächen darstellen.

Dann wird das konforme Bogenelement etwa durch

$$(3) \quad ds^2 = dx dx + G_{hh} du^h du^h = H_h^2 du^h du^h, \quad (H_h > 0),$$

gegeben, da es sich verhält:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 \xi_{11} &= H_1 H_{11} \\ \xi_2 \xi_{11} &= k_{121} - H_1 H_{12} \\ \xi_3 \xi_{11} &= k_{131} - H_1 H_{13} \end{aligned} \right\} (B_{11}) \quad \left. \begin{aligned} \xi_1 \xi_{22} &= k_{122} - H_2 H_{21} \\ \xi_2 \xi_{22} &= H_2 H_{22} \\ \xi_3 \xi_{22} &= k_{232} - H_2 H_{23} \end{aligned} \right\} (B_{22})$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 \xi_{23} &= s - k_{231} \\ \xi_2 \xi_{23} &= H_2 H_{23} \\ \xi_3 \xi_{23} &= H_3 H_{32} \end{aligned} \right\} (B_{23}) \quad \left. \begin{aligned} \xi_1 \xi_{13} &= H_1 H_{13} \\ \xi_2 \xi_{13} &= s - k_{132} \\ \xi_3 \xi_{13} &= H_3 H_{31} \end{aligned} \right\} (B_{13})$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 \xi_{13} &= k_{133} - H_3 H_{31} \\ \xi_2 \xi_{13} &= k_{233} - H_3 H_{32} \\ \xi_3 \xi_{13} &= H_3 H_{33} \end{aligned} \right\} (B_{33}) \quad \left. \begin{aligned} \xi_1 \xi_{12} &= H_1 H_{12} \\ \xi_2 \xi_{12} &= H_2 H_{21} \\ \xi_3 \xi_{12} &= s - k_{123} \end{aligned} \right\} (B_{12}).$$

Man kann dies untersuchen wie in THOMPSONS Arbeit,<sup>(1)</sup> oder TAKASUS Arbeit<sup>(2)</sup> erweitern wie in EISENHARTS Arbeit.<sup>(3)</sup>

$$(10)$$

In unsrer Kreisfläche besteht<sup>(4)</sup>

$$(1) \quad \frac{E}{G} = (\theta, \theta_1), \quad \frac{F}{G} = (\theta, \theta_2).$$

Man kann also

- 
- (1) THOMPSON, D.: The Identical Relations between the Elements of any Oblique Triple System of Surfaces, American Journ. of Math. Vol. XXXV (1913) p. 427.
  - (2) TAKASU, I. c. (5), p. 300.
  - (3) EISENHART, L. P.: Certain Triply orthogonal Systems of Surfaces, American Journ. of Math. XXIX (1907), p. 168.
  - (4) NAKAJIMA, S.: Kugelgeometrie von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., vol. 2, p. 36.

$$f\left(\frac{E}{G}, \frac{F}{G}\right)$$

mit

$$(\theta_i, \theta_i), (\theta_i, \theta_\pi), (\theta_\pi, \theta_\pi)$$

bezeichnen, wo  $(\theta_\pi, \theta_\pi) = 1$  ist.

$$(11)$$

Betrachten wir Kugeln

$$(1) \quad \eta_1 = \sum_{\nu=1}^{v-n} a_{1\nu} \xi_\nu, \eta_2 = \sum_{\nu=1}^{v-n} a_{2\nu} \xi_\nu, \dots, \eta_n = \sum_{\nu=1}^{v-n} a_{n\nu} \xi_\nu, (n > N),$$

in  $R_N$ , welche die Beziehungen

$$(2) \quad \xi_1 = \sum_{\nu=1}^{v-n} a_{1\nu} \eta_\nu, \xi_2 = \sum_{\nu=1}^{v-n} a_{2\nu} \eta_\nu, \dots, \xi_n = \sum_{\nu=1}^{v-n} a_{n\nu} \eta_\nu$$

haben, wo  $a$  skalare Größen sind.

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$(3) \quad \eta_\mu = \left( \sum_{\lambda=1}^{\lambda-n} a_{\mu\lambda} a_{\lambda 1} \right) \eta_1 + \left( \sum_{\lambda=1}^{\lambda-n} a_{\mu\lambda} a_{\lambda 2} \right) \eta_2 \\ + \dots + \left( \sum_{\lambda=1}^{\lambda-n} a_{\mu\lambda} a_{\lambda n} \right) \eta_n,$$

so folgt

$$(4) \quad a_{\mu 1} a_{1\nu} + a_{\mu 2} a_{2\nu} + \dots + a_{\mu n} a_{n\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n),$$

also ergibt sich der

**Satz:** (4) ist die Bedingung dafür, dass zwischen Kugeln

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$$

in  $R_N$  (1) und (2) bestehen.

Unsere Untersuchung führt jetzt zum gleichen Resultat wie die über Involutrische Gleichungssysteme.<sup>(1)</sup>

(1) Vergl. CORNELY, A.: Untersuchungen über Involutrische Gleichungssysteme, Inaugural-Dissertation, Göttingen, (1892).

( 12 )

Man kann unsere Kugelgeometrie auch auf die Differentialgeometrie der geradlinigen Flächen im elliptischen Raum anwenden.<sup>(1)</sup>

( 13 )

Betrachten wir die Inversionsgeometrie von Kreisflächen.<sup>(2)</sup> Man kann setzen

$$\tan \bar{w} = - \frac{\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2} f_2}{J(f_1, f_2)},$$

$$\frac{J(f_1, f_2)}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}} = \frac{(\sigma_1', \sigma_1')^2 - (\sigma_2', \sigma_2')^2}{2},$$

wo  $u \equiv t$ ,  $v \equiv \tau$  sind.

Denn

$$\frac{(\theta_i \theta_i)}{E} = \frac{(\theta_i \theta_\tau)}{F} = \frac{(\theta_\tau \theta_\tau)}{G}$$

bestehen.

In dem Falle von Kreisflächen kann man setzen<sup>(3)</sup>

$$dt^2 - \left( \sqrt{\frac{(\mathbb{I}\mathbb{I}_i \mathbb{I}\mathbb{I}_i)}{(\mathbb{I}\mathbb{I}_\tau \mathbb{I}\mathbb{I}_\tau)}} \frac{(\theta_\tau \theta_\tau)}{(\theta_i \theta_i)} + \sqrt{\frac{(\mathbb{I}\mathbb{I}_\tau \mathbb{I}\mathbb{I}_\tau)}{(\mathbb{I}\mathbb{I}_i \mathbb{I}\mathbb{I}_i)}} \right) \tan w, dt d\tau$$

$$- \frac{(\theta_\tau \theta_\tau)}{(\theta_i \theta_\tau)} d\tau^2 = 0,$$

als LT-Kurven.

( 14 )

Geben wir einen Kreis  $\xi$  in  $R_2$  als die Funktion eines Parameters  $t$ , und<sup>(4)</sup>

- 
- (1) BLASCHKE, W.: Differentialgeometrie der geradlinigen Flächen im elliptischen Raum, Math. Zeitschrift 15 (1922) S. 309.
  - (2) Vergl. SU, B.: Certain Double Systems of Curves on the Surface, II, Tohoku Imperial university science report, 16 (1927), p. 656.
  - (3) l. c. (2), p. 665.
  - (4) THOMSEN, G.: Über konforme Geo., Abh. aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Univ. IV Bd. (1925), 125.

$$\sigma = \text{const.},$$

$$\{\xi(t_2) - \xi(t_1)\}^2 = \text{const.},$$

so folgt:

$$\xi(t_2) - \xi(t_1)$$

sei parallel zu

$$\frac{d\xi(t_1)}{dt_1} + \frac{d\xi(t_2)}{dt_2} \frac{dt_2}{dt_1},$$

oder  $\xi(t_2) - \xi(t_1)$  sei parallel zu  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt_1} \{\xi(t_1) + \xi(t_2)\}$ .

$\frac{1}{2} \{\xi(t_1) + \xi(t_2)\}$  bedeutet den Mittelkreis von  $\xi(t_1)$  und  $\xi(t_2)$ .

$\xi(t_2) - \xi(t_1)$  bedeutet die Tangentenentfernung der beiden Kreise  $\xi(t_2)$  und  $\xi(t_1)$ .

( 15 )

Nach einer von WEIGARTEN ausgeführten Untersuchung<sup>(1)</sup> „Über die Differentialgleichung der Oberflächen, welche durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate geteilt werden können“ hängt die allgemeine Bestimmung dieser Flächenfamilie von der Integration einer partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung ab.

Es stellt sich nämlich heraus, dass für jede Fläche der besprochenen Art ein Differentialausdruck von der Form

$$(1) \quad Q = \left\{ \frac{\partial(r+r')}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial(r+r')}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial(r+r')}{\partial z} \cdot dz - d(r \cdot r') \right\} (r - r')^{-2}$$

in das exakte Differential einer Funktion des Orts auf der betreffenden Fläche übergeht und umgekehrt.<sup>(2)</sup>

(1) Sitzungsberichte der Berliner Akademie; Novemberheft 1893.

(2) REINBECK, K.: Über diejenigen Flächen, auf welche die Flächen zweiten Grades durch parallele Normalen conform abgebildet werden, Inaugural-Dissertation, Göttingen, 1896.

Dabei bedeuten  $r$  und  $r'$  die Hauptkrümmungsradien,  $X, Y, Z$  die Richtungscosinus der Normale in einem Punkt jener Fläche.

Betrachten wir Kreisfläche und soll umgekehrt  $\mathcal{Q}$  das vollständige Differential einer Funktion der Variablen  $t, \tau$  darstellen, so kann man setzen :

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \log \left\{ \frac{(\theta_i \theta_i)}{(\theta_\tau \theta_\tau)} \right\}}{\partial t \partial \tau} = 0.$$

(16)

In Kreisflächen haben wir<sup>(1)</sup>

$$\Delta_2 \phi = 0,$$

d. h.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{(\theta_\tau \theta_\tau) \frac{\partial \phi}{\partial t} - (\theta_i \theta_i) \frac{\partial \phi}{\partial \tau}}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{(\theta_i \theta_i) \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - (\theta_\tau \theta_\tau) \frac{\partial \phi}{\partial t}}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}} \right] = 0,$$

so kann man setzen

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{(\theta_i \theta_i) \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - (\theta_\tau \theta_\tau) \frac{\partial \phi}{\partial t}}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{(\theta_\tau \theta_\tau) \frac{\partial \phi}{\partial t} - (\theta_i \theta_i) \frac{\partial \phi}{\partial \tau}}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}},$$

also folgt

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{(\theta_i \theta_i) \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - (\theta_\tau \theta_\tau) \frac{\partial \phi}{\partial t}}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = - \frac{(\theta_\tau \theta_\tau) \frac{\partial \phi}{\partial t} - (\theta_i \theta_i) \frac{\partial \phi}{\partial \tau}}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}},$$

(1) MATSUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln, (1), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan (1932), p. 104.

d. h.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = -\frac{\partial \psi}{\partial t},$$

so kann man setzen<sup>(1)</sup>

$$\phi + i\psi = F(t + i\tau), \quad i = \sqrt{-1}.$$

(1) EISENHART, L. P.: Isothermal-Conjugate Systems of Lines on Surfaces American Journ. of Math. XXV (1903) p. 217.

昭和十年十一月二十八日印刷

昭和十年十一月三十日發行

---

編纂兼發行者 臺北帝國大學理農學部

印刷者 顧 川 首

臺北市大正町二ノ三七

印刷所 株式會社臺灣日日新報社

臺北市農町四ノ五二

---

購買申込所 株式會社臺灣日日新報社

臺北市農町四ノ五二

同 丸 善 株 式 會 社

東京市日本橋區堀二丁目





# ON A PAIR OF SURFACES MUTUALLY RELATED, II

Sôji MATSUMURA

(Accepted for publication, December 14, 1935)

In this paper we will study about some conjugate curve nets on a surface.

## § 1

We consider the surface  $S$ , whose rectangular coordinates  $x, y, z$  satisfy<sup>(1)</sup>

$$(1) \quad -\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial \phi}{\partial u}} - \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial \phi}{\partial v}} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

then<sup>(2)</sup>

$$(2) \quad \sigma = \frac{\phi_v}{\phi_u}, \quad \lambda = \frac{2\phi_v}{\phi_{uv}}, \quad \left( \phi_i = \frac{\partial \phi}{\partial v} \right).$$

If  $S$  is the first focal sheet of a congruence, the second sheet  $S_1$  is given by

$$(3) \quad \begin{aligned} x_1 &= x + \frac{2\phi_i}{\phi_{uv}} \frac{\partial x}{\partial u}, & y_1 &= y + \frac{2\phi_v}{\phi_{uv}} \frac{\partial y}{\partial u}, \\ z_1 &= z + \frac{2\phi_v}{\phi_{uv}} \frac{\partial z}{\partial u}. \end{aligned}$$

---

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Vol. XV, No. 14, February, 1936.]

(1) EISENHART, L. P.: Surfaces of Constant Mean Curvature, American Journ. of Math. XXV (1903), p. 383.

(2) NAKAJIMA, S.: Über zwei Flächen, welche eine Beziehung haben I, Tôhoku Math. Journ. Vol. 30 (1928) p. 142.

From this it follows that the coordinates  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  of the mean point of the line have the expressions

$$(4) \quad \begin{aligned} x &= x + \frac{\phi_v}{\phi_{uv}} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \bar{y} = y + \frac{\phi_v}{\phi_{uv}} \frac{\partial y}{\partial u}, \\ z &= z + \frac{\phi_v}{\phi_{uv}} \frac{\partial z}{\partial u}, \end{aligned}$$

so we have

$$(5) \quad \sum \bar{x}^2 = \sum x^2 + \frac{\phi_v^2}{\phi_{uv}^2} \cdot \sum \left( -\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + 2 \sum x \frac{\partial x}{\partial u}.$$

When  $\sum x^2 = 1$ ,

$$(6) \quad \sum \bar{x}^2 = 1 + \frac{\phi_v^2}{\phi_{uv}^2} \cdot E.$$

When  $\sum \bar{x}^2 = \text{const.}$ , then

$$(7) \quad \frac{\phi_v^2}{\phi_{uv}^2} \cdot E = \text{const.}$$

$$(8) \quad \phi = \int V e^{\text{const.} \cdot \int -E du} dv + U,$$

From (8) follow the

**Theorem :** *When S is a sphere and the locus of the mean points is also a sphere, then (8) follows.*

## § 2

The tangents to the curves  $v = \text{const.}$  on S form a congruence of GUICHARD is<sup>(3)</sup>

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial u} \log \left( \frac{1}{\lambda} \right) - \frac{1}{\lambda} - \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{E} = 0,$$

where the rectangular coordinates of S satisfy<sup>(4)</sup>

(3) EISENHART, L. P.: Congruence of Tangents to a Surface and Derived Congruences, American Journ. of Math. XXVI (1904), p. 204.

(4) l. c. (2).

$$(10) \quad \lambda \xi_{uv} + \sigma \xi_u + \xi_v = 0.$$

When  $S$  is the envelope of the cylinder, the lines of the congruence meeting at  $S$  along the conjugate directions  $u = \text{const.}$  must have the same directions, so that the derivatives with respect to  $v$  of the above direction cosines must be zero.

Thus

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\sqrt{E}} - \frac{\sigma}{\lambda \sqrt{E}} \right) \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{1}{\lambda \sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

### § 3

When the conjugate system on  $S$  is composed of the lines of curvature, then<sup>(5)</sup>

$$(12) \quad \sigma = \frac{(\log \sqrt{E})_v}{(\log \sqrt{G})_u}, \quad \lambda = - \frac{1}{(\log \sqrt{G})_u},$$

wher

$$(13) \quad \lambda \xi_{uv} + \sigma \xi_u + \xi_v = 0.$$

We find that for the tangents to the curves  $u = \text{const.}$  to form a congruence of RIBAUCOUR, it is necessary and sufficient that<sup>(6)</sup>

$$(14) \quad \frac{\partial \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right)}{\partial u} - \frac{\partial \left( \frac{1}{\lambda} \right)}{\partial v} - \frac{\partial^2 \log \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right)}{\partial u \partial v} = 0,$$

$$\text{i. e.} \quad (15) \quad E = (\text{function of } v) \exp. \{ (\text{function of } u) \cdot (\text{function of } v) \}.$$

(5) EISENHART, L. P.: Congruences of Tangents to a Surface and Derived Congruences, American Journ. of Math. vol. XXV (1904), p. 189.

(6) MATSUMURA, S.: On a Pair of Surfaces Mutually Related, Tôhoku Math. Journ. vol. 39 (1934), p. 18.

## § 4

Suppose that we have given two A-surfaces  $S_1$  and  $S_2$ , with reference to their lines of curvature.

Denoted by  $w_1$  and  $w_2$  the distances from the origin upon the tangent planes to  $S_1$  and  $S_2$  at corresponding points, then we find that  $w_1$  and  $w_2$  are particular solutions of the equation<sup>(7)</sup>

$$(16) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sin w}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \log \cos w}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0.$$

When we consider the surface,  $S$ , whose point-coordinates satisfy (16), then<sup>(8)</sup>

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\partial \log \sin w}{\partial v}, \\ \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{\partial \log \cos w}{\partial u}, \end{array} \right.$$

so from EISENHARTS paper, follows the

**Theorem 1:** *The necessary and sufficient condition that the tangents to the lines of curvature  $v=\text{const.}$  on  $S$  from a congruence of Ribaucour, when  $S$ -surface is isothermic surface, is*

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} [\log (\log \cos w)_v] = 0.$$

**Theorem 2:** *The condition that the point equation of  $S$  may have an equal invariant is*

$$(18) \quad (\log \sin w)_{uv} = (\log \cos w)_{uv},$$

## § 5

Consider a surface  $S$ , whose rectangular coordinates  $x, y, z$  satisfy

(7) EISENHART, L. P.: Surfaces with the same spherical Representation of their Lines of Curvature as Pseudospherical Surfaces, American Journ. of Math. vol. XXVII (1905), p. 118.

(8) EISENHART, L. P.: Congruence of Tangents to a surface and Derived Congruences, American Journ. of Math. vol. XXVI (1904), p. 189.

$$(19) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{\sigma}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

where<sup>(9)</sup>

$$(20) \quad \sigma = \frac{GE_v - FG_u}{EG_u - FE_v}, \quad \frac{1}{2}\lambda = -\frac{EG - F^2}{E_v F - G_u E}.$$

If  $S$  is the first sheet of a congruence, the second sheet is given by

$$(21) \quad x_1 = x + \lambda x_u, \quad y_1 = y + \lambda y_v, \quad z_1 = z + \lambda z_v.$$

From this it follows that the coordinates  $x, y, z$  of the mean point  $S$  of the line have the expressions

$$(22) \quad \bar{x} = x + \frac{1}{2} \lambda x_u, \quad \bar{y} = y + \frac{1}{2} \lambda y_v, \quad \bar{z} = z + \frac{1}{2} \lambda z_v.$$

From this we get<sup>(10)</sup>

$$(23) \quad \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v} + \left[ \frac{\sigma}{\lambda} + \lambda \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\lambda} \right) \right] \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \\ = -\frac{1}{2} \lambda \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left( \frac{1}{\lambda} \right) \right] x_v.$$

Next we consider a radial transformation

$$(24) \quad x' = \frac{x}{\mu}, \quad y' = \frac{y}{\mu}, \quad z' = \frac{z}{\mu},$$

then the coordinates  $x', y', z'$  of the surface  $S'$  will satisfy the equation<sup>(11)</sup>

$$(25) \quad \frac{\partial^2 \theta'}{\partial u \partial v} = \left( -\frac{\sigma}{\lambda} - \frac{\partial}{\partial v} \log \mu \right) \frac{\partial \theta'}{\partial u} \\ + \left( -\frac{1}{\lambda} - \frac{\partial}{\partial u} \log \mu \right) \frac{\partial \theta'}{\partial v}.$$

From (23), (25) we get

(9) l. c. 2.

(10) l. c. (3), p. 186.

(11) STETSON, J. M.: Conjugate Systems of curves, *Annals of Math.* 19 1917-18, p. 108.

$$(26) \quad \bar{x} \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v} + \left[ \frac{\sigma}{\lambda} + \lambda \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\lambda} \right) \right] \bar{x} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \frac{1}{\lambda} \bar{x} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \\ = -\frac{1}{2} \lambda \left[ \frac{\sigma}{\partial u} \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left( \frac{1}{\lambda} \right) \right] x_u \bar{x},$$

$$(27) \quad \theta' \left( -\frac{\partial^2 \theta'}{\partial u \partial v} \right) = \left( -\frac{\sigma}{\lambda} - \frac{\partial}{\partial v} \log \mu \right) \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial u} \\ + \left( -\frac{1}{\lambda} - \frac{\partial}{\partial u} \log \mu \right) \frac{\partial \theta'}{\partial v} \theta'.$$

If the surface  $\bar{S}$ ,  $S'$  are spheres then from (26), (27) follows

$$(28) \quad \bar{x} \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v} = -\frac{1}{2} \lambda \left[ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right) - \frac{\sigma}{\partial v} \left( \frac{1}{\lambda} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left( \frac{1}{\lambda} \right) \right] x_u \bar{x}$$

$$(29) \quad \theta \left( -\frac{\partial^2 \theta'}{\partial u \partial v} \right) = 0.$$

When 
$$-\frac{1}{2} \lambda \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left( \frac{1}{\lambda} \right) \right] = 0$$

in (28), then

$$(30) \quad \bar{x} \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v} = 0.$$

From (30) we get

$$(31) \quad \bar{x}_u x_u = 0,$$

because

$$(32) \quad \bar{x}_v \bar{x}_u + \bar{x} \bar{x}_{uv} = 0.$$

From (29) we get

$$(33) \quad \theta_u \theta_v = 0.$$

From (31), (33) we know that  $u = \text{const.}$ ,  $v = \text{const.}$  are orthogonal curve systems, so we get the

**Theorem 1:** *When*

$$(34) \quad \lambda \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left( \frac{1}{\lambda} \right) \right] = 0$$

and the surface  $\bar{S}$  is a sphere, then the parameter curves

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}$$

are orthogonal.

**Theorem 2:** When  $S'$  is a sphere, then the parameter curves

$$u = \text{const. and } v = \text{const.}$$

are orthogonal.

When the condition

$$(35) \quad -\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left( \frac{1}{\lambda} \right) = 0$$

is satisfied, then the point equation of the mean surface of  $C$  becomes<sup>(12)</sup>

$$(36) \quad -\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \left( \frac{\sigma}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{1}{\lambda} \right) \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

so we get the

**Theorem 3:** When the mean surface of  $C$  is a sphere then the parametric lines  $u = \text{const.}$  and  $v = \text{const.}$ , are orthogonal.

## § 6

The coordinates of  $S$  will satisfy<sup>(13)</sup>

$$(37) \quad -\frac{\partial^2 \theta'}{\partial u \partial v} = \left( -\frac{\sigma}{\lambda} - \frac{\partial}{\partial v} \log \mu \right) \frac{\partial \theta'}{\partial u} + \left( -\frac{1}{\lambda} - \frac{\partial}{\partial u} \log \mu \right) \frac{\partial \theta'}{\partial v}.$$

From (37) follows

(12) I. c. (3, p. 188.

(13) I. c. (11) p. 108.



$$(38) \quad \frac{\partial \left( \frac{\sigma}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial v} \log \mu \right)}{\partial u} = \frac{\partial \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial u} \log \mu \right)}{\partial v},$$

if

$$\frac{\partial \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right)}{\partial u} = \frac{\partial \left( \frac{1}{\lambda} \right)}{\partial v},$$

so we have the

**Theorem :** *When the point equation of S has an equal invariant, then the point equation of S' also has an equal invariant. The converse of this theorem is also true.*

## § 7

We consider the surface S, whose rectangular point coordinates  $x, y, z$  satisfy the equation<sup>(14)</sup>

$$(39) \quad -\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sin w}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \log \cos w}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0.$$

If S is the first focal sheet of a congruence, the second sheet S<sub>1</sub> is given by

$$(40) \quad \begin{cases} x_1 = x - \left( \frac{\partial \log \cos w}{\partial u} \right)^{-1} x_u, & y_1 = y - \left( \frac{\partial \log \cos w}{\partial u} \right)^{-1} y_u, \\ z_1 = z - \left( \frac{\partial \log \cos w}{\partial u} \right)^{-1} z_u. \end{cases}$$

From this it follows that the coordinates  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  of the mean point of the line have the expressions

$$(41) \quad \begin{cases} \bar{x} = x - \left( 2 \frac{\partial \log \cos w}{\partial u} \right)^{-1} x_u, & \bar{y} = y - \left( 2 \frac{\partial \log \cos w}{\partial u} \right)^{-1} y_u, \\ \bar{z} = z - \left( 2 \frac{\partial \log \cos w}{\partial u} \right)^{-1} z_u. \end{cases}$$

(14) I. c. (7).

From EISENHARTS paper<sup>(15)</sup> it follows that the necessary and sufficient condition that the tangent to the curves  $v=\text{const.}$  on  $S$  form a congruence of RIBAUCOUR, is that the functions  $w$  satisfy the condition

$$(42) \quad -\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial}{\partial v} \log \sin w \right) + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial}{\partial u} \log \cos w \right) \\ - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left( \frac{\partial}{\partial u} \log \cos w \right) = 0.$$

In a similar manner we find that for the tangent to the curve  $u=\text{const.}$  to form a congruence of this kind, it is necessary and sufficient that

$$(43) \quad -\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial}{\partial v} \log \sin w \right) + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial}{\partial u} \log \cos w \right) \\ + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial}{\partial v} \log \sin w \right) = 0.$$

Subtracting these two equations of conditions we get

$$(44) \quad \frac{\partial^2 \log \left( \frac{\partial}{\partial v} \log \sin w \cdot \frac{\partial}{\partial u} \log \cos w \right)}{\partial u \partial v} = 0,$$

so that for the tangents to the curves of both families to be congruences of RIBAUCOUR it is necessary that

$$(45) \quad \frac{\partial}{\partial v} (\log \sin w) \cdot \frac{\partial}{\partial u} (\log \cos w) = U \cdot V,$$

where  $U$  is a function of  $u$  alone, and  $V$  of  $v$  alone.

However, this is not the sufficient condition.

When the condition (42) is satisfied, the point equation of the mean surface of  $C$  becomes

$$(46) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \left[ \frac{\partial}{\partial v} (\log \sin w) + \frac{\partial}{\partial v} \log \left( \frac{\partial}{\partial u} \log \cos w \right) \right] \frac{\partial \theta}{\partial u} \\ - \frac{\partial}{\partial u} (\log \cos w) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u} = 0.$$

## § 8

If  $e^\tau$  is a solution of the equation (10), the surface, whose co-ordinates  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  are given by

$$(47) \quad \bar{x} = \frac{x}{e^\tau}, \quad \bar{y} = \frac{y}{e^\tau}, \quad \bar{z} = \frac{z}{e^\tau},$$

is referred to as a conjugate system.

In fact, the point equation of  $S$  is

$$(48) \quad -\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \left( \frac{\sigma}{\lambda} + \varphi_v \right) \frac{\partial \theta}{\partial u} + \left( \frac{1}{\lambda} + \varphi_u \right) \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

When

$$(49) \quad \begin{cases} \varphi_u = -\frac{1}{\lambda}, \\ \varphi_v = -\frac{\sigma}{\lambda} \end{cases}$$

then (48) becomes

$$(50) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = 0,$$

so we get the

**Theorem:** When  $e^\tau$  is a solution of (10), and (49) exists, then  $\bar{S}$  is a surface of translation.

When

$$(51) \quad -\frac{1}{\lambda} du - \frac{\sigma}{\lambda} dv = 0$$

in (10) exist, then

$$(52) \quad d\varphi = 0,$$

$$\text{i. e.} \quad (53) \quad \varphi = \text{const.},$$

so we have the

**Theorem:** When (51) exists, then  $\varphi$  in (47) must be constant.

## § 9

When the condition

$$(54) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right) - \frac{1}{\partial v} \left( \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left( \frac{1}{\lambda} \right) = 0.$$

is satisfied in (10), the point equation of the mean surface of C becomes<sup>(16)</sup>

$$(55) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \left[ \frac{\sigma}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial v} \log \left( \frac{1}{\lambda} \right) \right] \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

From (54) and (55), it follows that

$$(56) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \left[ \int \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\lambda} \right) du \right] \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

When in (56),  $\int \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\lambda} \right) du$  or  $\frac{1}{\lambda}$  is zero, then the coordinates of the surface, whose rectangular coordinates satisfy (56), can be found by quadratures.

When the condition

$$(57) \quad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left( \frac{1}{\lambda} \right) = 0,$$

is satisfied in (56), that the point equation of the mean surface becomes<sup>(17)</sup> also

$$(58) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \left[ \int \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\lambda} \right) du + \frac{\partial}{\partial v} \log \left( \frac{1}{\lambda} \right) \right] \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

The condition of equal invariants in (55) is

$$(59) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left( \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\lambda} \right),$$

and the same condition in (10) is

(16) I. c. (3), p. 188.

$$(60) \quad -\frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{\sigma}{\lambda} \right) = -\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\lambda} \right),$$

From (59) and (60) follows (57),

If we find the condition of equal invariants in (58), then we get (57) also.

## § 10

Consider a surface  $S$  referred to any conjugate system of lines  $u=\text{const.}$  and  $v=\text{const.}$ ; then the rectangular coordinates  $x, y, z$  of its points are particular integrals of an equation of LAPLACE of the form<sup>(17)</sup>

$$(61) \quad -\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{\sigma}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

Let  $x_1, y_1, z_1$  denote the coordinates of the point on the second sheet,  $S_1$ , which corresponds to the point  $(x, y, z)$  on  $S$ , then

$$(62) \quad x_1 = x + \lambda \frac{\partial x}{\partial u}, \quad y_1 = y + \lambda \frac{\partial y}{\partial u}, \quad z_1 = z + \lambda \frac{\partial z}{\partial u}.$$

The equation of other focal sheet  $S_{-1}$  is

$$(63) \quad x_{-1} = x + \frac{\lambda}{\sigma} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad y_{-1} = y + \frac{\lambda}{\sigma} \frac{\partial y}{\partial v},$$

$$z_{-1} = z + \frac{\lambda}{\sigma} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

From (62) and (63) we get

$$(64) \quad (x_{-1} \cdot x_1) = (x \cdot x) + \lambda \left( x \frac{\partial x}{\partial u} \right) + \frac{\lambda}{\sigma} \left( x \frac{\partial x}{\partial v} \right)$$

$$+ \frac{\lambda^2}{\sigma} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right).$$

When  $S$  is a sphere, and  $S_1, S_{-1}$  touch each other then from (64) we get

$$(65) \quad \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) = 0$$

so we have the

**Theorem :** *When  $S_1$  and  $S_{-1}$  touch with each other and  $S$  is a sphere then curve systems  $v=\text{const.}$  and  $u=\text{const.}$  are perpendicular to each other.*

In this case, when  $S$  is a sphere and  $S_1$ ,  $S_{-1}$  are perpendicular to each other then from (64) we get

$$(66) \quad \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) = -\frac{\sigma}{\lambda^2}.$$

From (66) we can find the angle between  $u=\text{const.}$  and  $v=\text{const.}$

## § 11

We consider the surface  $\bar{S}$ , which is transformed from the surface  $S$  by the relation

$$(67) \quad \begin{cases} x = x - \frac{\lambda}{\sigma} \frac{\partial x}{\partial v} - \lambda \frac{\partial x}{\partial u}, & y = y - \frac{\lambda}{\sigma} \frac{\partial y}{\partial v}, \\ \bar{x} = z - \frac{\lambda}{\sigma} \frac{\partial z}{\partial v}, \end{cases}$$

and the radial transformation

$$(68) \quad x' = \frac{x}{\mu}, \quad y' = \frac{y}{\mu}, \quad z' = \frac{z}{\mu},$$

then from (67) and (68), we get

$$(69) \quad (x' \bar{x}) = \frac{1}{\mu} (xx) - \frac{\lambda}{\sigma} (xx_u) - \lambda (xx_v).$$

When  $S$  is a sphere, then from (69) we get

$$(70) \quad (x' \bar{x}) = \frac{1}{\mu}.$$

From (70) we can calculate the cosine of the angle between  $S'$  and  $\bar{S}$ .

$$(71) \quad \sum \left( X - x + -\frac{\lambda}{\sigma} x_v + \lambda x_u \right) x_v = 0$$

is the equation of the plane through  $\bar{X}$  and normal to the curve

$$v = \text{const.}$$

From (71) we have

$$(72) \quad \sum \left( X x_v - x x_v + \frac{\lambda}{\sigma} x_v^2 + \lambda x_u x_v \right) = 0,$$

or

$$(73) \quad \sum (X x_v - x x_v) + \frac{\lambda}{\sigma} G + \lambda F = 0.$$

When S is a sphere, then (71) becomes

$$(74) \quad \sum \left( X x_v + \frac{\lambda}{\sigma} x_v^2 \right) = 0,$$

or

$$(75) \quad \sum X x_v + \frac{\lambda}{\sigma} G = 0,$$

By the same reason the equation to the plane through  $\bar{x}$  and normal to the curve

$$u = \text{const.}$$

is

$$(76) \quad \sum X x_u + \lambda E = 0,$$

where S is a sphere.

## § 12

For all surfaces whose rectangular coordinates satisfy an equation of the form

$$(77) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + UV' \frac{\partial \theta}{\partial u} + U'V \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

the tangents to the curves

$$v = \text{const.}$$

and that to the curves

$$u = \text{const.}$$

form congruences of RIBAUCCOUR.<sup>(18)</sup>

From (77) we know that

$$(78) \quad \frac{\partial}{\partial u}(UV') = \frac{\partial}{\partial v}(U'V),$$

so we get the

**Theorem:** *The point equation, whose rectangular coordinates satisfy (77) has equal invariants.*

### § 13

We consider here (36)

$$\text{or} \quad (79) \quad -\frac{2^2\theta}{\partial u \partial v} + \left( \frac{\sigma}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{1}{\lambda} \right) \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0$$

again.

If  $F$  be the surface whose rectangular coordinates  $x, y, z$  satisfy (79) and if  $F$  is the first focal sheet of a congruence, then the second sheet  $F_1$  whose rectangular coordinates are  $x_1, y_1, z_1$ , is given by<sup>(19)</sup>

$$(80) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial v} &= \left[ -2\lambda^2 \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\lambda} \right) - \sigma \right] \frac{\partial x}{\partial u}, \\ \frac{\partial y_1}{\partial v} &= \left[ -2\lambda^2 \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\lambda} \right) - \sigma \right] \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial z_1}{\partial v} &= \left[ -2\lambda^2 \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\lambda} \right) - \sigma \right] \frac{dz}{\partial u}. \end{aligned}$$

(18) EISENHART, L. P.: A Treatise on The Differential Geometry of Curves and Surfaces, p. 424.

(19) EISENHART, L. P.: A Treatise on The Differential Geometry of Curves and Surfaces, p. 405.



In order that  $F_1$  be a curve,  $x_1, y_1, z_1$  must be function of  $u$  alone.

From (80) it follows that the condition for this is

$$(81) \quad -2\lambda^2 \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\lambda} \right) = \sigma$$

or  $(81') \quad 2 \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \sigma.$

In like manner the condition that  $F_{-1}$  be a curve is

$$(82) \quad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left( \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial v} \log \left( \frac{1}{\lambda} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{\sigma}{\lambda} \right) + \frac{\sigma}{\lambda^2} = 0.$$

## § 14

We consider now two surfaces

$$(83) \quad x = \varphi_1(u, v), \quad y = \varphi_2(u, v), \quad z = \varphi_3(u, v),$$

and

$$(84) \quad x = \psi_1(u, v), \quad y = \psi_2(u, v), \quad z = \psi_3(u, v),$$

and the transformation<sup>(20)</sup>

$$(85) \quad \varphi_u = \psi_u, \quad \varphi_v = -\psi_v;$$

then from

$$(86) \quad \lambda \varphi_{uv} + \sigma \varphi_u + \varphi_v = 0$$

we get

$$(87) \quad \bar{\lambda} \psi_{uv} + \bar{\sigma} \psi_v - \psi_u = 0,$$

where

$$(88) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \bar{\lambda} = \frac{-ge + f^2}{g_v f + e_u g}, & \bar{\sigma} = \frac{eg_v + fe_u}{ge_u + fg_v}, \\ e = \sum \psi_u^2, & f = \sum \psi_u \psi_v, & g = \sum \psi_v^2. \end{cases}$$

(20) FORSYTH: Theory of Functions, Cambridge, (1918), p. 9.

This equation belongs to a parabolic one.

### § 15

Consider the surface  $S$  in reference to any conjugate system of lines

$$(89) \quad u = \text{const.}, \quad v = \text{const.};$$

then the rectangular coordinates  $x, y, z$  of its points are particular integrals of LAPLACE's equation of the form

$$(90) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{\sigma}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

where

$$(91) \quad \sigma = \frac{GE_u - FG_u}{EG_u - FE_u}, \quad \frac{1}{2}\lambda = \frac{EG - F^2}{E_u F - G_u E},$$

$$(92) \quad ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2,$$

and  $ds$  is the linear element.

When

$$EG \neq F^2, \quad E_u F = G_u E,$$

it follows from (90) that  $S$  is the surface of translation.

Now we consider the surface  $S_1$ , whose rectangular coordinates  $x_1, y_1, z_1$  satisfy the relation

$$(93) \quad x_1 = x + ix_u, \quad y_1 = y + iy_u, \quad z_1 = z + iz_u, \quad i = \sqrt{-1},$$

then we have

$$(94) \quad \sum x_1^2 = \sum x^2 + 2i \sum x x_u - \sum x_u^2.$$

When  $S$  and  $S_1$  are both spheres, then from (94) we get<sup>(21)</sup>

$$(95) \quad E = \text{const.},$$

so we have the

(21) 1. c. (2).

**Theorem :** When  $S$  and  $S_1$  are spheres, then (95) follows.

### § 16

We consider the surface

$$(96) \quad \bar{\bar{x}} = \frac{1}{2} (x + i\bar{x}), \quad i = \sqrt{-1},$$

where  $x$ ,  $\bar{x}$  are also two other surfaces.<sup>(22)</sup>

From (96) we have

$$(97) \quad \begin{cases} \bar{\bar{E}} = \frac{1}{4} [(2i + 1 + 2i\lambda_u) E - \bar{E} + i\lambda E_u], \\ \bar{G} = \frac{1}{4} [G - \bar{G} = 2\mu F], \\ \bar{F} = \frac{1}{4} [(1 + i + i\lambda_u) F + \mu E - \bar{F} + i\lambda F_u - \frac{1}{2} i\lambda E_v], \end{cases}$$

so the equation of the *automecoic curve* of the K-surface and the  $x$ -surface is

$$(98) \quad \begin{aligned} & [2(1 + \lambda_u) E + i E + \lambda E_u] du^2 \\ & + 2[(1 + \lambda_u) E + i\bar{F} + \mu E + \lambda F_u - \frac{1}{2} \lambda E_v] du dv \\ & + [i G + 2\mu F] dv^2, \end{aligned}$$

and the equation of the *anti-automecoic curve* of the K-surface and the  $x$ -surface is

$$(99) \quad \begin{aligned} & [2(i + 1 + i\lambda_u) E - \bar{E} + i\lambda E_u] du^2 \\ & + 2[(2 + i + i\lambda_u) \bar{F} - F + \mu E + i\lambda F_u - \frac{1}{2} i\lambda E_v] du dv \\ & + [2G - \bar{G} + 2\mu F] dv^2. \end{aligned}$$

### § 17

If we but, in the equation in one of my previous papers,<sup>(21)</sup>

$$(100) \quad \bar{\bar{x}} = x + \lambda x_u,$$

(22) NAKAJIMA, S.: Über zwei Flächen, die eine Beziehung haben, (II), Tôhoku Math. Journ. 33 (1930) p. 153.

(23) NAKAJIMA, S.: Über zwei Flächen, die eine Beziehung haben, I, Tôhoku Math. Journ. 30 (1928) p. 142.

$$\bar{x}_v = x_v + \lambda_v x_u + \lambda_{x_{uv}} v x_v,$$

then we get

$$(101) \quad \lambda x_{uv} + \lambda_v x_u + (1-v) x_v = 0.$$

From (101) we get

$$(102) \quad \lambda x_u x_{uv} + \lambda_v x_u x_u + (1-v) x_v x_v = 0,$$

or

$$(103) \quad \frac{1}{2} \lambda E_v + \lambda_v E + (1-v) F = 0.$$

From (10) we have

$$(104) \quad \lambda x_v x_{uv} + \lambda_v x_u x_v + (1-v) x_v x_v = 0,$$

or

$$(105) \quad \frac{1}{2} \lambda G_u + \lambda_v F + (1-v) G = 0.$$

From (104), (105) we know that

$$(106) \quad \begin{cases} \frac{1-v}{\lambda} = \frac{FE_v - EG_u}{2(EG - F^2)}, \\ \lambda = \exp. \left\{ \frac{1}{2} \int \frac{G_u F - GE_v}{EG - F^2} dv \right\}. \end{cases}$$

From (106) we can find  $v$ .

The condition that the point equation of  $S$ , whose rectangular coordinates satisfies (101) may have equal invariants, is

$$(107) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{G_u F - GE_v}{2(EG - F^2)} \right\} = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{FE_v - EG_u}{2(EG - F^2)} \right\}.$$

## § 18

If we put

$$(108) \quad \bar{x} = x + \lambda x_u,$$

$$(109) \quad \bar{x}_v = x_v + \lambda_v x_u + \lambda_{x_{uv}} v x_u + \nu x_v$$

in the same equation,<sup>(24)</sup> then we have

$$(110) \quad \lambda \xi_{uv} + (\lambda_v - \mu) \xi_u + (1 - \nu) \xi_v = 0.$$

From (110) we have

$$(111) \quad \frac{\lambda_v - \mu}{\lambda} = \frac{G_u F - E_v G}{2(EG - F^2)},$$

$$(112) \quad \frac{\lambda - \nu}{\lambda} = \frac{E_v F - G_u E}{2(EG - F^2)}.$$

When in the equation (110) of the surface

$$(113) \quad \frac{G_u F - E_v G}{EG - F^2} = 0,$$

or

$$(114) \quad \frac{E_v F - G_u E}{EG - F^2} = 0$$

is zero, the coordinates of the surface  $S$ , whose coordinates satisfy (110), can be found by quadratures.

The tangents to the curves

$$(115) \quad v = \text{const.}$$

from a congruence,  $C$ , for which  $S$ , whose rectangular coordinates satisfy (110), is one of the focal sheets.

Let  $x_1, y_1, z_1$  denote the coordinates of the point on the second sheet,  $S_1$ , which corresponds to the point  $(x, y, z)$  on  $S$ .

From this definition it follows that

$$(116) \quad \begin{cases} x_1 = x + \frac{2(EG - F^2)}{G_u F - E_v G} x_v, \\ y_1 = y + \frac{2(EG - F^2)}{G_u F - E_v G} y_v, \\ z_1 = z + \frac{2(EG - F^2)}{G_u F - E_v G} z_v. \end{cases}$$

where

$$E, F, G$$

are a function of  $u$  and  $v$ .

In a similar manner, the tangents to the curve

$$u = \text{const.}$$

on  $S$  form a congruence  $C_{-1}$  with  $S$  for one of the focal sheets and a new surface  $S_{-1}$  for the other focal sheet. By analogy, we know that the rectangular coordinates  $x_{-1}$ ,  $y_{-1}$ ,  $z_{-1}$  are given by the equations

$$(117) \quad \begin{cases} x_{-1} = x + \frac{2(EG - F^2)}{E_v F - G_u E} x_u, \\ y_{-1} = y + \frac{2(EG - F^2)}{E_v F - G_u E} y_u, \\ z_{-1} = z + \frac{2(EG - F^2)}{E_v F - G_u G} z_u. \end{cases}$$

Now we consider a radial transformation

$$(118) \quad x' = \frac{x}{\lambda}, \quad y' = \frac{y}{\lambda}, \quad z' = \frac{z}{\lambda},$$

then the coordinates  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  of  $S'$  will satisfy the equation

$$(119) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial u \partial v} = & \left( \frac{E_v G - G_u F}{2(EG - F^2)} - \frac{\partial}{\partial v} \log \lambda \right) \frac{\partial \theta'}{\partial u} \\ & + \left( \frac{G_u E - F E_v}{2(EG - F^2)} - \frac{\partial}{\partial u} \log \lambda \right) \frac{\partial \theta}{\partial v}. \end{aligned}$$

The equation of the normal plane through  $(x_{-1}, y_{-1}, z_{-1})$  to the curve

$$u = \text{const.}$$

is

$$(120) \quad \sum \left( X - x - \frac{2(EG - F^2)}{E_v E - G_u E} x_u \right) x_u = 0.$$

From (110) it follows that the coordinates  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  of the mean point of the line have the expressions<sup>(25)</sup>

(25) MATSUMURA, S.: On a pair of surfaces mutually related, Tôhoku Math. Journ. 39 (1934), p. 17

$$(121) \quad \begin{cases} \bar{x} = x + \frac{EG - F^2}{E_v F - G_u E} x_u, \\ \bar{y} = y + \frac{EG - F^2}{E_v F - G_u E} y_u, \\ \bar{z} = z + \frac{EG - F^2}{E_v F - G_u E} z_u, \end{cases}$$

so we have

$$(122) \quad \sum \bar{x} = \sum x^2 + \left( \frac{EG - F^2}{E_v F - G_u E} \right)^2 \sum x_u^2 + \frac{2(EG - F^2)}{E_v F - G_u F} \sum x_u x.$$

When

$$(123) \quad \begin{aligned} \sum x^2 &= 1, \\ \sum x &= 1 + \left( \frac{EG - F^2}{E_v F - G_u E} \right)^2 \cdot E. \end{aligned}$$

When the parametric lines upon  $\sum x^2 = 1$  form an orthogonal system,

$$F = 0;$$

so we have

$$(124) \quad \sum x^2 = 1 + \frac{EG^2}{G_u^2}.$$

When  $\sum \bar{x}^2 = \text{const.}$

$$(125) \quad 1 + \frac{EG^2}{G_u^2} = \text{const.},$$

or

$$(126) \quad \log G = \text{const.} \int E du + V,$$

where  $V$  is a function of  $v$  only.

Equation (126) is the same with (3') in my paper.<sup>(26)</sup>

From (126) follows the

**Theorem:** *When S is a sphere and the locus of the mean points is also a sphere, then follows (126).*

From this we get, by differentiation with respect to  $u$  and  $v$  and easy reductions by means of these equations themselves and (110), the following :

$$\begin{aligned}
 (127) \quad & -\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v} + \left[ \frac{\lambda_v - \mu}{\lambda} + \lambda \frac{\partial \left( \frac{1-\nu}{\lambda} \right)}{\partial v} \right] \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1-\nu}{\lambda} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \\
 & = -\frac{\lambda}{2} \left[ \frac{\partial \left( \frac{\lambda_v - \mu}{\lambda} \right)}{\partial u} - \frac{\partial \left( \frac{1-\nu}{\lambda} \right)}{\partial v} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left( \frac{1-\nu}{\lambda} \right) \right] \frac{\partial x}{\partial u},
 \end{aligned}$$

and similarly for  $y$  and  $z$ .

The congruences of RIBAUCCOUR may be defined as those for which the developables meet the mean surface of the congruence in a conjugate system.

From the above discussion it is clear that the ruled surface  $u = \text{const.}$ ,  $v = \text{const.}$  are the developables, and consequently, it follows from (127) that the necessary and sufficient condition that the tangents to the curve  $v = \text{const.}$  on S form a congruence of RIBAUCCOUR

is that the function  $\frac{\lambda_v - \mu}{\lambda}$  and  $\frac{1-\nu}{\lambda}$  satisfy the condition

$$(128) \quad \frac{\partial \left( \frac{\lambda_v - \mu}{\lambda} \right)}{\lambda} - \frac{\partial \left( \frac{1-\nu}{\lambda} \right)}{\partial v} + \frac{\partial^2 \log \left( \frac{1-\nu}{\lambda} \right)}{\partial u \partial v} = 0.$$

In a similar manner we find that for the tangents to the curves  $u = \text{const.}$  to form a congruence of this kind, it is necessary and sufficient that

$$(129) \quad \frac{\partial \left( \frac{\lambda_v - \mu}{\lambda} \right)}{\partial u} - \frac{\partial \left( \frac{1-\nu}{\lambda} \right)}{\partial v} - \frac{\partial^2 \log \left( \frac{\lambda_v - \mu}{\lambda} \right)}{\partial u \partial v} = 0.$$



Subtracting these two equations of conditions we get

$$(130) \quad \frac{\partial^2 \log \left( \frac{\lambda_v - \mu}{\lambda^2} \right)}{\partial u \partial v} = 0,$$

so that, in order that the tangents to the curves of both families be congruences of RIBAUCCOUR, it is necessary that

$$(131) \quad \frac{\lambda_v - \mu}{\lambda^2} = U \cdot V,$$

where  $U$  is a function of  $u$  alone, and  $V$ , of  $v$  alone.

When the condition (128) is satisfied, the point equation of the mean surface becomes

$$(132) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \left[ -\frac{\lambda_v - \mu}{\lambda} + \frac{\partial \log \left( \frac{1 - \nu}{\lambda} \right)}{\partial v} \right] \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1 - \nu}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

and its invariants are

$$(133) \quad \begin{cases} h = -\frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{\lambda_v - \mu}{\lambda} + \frac{\partial \log \left( \frac{1 - \nu}{\lambda} \right)}{\partial v} \right] \\ \quad + \frac{1 - \nu}{\lambda} \left[ -\frac{\lambda_v - \mu}{\lambda} + \frac{\partial \log \left( \frac{1 - \nu}{\lambda} \right)}{\partial v} \right], \\ k = -\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1 - \nu}{\lambda} \right) + \frac{1 - \nu}{\lambda} \left[ \frac{\lambda_v - \mu}{\lambda} + \frac{\partial \log \left( \frac{1 - \nu}{\lambda} \right)}{\partial v} \right]. \end{cases}$$

When  $h$  and  $k$  are both zero, then

$$(134) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{\lambda_v - \mu}{\lambda} + \frac{\partial \log \left( \frac{1 - \nu}{\lambda} \right)}{\partial v} \right] = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1 - \nu}{\lambda} \right)$$

Equation (134) is the condition that

$$\frac{\lambda_v - \mu}{\lambda} + \frac{\partial \log \left( \frac{1-\nu}{\lambda} \right)}{\partial v}$$

and

$$\frac{1-\nu}{\lambda}$$

are the partial derivatives of a function  $\lambda$  with respect to  $v$  and  $u$  respectively.

Let

$$(135) \quad \frac{\lambda_v - \mu}{\lambda} + \frac{\partial \log \left( \frac{1-\nu}{\lambda} \right)}{\partial v} = \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial v},$$

$$\frac{1-\nu}{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial u};$$

then each of equations (133) is reduced to

$$(136) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial u \partial v} + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right) \left( -\frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) = 0.$$

This may be written

$$(137) \quad \frac{\partial}{\partial u} \log \left( \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) = - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right),$$

whose integral is

$$(138) \quad \bar{\lambda} = \log (U + V),$$

where  $U$  is a function of  $u$  alone, and  $V$ , of  $v$  alone.

Hence,

$$(139) \quad \frac{\lambda_v - \mu}{\lambda} + \frac{\partial \log \left( \frac{1-\nu}{\lambda} \right)}{\partial v} = \frac{V'}{U+V}$$

$$\frac{1-\nu}{\lambda} = \frac{U}{U+V}$$

and; (110) becomes

$$(140) \quad \theta_{uv} + \frac{2V'}{U+V} \theta_u + \frac{U'}{U+V} \theta_v = 0,$$

giving

$$(141) \quad \begin{cases} x = -\frac{U_1 + V_1}{U + V}, \\ y = \frac{U_2 + V_2}{U + V}, \\ z = \frac{U_3 + V_3}{U + V}, \end{cases}$$

so the parametric curves on the surface  $S$  form a conjugate system, where dash means differentiation.

Consider a surface  $F$  with respect to any conjugate system of lines,

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.};$$

then the rectangular coordinates  $x, y, z$  of its points are particular integral of LAPLACE's equation of the form (132).

If  $F$  is the first focal sheet of a congruence, the second sheet  $F$ , is given by

$$(142) \quad \begin{cases} x_1 = x + \frac{\lambda}{1-v} x_u, \\ y_1 = y + \frac{\lambda}{1-v} y_u, \\ z_1 = z + \frac{\lambda}{1-v} z_u. \end{cases}$$

From this it follows that the coordinates  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  of the mean point of the lines have the expressions

$$(143) \quad \begin{cases} \bar{x} = x + \frac{\lambda}{2(1-v)} x_u, \\ \bar{y} = y + \frac{\lambda}{2(1-v)} y_u, \\ \bar{z} = z + \frac{\lambda}{2(1-v)} z_u. \end{cases}$$

The condition that the point equation of  $S$  may have equal invariants is

$$(144) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\lambda_v - \mu}{\lambda} \right\} = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{1 - \nu}{\lambda} \right\}$$

i. e., when  $\lambda, \nu$  are constant., then  $\mu$  must be a function of  $v$  alone.

### § 19

From (4) we get by differentiation with respect to  $u$  and  $v$ , and ready reductions by means of these equations themselves and (1), we get the following: <sup>(27)</sup>

$$(145) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \left[ -\frac{\phi_{uv}}{2\phi_u} - \frac{2\phi_v}{\phi_{uv}} \frac{\partial}{\partial v} \left( -\frac{1}{2} \frac{\phi_{uv}}{\phi_v} \right) \right] \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \\ + \left( -\frac{1}{2} \frac{\phi_{uv}}{\phi_v} \right) \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = -\frac{\phi_v}{\phi_{uv}} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{1}{2} \frac{\phi_{uv}}{\phi_u} \right) \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial v} \left( -\frac{\phi_{uv}}{\phi_v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left( -\frac{\phi_{uv}}{2\phi_v} \right) \right] \frac{\partial x}{\partial u},$$

and similar result is obtained with respect to  $y$  and  $z$ .

The congruences of RIBAUOUR may be defined as those which the developables meet the mean surface of the congruence in a conjugate system.

From the above discussions it is clear that the ruled surfaces  $u=\text{const.}$  and  $v=\text{const.}$  are the developables, and, consequently, it follows from (145) that the necessary and sufficient condition that the tangent to the curves  $v=\text{const.}$  on  $S$  form a congruence of RIBAUOUR is that the functions

$$-\frac{\phi_{uv}}{\phi_u}$$

and

(27) l. c. (3), p. 186.

$$\frac{\phi_{uv}}{\phi_v}$$

satisfy the condition

$$(146) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{\phi_{uv}}{2\phi_u} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( -\frac{\phi_{uv}}{2\phi_v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left( -\frac{\phi_{uv}}{2\phi_v} \right) = 0.$$

In a similar manner we find that for the tangents to the curves  $u = \text{const.}$  to form a congruence of this kind, it is necessary and sufficient that

$$(147) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{\phi_{uv}}{2\phi_u} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( -\frac{\phi_{uv}}{2\phi_v} \right) - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left( -\frac{\phi_{uv}}{2\phi_u} \right) = 0.$$

Subtracting these two equations of conditions we get

$$(148) \quad -\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\phi_{uv}^2}{4\phi_u \phi_v} = 0,$$

so that for the tangents to the curve of both families to be congruences of RIBAUCOUR it is necessary that

$$(149) \quad \frac{\phi_{uv}^2}{4\phi_u \phi_v} = U \cdot V,$$

where  $U$  is a function of  $u$  alone and  $V$ , of  $v$  alone. However, this is not the sufficient condition.

Solving

$$\frac{\phi_{uv}}{\phi_u}$$

and substituting the result in (146), we have

$$(150) \quad \frac{\partial^2 \log \left( \frac{\phi_{uv}}{2\phi_v} \right)}{\partial u \partial v} - \frac{\partial}{\partial v} \left( -\frac{\phi_{uv}}{2\phi_v} \right) + \frac{4UV\phi_v^2}{\phi_{uv}^2} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{\phi_{uv}}{2\phi_v} \right) - \frac{2UV\phi_v}{\phi_{uv}} = 0,$$

where the prime denotes differentiation.

When the condition (146) is satisfied, the point equation of the mean surface of C becomes

$$(151) \quad -\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \left[ -\frac{\phi_{uv}}{2\phi_u} + \frac{\partial}{\partial v} \log \left( -\frac{\phi_{uv}}{2\phi_v} \right) \right] \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\phi_{uv}}{2\phi_v} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

The conjugate system on S is composed of the lines of curvature ; and

$$-\frac{\phi_{uv}}{\phi_u}$$

and

$$-\frac{\phi_{uv}}{\phi_v}$$

have the expressions

$$(152) \quad \begin{cases} \frac{\phi_{uv}}{2\phi_u} = -\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}, \\ \frac{\phi_{uv}}{2\phi_v} = -\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}. \end{cases}$$

From these forms and (146) it follows that the necessary and sufficient condition, that the tangents to the lines of curvature

$$v = \text{const.}$$

on S forms a congruence of RIBAUCCOUR, when S is an isothermic surface, is

$$(153) \quad -\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\phi_{uv}}{2\phi_v} = 0.$$

When the conjugate system on S is composed of the lines of curvature, we get

$$(154) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{\phi_u}{2\phi_u} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( -\frac{\phi_v}{2\phi_v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left( -\frac{\phi_{uv}}{2\phi_v} \right) = 0.$$

When parametric lines are not the lines of curvature, the tangents to the curves  $v=\text{const.}$  form a cyclic congruence of RIBAUCCOUR if the functions  $E, F, G$  satisfy (146) and

$$(155) \quad -\frac{\phi_{uv}}{\phi_v} - \frac{\partial \log F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \log \left\{ -\frac{\phi_{vv}}{2\phi_v} \right\} = 0.$$

Again, for the tangents to the lines  $u=\text{const.}$  to form a cyclic congruence of RIBAUCCOUR, the functions must satisfy the equations

$$(156) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{\phi_{uv}}{2\phi_u} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( -\frac{\phi_{uv}}{2\phi_v} \right) - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left( -\frac{\phi_{vv}}{2\phi_v} \right) = 0,$$

$$(157) \quad -\frac{\phi_{uv}}{\phi_u} + \frac{\partial \log F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v} \log \left( -\frac{\phi_{uv}}{2\phi_u} \right) = 0.$$

If we differentiate (155) with respect to  $v$ , and (157) with respect to  $v$ , and subtract, we get

$$(158) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left( -\frac{\phi_{uv}}{\phi_v} \right) - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left( -\frac{\phi_{vv}}{2\phi_v} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{\phi_{uv}}{\phi_u} \right) - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left( -\frac{\phi_{uv}}{2\phi_u} \right).$$

## § 20

If  $N(x)$  is a net whose cartesian coordinates satisfy the equation (13), a parallel net  $N'(x')$  is defined by

$$(159) \quad \frac{\partial x'}{\partial u} = h \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x'}{\partial v} = l \frac{\partial x}{\partial v},$$

where  $h$  and  $l$  are a pair of solutions of

$$(160) \quad \frac{\partial h}{\partial v} = (-l+h) \frac{\sigma}{\lambda}, \quad \frac{\partial l}{\partial u} = (-h+l) \frac{1}{\lambda}.$$

If  $\theta$  is any solution of (13), and  $\theta'$  is the solution of the point equation of  $N'$  given by the quadrature

$$(161) \quad \frac{\partial \theta'}{\partial u} = h \frac{\partial \theta}{\partial u}, \quad \frac{\partial \theta'}{\partial v} = l \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

then equations of the form

$$(162) \quad x_1 = x - \frac{\theta}{\theta'} x'$$

define a net  $N_1$ .

From (162) we have by differentiation

$$(163) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= \frac{\tau}{\theta^2} \left( x' \frac{\partial \theta}{\partial u} - \theta' \frac{\partial x}{\partial u} \right), \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= \frac{\bar{\sigma}}{\theta^2} \left( x' \frac{\partial \theta}{\partial v} - \theta' \frac{\partial x}{\partial v} \right), \end{aligned}$$

where we have put

$$(164) \quad \tau = h\theta - \theta', \quad \bar{\sigma} = l\theta - \theta'.$$

Hence the first fundamental coefficients  $E_1$ ,  $F_1$ ,  $G_1$  of  $N_1$  are given by

$$(165) \quad \begin{cases} E_1 = \frac{\tau^2}{\theta^2} \left[ \sum x'^2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 - 2 \sum x \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \theta' \frac{\partial \theta}{\partial u} + \theta'^2 E \right], \\ F_1 = \frac{\tau \bar{\sigma}}{\theta^2} \left[ \sum x'^2 \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} - \sum x' \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \theta' \frac{\partial \theta}{\partial v} \right. \\ \quad \left. - \sum x' \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \theta' \frac{\partial \theta}{\partial u} + \theta'^2 F \right], \\ G_1 = \frac{\bar{\sigma}^2}{\theta^2} \left[ \sum x'^2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2 - 2 \sum x' \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \theta' \frac{\partial \theta}{\partial v} + \theta'^2 G \right]. \end{cases}$$

Hence the equation of the *automecoic curves* are<sup>(28)</sup>

$$(166) \quad (E_1 - E) du^2 + 2(F_1 - F) dudv + (G_1 - G) dv^2 = 0$$

and the *anti-automecoic curves* are

$$(167) \quad (E' + E) du^2 + 2(F_1 + F) dudv + (G_1 + G) dv^2 = 0.$$

(28) OGURA, K.: Note on the Representation of Surfaces, Tôhoku Math. Journ. 10 (1916) p. 90.



## § 21

We consider

$$(168) \quad \xi_{uv} + \frac{\sigma}{\lambda} \xi_u + \frac{1}{\lambda} \xi_v = 0$$

and put

$$(169) \quad -\left(\varphi_v \cot w + \frac{\varphi_{vv}}{\varphi_v}\right) : \frac{\sigma}{\lambda} = \varphi_u \cot w : \frac{1}{\lambda} = 1,$$

then

$$(170) \quad C_{uv} - \left(\varphi_v \cot w + \frac{\varphi_{vv}}{\varphi_v}\right) C_u + \varphi_u \cot w \cdot C_v = 0,$$

where  $\varphi$ , any function of  $u, v, w$ , is constant and

$$(171) \quad 0 = \varphi_u \varphi_v + \cot w \cdot \varphi_{uv} - \cot w \cdot \frac{\varphi_u}{\varphi_v} \varphi_{vv}.$$

In this case, we can find, after VOLK<sup>(29)</sup>

$$(172) \quad C = \cos(w+t) \int \frac{V e^{-\frac{1}{\cos(w+t)} u t}}{\cos(w+t)} dv + U \cos(w+t).$$

## § 22

If  $S$  and  $S_1$  be two surfaces corresponding to parallelism of tangent planes and denoted by  $x, y, z; x_1, y_1, z_1$ , the cartesian coordinates of corresponding points on these surfaces.

If  $S$  and  $S_1$  are referred to any system of corresponding lines, the following equations hold :

$$(173) \quad \frac{\partial x_1}{\partial u} = \lambda \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \sigma \frac{\partial x}{\partial u} + \tau \frac{\partial x}{\partial v},$$

where  $\lambda, \mu, \sigma, \tau$  are functions of  $u$  and  $v$ , and are to be determined; similar equations are obtained with respect to  $y_1$  and  $z_1$ .

(29) VOLK, O.: Zur YOSSschen Arbeit, Sitzungsberichten der Bayer. Akad. d. Wiss. Math.-naturw. Abt., Jahrgang 1924.

Making use of the usual notation, and the functions belonging to  $S_1$ , being indicated by the subscript 1, we get from (1)

$$(174) \quad \begin{cases} E_1 = \lambda E + 2 \lambda \mu F + \mu^2 G, \\ F_1 = \lambda \sigma E + (\lambda \tau + \mu \sigma) F + \mu \tau G, \\ G_1 = \sigma^2 E + 2 \sigma \tau F + \tau^2 G. \end{cases}$$

Denoting by  $X, Y, Z$  the direction-cosines of the normal to  $S$ , and consequently to  $S_1$  at the corresponding point, we find the relations

$$(175) \quad \begin{cases} L_1 = \lambda L + \mu M, \\ M_1 = \lambda M + \mu N = \sigma L + \tau M, \\ N_1 = \sigma M + \tau N, \end{cases}$$

where, as usual,

$$(176) \quad \begin{cases} L = -\sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial u}, \\ M = -\sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = -\sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u}, \\ N = -\sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial v}. \end{cases}$$

Put

$$(177) \quad \Delta = \lambda \tau - \mu \sigma,$$

then<sup>(30)</sup>

$$(178) \quad \begin{cases} E_1 G_1 - F_1^2 = \Delta^2 (EG - F^2), \\ L_1 M_1 - M_1^2 = \Delta (LM - N^2). \end{cases}$$

From these equations we find that between the GAUSSIAN curvatures  $K$  and  $K_1$  of the two surfaces we obtain the relation

$$K_1 = K,$$

if

(30) SCHEFFERS, G.: Einführung in die Theorie der Flächen, Berlin und Leipzig (1922), S. 557.

$$\Delta=1.$$

**Theorem :** *When*

$$E_1=E, \quad F_1=F, \quad G_1=G,$$

*then*

$$K_1=K,$$

*or it follows that  $S_1$  and  $S$  is identical with each other without translation.*<sup>(31)</sup>

*When*

$$(\theta_i\theta_i)_1=(\theta_i\theta_i), \quad (\theta_i\theta_\pi)_1=(\theta_i\theta_\pi), \quad (\theta_\pi\theta_\pi)_1=(\theta_\pi\theta_\pi)$$

*in circle-surface,*<sup>(32)</sup> *then*

$$K_1=K,$$

*or it follows that two circle-surfaces is identical with each other without translation.*

(31) NAKAJIMA, S.: Über die ersten Fundamentalgrößen bei Eiflächen, Jap. Journ. of Math. 4 (1927), p. 101.

(32) NAKAJIMA, S.: Kugelgeometrie von MOBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., vol. II. No. 1, (1929) Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan.





**L.A.R.I. 75**

INDIAN AGRICULTURAL RESEARCH  
INSTITUTE LIBRARY, NEW DELHI

[illegible]

GIPNLK—H-40 I.A.R.I.—29-4-5—15,000